
Stanford University Libraries

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Erster Band,

In 4 Heften,

Mit 5 Kupfertafeln.

Berlin,
im Verlage von Duncker und Humblot.

1826.

Inhaltsverzeichnifs
des ersten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik

1. Analysis.

2. Geometrie.

3. Mechanik.

II. Angewandte Mathematik.

Vorrede.

Es giebt kaum einen bedeutenden Gegenstand des Wissens, der nicht auch seine Deutsche Zeitschrift hätte. Nur die weite, unbegrenzte Mathematik, diese über Zeit und Ort, über Meinungen und Leidenschaften erhabene Wissenschaft, die unter allen vielleicht am meisten mit der Wahrheit verwandt ist, hat dermalen keins. Im Französischen existirt seit sechzehn Jahren ununterbrochen eine mathematische Zeitschrift: *Annales de mathématiques pures et appliquées, ouvrage périodique rédigé par* M. *Gergonne à Montpellier,* und ein zweites ist zu Brüssel im Entstehen. Auch in andern Sprachen fehlt es mindestens weniger an Gelegenheit, einzelnen mathematischen Gegenständen die Publicität geben. Nur im Deutschen giebt es eine solche Gelegenheit nicht. Dieses scheint nicht billig zu seyn; denn die Mathematik hat unter den Deutschredenden nicht etwa weniger Freunde als unter andern Völkern, sondern die Deutschen haben, vermöge ihrer Unpartheiligkeit und Neigung, die Wahrheit anzuerkennen, wo sie auch zu finden seyn mag, so wie vermöge ihrer Beharrlichkeit und ihrer Vorliebe für das Ergründen, gerade für die Mathematik einen vorzüglichen Beruf; wie es auch die Geschichte dieser Wissenschaft beweiset. Da nun eine Zeitschrift in der That ein sehr wirksames Mittel ist, eine Wissenschaft zu fördern und zu verbreiten, sie gegen fremdartige Einflüsse zu verwahren, gegen Unterjochung unter Mode, Autoritäten, Schule und Rücksichten zu schützen und im freien Reiche des Denkens zu erhalten, so ist es wohl der Mühe werth zu versuchen, ob sich eine solche in Deutscher Sprache für die Mathematik ins Leben rufen und darin erhalten läfst.

Eine Zeitschrift, die gemeinnützig seyn soll, mufs sich nicht auf eine einzelne Classe von Lesern beschränken und ihren Gegenstand nicht zu enge begrenzen. Sie mufs sich ein gröfseres Publicum zu verschaffen suchen, schon damit sie sich ihre Dauer, und die Möglichkeit der Ver-

vollkommnung sichere. Frühere ähnliche, sehr verdienstliche Versuche sind vielleicht nur deshalb nicht bestanden, weil sie sich zum Theil in einem zu engen Raume bewegten. Die Zeitschrift mufs sich also nicht blofs Kennern widmen, oder nicht auf die Erweiterung der Wissenschaft allein zu wirken suchen, sondern auch auf ihre Verbreitung. Vorzüglich mufs sie alle Einseitigkeit vermeiden. Nichts schadet der Entwickelung einer Wissenschaft mehr, als einseitige Vorliebe für diese oder jene Methode, als Zwang und Gewohnheit. Den gröfsten Aufschwung hat auch die Mathematik immer durch freie, aus dem Bezirk der Schule und der Gewohnheit heraustretende Ansichten genommen, z. B. als die sogenannte Jnfinitesimalrechnung erfunden wurde, oder früher, als die Algebra entstand; und wer kann behaupten, dafs mit dem jetzt Vorhandenen alles abgeschlossen sey und dafs nicht noch andere Ansichten möglich sind, die auf noch geraderem Wege zum Ziele führen und noch tiefer in die Natur der Dinge eindringen!? Die Zeitschrift mufs sich also vor allen Dingen frei bewegen und allgemein sein, wie die Wissenschaft selbst. Sie mufs die Wahrheit aufnehmen, sie fördern, verbreiten und ihrer pflegen, unter welchem Volke und in welcher Sprache sie auch angetroffen werden mag. Auf die Erweiterung der Wissenschaft wirkt sie, wenn sie Neues, wozu aber nicht blofs neue Sätze, sondern auch neue Ansichten vorhandener Sätze zu rechnen sind, bekannt macht. Es läfst sich über einzelne neue Gedanken nicht sogleich ein Buch schreiben, und es bleiben manche einzelne Resultate von Forschungen, selbst der Kenner, zuweilen lange verborgen und gehen wohl gar verloren, weil es an naher Gelegenheit fehlt, sie mitzutheilen. Auf die Verbreitung der Wissenschaft wirkt sie, wenn sie weniger bekannte Dinge, vorzüglich aus fremden Sprachen, unter Denen die schon so weit gekommen sind, dafs sie anfangen mit eigenen Kräften in der Wissenschaft fortzugehen, verbreitet, den Lernenden aber Winke giebt, wo sie das, was sie zu suchen haben, am nächsten und besten finden. Nicht Jeder kann sich grofse und kostbare Werke, des weniger Bekannten wegen, verschaffen; selbst fremde Sprachen sind nicht Jedem, der sich mit einer Wissenschaft beschäftigt, verständlich. Es giebt merkwürdige Fälle, dafs gute Köpfe ihre Zeit und ihre kostbaren Kräfte an dem Ersinnen

von Dingen verloren haben, die schon bekannt waren. Hätten sie das Vorhandene gekannt, wären von da erst ausgegangen und hätten ihre Kräfte auf das weitere Fortschreiten gewendet, so würde die Wissenschaft, durch die nämlichen Anstrengungen, die ihr jetzt wenigstens keinen unmittelbaren Gewinn brachten, haben gefördert werden können. Auch selbst der Lernende kann von einer Zeitschrift, die auch auf ihn Rücksicht nimmt, Vortheil ziehen. Er ist öfters sich selbst, oder nicht dem bestem Rathe überlassen. Eine Schrift, die sich die Verbreitung und Förderung ihrer Wissenschaft angelegen seyn läſst, kann ihm häufig bessern Rath geben als er in seiner Umgebung findet. Dem Kenner also muſs die Zeitschrift Neues zuführen und ihm die Mittel darbieten, die Resultate seiner eigenen Bemühungen leicht und schnell mitzutheilen. Dem der anfängt zur Forschung überzugehen, oder dem Liebhaber der Wissenschaft, muſs sie Nachricht von dem weniger bekannten Vorhandenen geben und ihm anzeigen, von wo seine Forschungen anfangen könnten. Dem Lernenden muſs sie helfen die Wege finden, auf welchen er am besten sein Ziel erreicht; alles ohne Vorliebe für Besonderheiten und fern von jeder Befangenheit.

Nach diesen Ansichten und in diesem Sinne soll die gegenwärtige Zeitschrift redigirt werden.

In den Umfang ihrer Gegenstände sollen gehören:

1) Die reine Mathematik, also Analysis, Geometrie und die Theorie der Mechanik in ihrer ganzen Ausdehnung.
2) Anwendungen der Mathematik aller Art, z. B. auf die Lehre vom Licht (Optik, Catoptrik, Dioptrik), auf die Theorie der Wärme, auf die Theorie des Schalles, auf die Wahrscheinlichkeiten etc.; ferner die Hydraulik, die Maschinenlehre, die mathematische Geographie, Geodäsie etc. Die Astronomie soll zwar nicht ausgeschlossen sein, aber auch keinen Hauptgegenstand ausmachen, weil diese Wissenschaft allein eine Zeitschrift beschäftigt.

Der Inhalt soll zweierlei Art sein. Die Schrift soll

Erstlich, Sätze und Ansichten mittheilen, die, so viel dem Herausgeber bekannt, noch nicht gedruckt sind.

Zweitens, Sätze und Ansichten, welche zwar schon gedruckt aber weniger bekannt sind, also vorzüglich Abhandlungen aus fremden Spra-

chen, folglich auch Nachrichten von Büchern und ihrem Inhalte. Die fremden Abhandlungen sollen entweder wörtlich übertragen, oder nach den Umständen blofs auszugsweise mitgetheilt, oder es soll auch blofs Nachricht davon gegeben werden.

Vorläufig beschränkt sich der Herausgeber bei diesem Journal auf diejenige Hülfe, die er, vermöge der Bestimmung der Schrift, zugleich zum Verbreitungsmittel einzelner Gedanken und Resultate von Forschungen zu dienen, von denjenigen Kennern, die er unter seine Freunde und Bekannten zählt, erbeten hat, oder noch erbitten wird. Zeigt sich's in der Folge dienlich, so wird eine allgemeine Auffoderung zu Beiträgen nachfolgen. Alsdann kann auch die gute alte Gewohnheit, welche auch die Französischen Annalen der Mathematik angenommen haben, öffentlieh Aufgaben aufzustellen, und sie durch die Zeitschrift beantworten zu lassen, wieder aufgenommen werden. Auch kann die Zeitschrift alsdann beliebige Anzeigen von Büchern oder von Erfindungen in Dingen, die mit dem Umfange der Schrift auf irgend eine Weise in Verbindung stehen, aufnehmen; was aber vor der Hand ausgesetzt bleibt.

Die Zeitschrift wird in zwanglosen Heften erscheinen; ungefähr aber soll vierteljährlich ein Heft von zehn bis zwölf Bogen ausgegeben werden. In den einzelnen Heften werden die Aufsätze nach keiner andern Regel auf einander folgen als nach der Zeitfolge, wie der Herausgeber sie erhielt, oder wie sie vollendet wurden. Am Schlusse des Jahrganges aber soll eine Uebersicht des Inhalts, nach den Gegenständen geordnet, beigefügt werden. Die Verlagshandlung, deren Thätigkeit und Eifer für die Literatur bekannt ist, wird gewifs ihrerseits Alles thun, was zur Förderung und zum Bestehen des Unternehmens gereichen mag.

Dafs in dem gegenwärtigen ersten Heft die Aufsätze fast ohne Ausnahme original sind, wird man hoffentlich nicht tadeln. Auch liefs der beschränkte Raum nicht zu, dafs sich der Inhalt eines einzelnen Heftes über den ganzen Umfang des Plans verbreite. Wenn man mehrere Hefte zusammennimmt, wird man den obigen Plan vollständiger befolgt finden.

Berlin, im December 1825.

Der Herausgeber.

1.

Von der Bestimmung der Wassermenge eines Stroms.

(Vom Herrn O. L. B. D. *Eytelwein.*)

Die Aufgabe, wie die Wassermenge eines jeden Stroms gefunden werden kann, hat bisher zu den weitläuftigsten Untersuchungen Veranlassung gegeben, und dennoch hat es nicht gelingen wollen, genügende Resultate aufzustellen. Wären für jedes gegebene Flufsbett die Gesetze der Bewegung des Wassers bekannt, so würde man leicht in vorkommenden Fällen aus den Abmessungen eines Stroms die mittlere Geschwindigkeit und aus dieser die Wassermenge desselben finden können. Allein es ist der Hydraulik bis jetzt nur gelungen für ganz regelmäſsige Flufsbetten, in welchen alle Querschnitte des Wassers einander gleich vorausgesetzt werden, die Gesetze der Bewegung des Wassers genügend zu bestimmen. Sind hingegen die Querschnitte des Stroms einander nicht gleich, und ist das Flufsbett nach verschiedenen Richtungen gekrümmt, wie dies fast bei allen Strömen der Fall ist, so hat es bis jetzt noch nicht gelingen wollen, aus den gegebenen Abmessungen eines solchen Bettes die Gesetze der Bewegung des darin flieſsenden Wassers zulänglich genau auszumitteln. Weil es aber von der gröſsten Wichtigkeit ist, für jeden gegebenen Strom, sowol die mittlere Geschwindigkeit des Wassers, als auch die Wassermenge desselben, hinreichend genau anzugeben, so muſs man sich damit begnügen, für irgend einen auf die Richtung des Stroms senkrechten Querschnitt, in verschiedenen nicht zu weit von einander entfernten Punkten, mittelst dazu geeigneter Strom-Geschwindigkeitsmesser, die verschiedenen Geschwindigkeiten des Wassers, nach der Breite und nach der Tiefe des Querschnitts, also unter dem Wasserspiegel, auszumessen und hieraus die Wassermenge zu bestimmen.

Es giebt sehr verschiedene Instrumente, durch welche man versucht hat, die Geschwindigkeit des Wassers in jeder Tiefe unter seiner Oberfläche zu finden, aber nur wenige sind unter allen Umständen anwendbar, und geben die gesuchte Geschwindigkeit mit der erfoderlichen Genauigkeit. Zu den vorzüglich-

sten kann man den hydrometrischen Flügel rechnen, welchen Herr *Woltmann* in Hamburg zuerst bekannt machte. Auch gehört hierher der Stromquadrant oder hydrometrische Pendel, nach den Verbesserungen des Ritters *von Gerstner* zu Prag. Dieses Instrument hat bei dem Gebrauche den Vortheil, daſs man keiner so weitläufigen Vorrichtung bedarf, welche der hydrometrische Flügel zu seiner Befestigung erfodert, wenn man in groſsen Tiefen Geschwindigkeiten messen will; auch bedarf dasselbe keiner Zeitbestimmungen, wogegen der hydrometrische Flügel eine Sekunden-, oder noch besser eine Tertienuhr erfodert.

Wird nun vorausgesetzt, daſs zur Ausmittelung der Wassermenge eines Stromes an einer dazu geeigneten Stelle, wo das Strombett fest und von Unebenheiten frei ist, auch die Ufer auf eine gewisse Weite in geraden, parallelen Richtungen fortlaufen, ein auf diese Richtung rechtwinkliger Querschnitt ausgemessen und aufgezeichnet, auch hiernächst mittelst eines Strom-Geschwindigkeitsmessers in mehreren nicht zu weit von einander entfernten senkrechten Linien dieses Querschnitts, die verschiedenen Geschwindigkeiten des Stroms und die Abstände dieser Punkte von dem Wasserspiegel ausgemessen worden sind, so ist das gewöhnliche Verfahren zur Bestimmung der Wassermenge, welche in jeder Secunde durch den ausgemessenen Querschnitt des Stroms abflieſst, daſs man diesen Querschnitt in so viele Rechtecke oder Trapeze eintheilt, als Geschwindigkeiten beobachtet worden sind, diese Vierecke selbst aber so anordnet, daſs die Punkte, in welchen man Geswindigkeiten beobachtet hat, nahe genug in die Mitte derselben fallen. Hierauf wird jede gefundene Geschwindigkeit mit dem Flächeninhalte des dazu gehörigen Trapezes multiplicirt und alle zusammen gehörigen Producte addirt: so giebt die Summe derselben die in jeder Sekunde durch den gemessenen Querschnitt des Stroms abflieſsende Wassermenge. Auch erhält man die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in diesem Querschnitte, wenn die gefundene Wassermenge durch den Inhalt des Querschnitts dividirt wird.

Dies Verfahren gründet sich auf die Voraussetzung, daſs das Wasser in jedem zugehörigen Trapez mit einerlei Geschwindigkeit abflieſst, welche derjenigen gleich sein soll, die in der Mitte dieses Trapezes beobachtet worden ist. Diese Voraussetzung ist aber ganz gegen die Natur der Ströme, weil in der Regel die Geschwindigkeiten von der Oberfläche des Wassers nach dem Boden zu allmählig abnehmen, und eine solche allmählige Zu- und Abnahme der Geschwindigkeit auch von einem Ufer nach dem andern Statt findet. Ist gleich das Gesetz dieser Veränderung der Geschwindigkeit noch unbekannt und nur im Allge-

meinen anzunehmen, daſs an derjenigen Seite des Stroms, wo sich das concave Ufer und die gröſste Stromtiefe befindet, auch die gröſste Geschwindigkeit gefunden wird, so scheint es doch weit angemessener, bei der Berechnung der Wassermenge des Stroms die Voraussetzung zu verlassen, nach welcher das Wasser durch alle Theile der einzelnen Trapeze mit gleicher Geschwindigkeit abflieſst, und dagegen anzunehmen, daſs sich die Geschwindigkeiten zwischen jeden zwei Punkten, in welchen Beobachtungen angestellt worden sind, nur allmählig ändern, also das Wasser durch alle einzelne Punkte des gemessenen Querschnitts auch mit verschiedenen Geschwindigkeiten abflieſse Anstatt daher den ganzen Querschnitt des Stroms in die vorhin beschriebenen Vierecke einzutheilen, wird es angemessener sein, jedesmal zwei auf einander folgende Punkte, in welchen die Geschwindigkeiten der zugehörigen senkrechten Linie gemessen sind, mit den zunächst gelegenen Punkten der darauf folgenden senkrechten Linie, in welcher ebenfalls Geschwindigkeiten gemessen sind, zu verbinden, wodurch ein Trapez entsteht, in welchem die vier in den Winkeln desselben gemessenen Geschwindigkeiten bekannt sind. Wird nun der Voraussetzung gemäſs angenommen, daſs sich die Geschwindigkeiten von einem jeden Punkte zu den beiden zunächst gelegenen nur allmählig ändern und daſs diese Veränderungen gleichförmig erfolgen, so läſst sich unter diesen Bedingungen die Wassermenge, welche durch ein solches Trapez abflieſst, auf folgende Weise finden.

Es sei HH', in der beiliegenden Figur 10. der wagerechte Wasserspiegel des gemessenen Querschnitts und EB, FD zwei zunächst auf einander folgende senkrechte Linien, in welchen man bei A, B und C, D die Geschwindigkeiten α, β und γ, δ gemessen hat. Ferner sollen die Tiefen $EA = a$, $AB = b$, $FC = c$ und $CD = d$ nebst dem Abstande der beiden senkrechten Linien $EF = h$ bekannt sein.

Mit EB werde PQR parallel gezogen und man setze die Geschwindigkeit in $Q = \alpha'$; in $R = \beta'$; ferner $EP = x$, $QR = y$; so verhält sich

$$h : x = \gamma - \alpha : \alpha' - \alpha \text{ und}$$
$$h : x = \delta - \beta : \beta' - \beta, \text{ daher wird}$$
$$\alpha' = \alpha + \frac{\gamma - \alpha}{h} x \text{ und } \beta' = \beta + \frac{\delta - \beta}{h} x.$$

Ferner findet man $y = b + \frac{d - b}{h} x.$

Bezeichnet man die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der senkrechten Linie QR durch ω und setzt die Wassermenge, welche in jeder Secunde durch

das Trapez $ABRQ = m$; ferner die durch das Trapez $ABCD$ abflieſsende Wassermenge $= M$, so erhält man

$$\omega = \frac{\alpha' + \beta'}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2h} x,$$

daher $m = \int \omega y \, dx.$

Hierin die eben gefundenen Werthe gesetzt und integrirt, so findet man

$$m = (\alpha + \beta) \frac{bx}{2} + \left[\left(\alpha + \beta (d - 2b) + (\gamma + \delta) b \right) \right] \frac{x^2}{4h}$$

$$- (\alpha + \beta - \gamma - \delta)(d - b) \frac{x^3}{6h^2} + \text{Const},$$

wo die beständige Gröſse $= 0$ ist, weil $m = 0$ für $x = 0$ wird.

Für $x = h$ verwandelt sich m in M, daher erhält man die Wassermenge, welche in jeder Secunde durch das Trapez $ABCD$ abflieſst, oder

$$M = \frac{h}{12} \left[(\alpha + \beta)(2b + d) + (\gamma + \delta)(b + 2d) \right]$$

und hieraus die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser durch das gegebene Trapez abflieſst

$$= \frac{(\alpha + \beta)(2b + d) + (\gamma + \delta)(b + 2d)}{6(b + d)}$$

Vergleicht man die hiernach gefundene Wassermenge mit derjenigen, welche entsteht, wenn man auf die gewöhnliche Art unter der Voraussetzung rechnet, daſs alle Wassertheile in den zugehörigen Vierecken mit einerlei Geschwindigkeit abflieſsen und setzt die so entstandene Wassermenge $= M'$, so findet man hiernach, wenn der Raum $ABCD$ in vier Trapeze so eingetheilt wird, daſs solche einerlei Höhe und jede zwei nebeneinander liegende gleiche Grundlinien erhalten, dann aber jedes dieser Trapeze mit der zugehörigen Geschwindigkeit multiplicirt wird, die entsprechende Wassermenge

$$M' = \frac{h}{16} \left[(\alpha + \beta)(3b + d) + (\gamma + \delta)(b + 3d) \right]$$

Hieraus findet man den Unterschied zwischen den nach diesen beiden Voraussetzungen berechneten Wassermengen oder

$$M - M' = \frac{h}{48}(d - \mathrm{b})(\alpha + \beta - \gamma - \delta),$$

woraus hervorgeht, wie bedeutend groſs dieser Unterschied werden kann. Nur für $d = b$ oder $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ verschwindet dieser Unterschied, und man kann

kann alsdann ohne Nachtheil auf eine oder die andere Weise die Wassermenge berechnen.

Weil am Umfange der ausgemessenen Querschnitte, anstatt der Trapeze, Dreiecke entstehen können, so verwandelt sich für diesen Fall das Trapez $ABCD$ in ein Dreieck ACD. Alsdann wird $b = 0$ und $\beta = \alpha$; daher findet man für diesen Fall die gesuchte Wassermenge

$$= \frac{hd}{6}(\alpha + \gamma + \delta).$$

Die Anwendung der vorstehenden Dreiecke auf besondere Fälle der Ausübung erfordert noch die besondere Berücksicktigung des Umstandes, daſs selten die anzuwendenden Strom-Geschwindigkeitsmesser die Geschwindigkeit des Wassers unmittelbar an der Oberfläche anzugeben im Stande sind, sondern daſs nur in einem bestimmten Abstande von dem Wasserspiegel die Geschwindigkeiten gemessen werden können, weil jeder Körper, welcher zu nahe an die Oberfläche des bewegten Wassers gebracht wird, eine Erhöhung desselben verursacht, wodurch eine Geschwindigkeit erzeugt wird, die von derjenigen verschieden ist, welche dem bewegten Wasser im Beharrungszustande entspricht. Wären daher unter dem Wasserspiegel HH' die Geschwindigkeiten α, β, γ und δ in den Punkten A, B, C und D bekannt, und man wollte hieraus die durch das Viereck $ACEF$ in jeder Secunde abflieſsende Wassermenge bestimmen, so setze man die Geschwindigkeiten des Wassers in $E = \alpha'$ und in $F = \gamma'$; alsdann wird man nach dem bisher beobachteten Verfahren, mittelst der gegebenen Geschwindigkeiten α, β, γ, δ, die Geschwindigkeiten an der Oberfläche des Wassers genau genug finden können.

Es verhält sich hiernach

$$b : a + b = \alpha - \beta : \alpha' - \beta \text{ und}$$
$$d : c + d = \gamma - \delta : \gamma' - \delta, \text{ folglich findet man}$$
$$\alpha' = \beta + (\alpha - \beta).\frac{a + b}{b} \text{ und}$$
$$\gamma' = \delta + (\gamma - \delta).\frac{c + d}{d}.$$

Daher sind in dem Vierecke $ACEF$ die Geschwindigkeiten α', γ', α, γ bekannt, und wenn die Wassermenge, welche durch dasselbe in jeder Secunde abflieſst, $= N$ gesetzt wird, so findet man mit Hülfe des bereits entwickelten allgemeinen Ausdrucks,

$$N = \frac{h}{12}\left[(\alpha' + \alpha)(2a + c) + (\gamma' + \gamma)(a + 2c)\right],$$

oder hierin die vorstehenden für α' und γ' gefundenen Werthe eingeführt, so entsteht für die gesuchte Wassermenge folgender Ausdruck

$$N = \frac{h}{12}\left[\frac{\alpha(a + 2b) - \beta a}{b}(2a + c) + \frac{\gamma(c + 2d) - \delta c}{d}(a + 2c)\right]$$

So wie unmittelbar am Wasserspiegel des Stromquerschnitts keine Geschwindigkeiten mittelst der bis jetzt bekannten Werkzeuge gemessen werden können, eben so gilt dies von dem übrigen Umfange dieses Querschnitts, so weit solcher durch das Strombett unmittelbar begrenzt wird. Allein durch ein ganz ähnliches Verfahren läſst sich auch hier in den zugehörigen Vierecken die abflieſsende Wassermenge finden, und da dies mittelst der bereits gefundenen Ausdrücke leicht bewirkt werden kann, so wird es nicht nöthig sein, die deſshalb erforderlichen Rechnungen weiter auszuführen. Auch schien es unnöthig, diejenigen Maſsregeln näher auseinander zu setzen, welche eine vorsichtige Messung der Geschwindigkeit des flieſsenden Wassers erfordert, so wenig als die besondern Vorrichtungen zu beschreiben, welche vorzüglich bei sehr breiten Strömen, die genaue Angabe von der Lage derjenigen Punkte erfordert, in welchen Geschwindigkeiten und Wassertiefen gemessen werden sollen, weil ich mich bereits an einem andern Orte hierüber umständlich erklärt habe.

2.

Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Gröſsen x und y, wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, daſs $f(z, f(x, y))$ eine symmetrische Function von z, x und y ist.

(Von Herrn *N. H. Abel.*)

Wenn man z. B. die Functionen $x + y$ und xy durch $f(x, y)$ bezeichnet, so ist für die erste $f(z, f(x, y)) = z + f(x, y) = z + x + y$ und für die zweite $f(z, f(x, y)) = z.f(x, y) = zxy$. Die Function $f(x, y)$ hat also in den beiden Fällen die merkwürdige Eigenschaft, daſs $f(z, f(x, y))$ eine symmetrische Function der drei unabhängig-veränderlichen Gröſsen z, x und y ist. Ich will in diesem Aufsatze die allgemeine Gestalt der Functionen suchen, welche eben diese Eigenschaft haben.

Die Grundgleichung ist:

1. $f(z, f(x, y))$ = einer symmetrischen Function von x, y und z.

Eine symmetrische Function bleibt die nämliche, wie man auch die veränderlichen Gröſsen, von welchen sie abhängt, unter einander verwechseln mag. Es finden also folgende Gleichungen statt:

$$2. \left\{\begin{array}{l} f(z, f(x, y)) = f(z, f(y, x)), \\ f(z, f(x, y)) = f(x, f(z, y)), \\ f(z, f(x, y)) = f(x, f(y, z)), \\ f(z, f(x, y)) = f(y, f(x, z)), \\ f(z, f(x, y)) = f(y, f(z, x)). \end{array}\right.$$

Die erste Gleichung kann nicht anders Statt finden, als wenn

$$f(x, y) = f(y, x)$$

ist; das heiſst $f(x, y)$ muſs eine symmetrische Function von x und y sein. Aus diesem Grunde reduciren sich die Gleichungen (2) auf folgende zwei:

$$3. \left\{\begin{array}{l} f(z, f(x, y)) = f(x, f(z, y)), \\ f(z, f(x, y)) = f(y, f(z, x)). \end{array}\right.$$

Es sei der Kürze wegen

$$f(x, y) = r;\ f(z, y) = v;\ f(z, x) = s;\ \text{so ist}$$

$$4.\quad f(z, r) = f(x, v) = f(y, s).$$

Man differentiire der Reihe nach, nach x, y, z, so findet man

$$f'(r)\left(\frac{dr}{dx}\right) = f'(s)\left(\frac{ds}{dx}\right),$$

$$f'(v)\left(\frac{dv}{dy}\right) = f'(r)\left(\frac{dr}{dy}\right),$$

$$f'(s)\left(\frac{ds}{dz}\right) = f'(v)\left(\frac{dv}{dz}\right).$$

Multiplicirt man die Glieder dieser Gleichungen auf beiden Seiten mit einander und dividirt die Producte durch $f'(r)$, $f'(v)$, $f'(s)$, so erhält man folgende Gleichung

$$5.\quad \left(\frac{dr}{dx}\right)\cdot\left(\frac{dv}{dy}\right)\cdot\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{dr}{dy}\right)\cdot\left(\frac{dv}{dz}\right)\cdot\left(\frac{ds}{dx}\right),$$

oder auch

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)\cdot\frac{\left(\frac{dv}{dy}\right)}{\left(\frac{dv}{dz}\right)} = \left(\frac{dr}{dy}\right)\cdot\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)}{\left(\frac{ds}{dz}\right)}.$$

Nun setze man z unveränderlich, so reducirt sich $\left(\frac{dv}{dy}\right):\left(\frac{dv}{dz}\right)$ auf eine Function von y allein. Diese Function sei φy, so mufs zu gleicher Zeit $\left(\frac{ds}{dx}\right):\left(\frac{ds}{dz}\right) = \varphi x$ sein: denn s ist die nämliche Function von z und x, wie v von z und y.

Es ist also alsdann

$$6.\quad \left(\frac{dr}{dx}\right)\cdot\varphi y = \left(\frac{dr}{dy}\right)\cdot\varphi x.$$

Daraus findet man, wenn man integrirt, für den allgemeinen Werth von r,

$$r = \psi(\int\varphi x.\, dx + \int\varphi y.\, dy),$$

wenn ψ eine willkürliche Function ist.

Man setze der Kürze wegen φx statt $\int(\varphi x.\, dx)$ und φy statt $\int(\varphi y.\, dy)$, so ist

$$7.\quad r = \psi(\varphi x + \varphi y)\quad \text{oder}\quad f(x, y) = \psi(\varphi x + \varphi y).$$

Diese Form also ist es, welche die gesuchte Function haben mufs. Sie

kann aber in ihrer ganzen Allgemeinheit der Gleichung (4) nicht genug thun. In der That ist die Gleichung (5), welche die Form der Function $f(x, y)$ giebt, viel allgemeiner als die Gleichung (4), welcher sie entsprechen mufs. Es kommt also auf die Beschränkungen an, denen die allgemeine Gleichung unterworfen ist.

Es ist $f(z, r) = \psi(\varphi z + \varphi r)$.

Aber $r = \psi(\varphi x + \varphi y)$, also

$$f(z, r) = \psi\big(\varphi z + \varphi\psi(\varphi x + \varphi y)\big).$$

Dieser Ausdruck soll nach x, y, z, symmetrisch sein. Also mufs

$$\varphi z + \varphi\psi(\varphi x + \varphi y) = \varphi x + \varphi\psi(\varphi y + \varphi z)$$

sein. Es sei $\varphi z = 0$ und $\varphi y = 0$, so erhält man

$$\varphi\psi(\varphi x) = \varphi x + \varphi\psi(0) = \varphi x + c,$$

also wenn man $\varphi x = p$ setzt,

$$\varphi\psi(p) = p + c.$$

Bezeichnet man also durch φ_1 die umgekehrte Function von derjenigen, welche φ ausdrückt, nämlich diejenige, für welche

$$\varphi\varphi_1(x) = x$$

ist, so findet man

$$\psi(p) = \varphi_1(p + c).$$

Die allgemeine Form der gesuchten Function $f(x, y)$ ist also

$$f(x, y) = \varphi_1(c + \varphi x + \varphi y),$$

und diese Function hat in der That die verlangte Eigenschaft.

Es folgt daraus

$$\varphi f(x, y) = c + \varphi x + \varphi y,$$

oder wenn man statt φx, $\psi x - c$ setzt, und folglich statt φy, $\psi y - c$, und statt $\varphi\big(f(x, y)\big)$, $\psi\big(f(x, y)\big) - c$,

$$\psi f(x, y) = \psi(x) + \psi(y).$$

Dieses giebt folgenden Lehrsatz:

Sobald eine Function $f(x, y)$ zweier unabhängig veränderlichen Gröfsen x und y die Eigenschaft hat, dafs $f\big(z, f(x, y)\big)$ eine symmetrische Function von x, y und z ist, so mufs es allemal eine Function ψ geben, für welche

$$\psi f(x, y) = \psi(x) + \psi(y)$$

ist.

Wenn die Function $f(x, y)$ bekannt ist, so findet man leicht ψx. In

der That erhält man, wenn man die obige Gleichung nach x und nach y differentiirt und der Kürze wegen $f(x, y) = r$ setzt,

$$\psi'(r)\left(\frac{dr}{dx}\right) = \psi' x,$$

$$\psi'(r)\left(\frac{dr}{dy}\right) = \psi' y,$$

also wenn man $\psi' r$ eliminirt,

$$\left(\frac{dr}{dy}\right)\psi' x = \left(\frac{dr}{dx}\right)\psi' y,$$

woraus

$$\psi' x = \psi' y . \frac{\left(\frac{dr}{dx}\right)}{\left(\frac{dr}{dy}\right)}$$

folgt. Multiplicirt man also mit dx und integrirt, so erhält man

$$\psi(x) = \psi' y . \int \frac{\left(\frac{dr}{dx}\right)}{\left(\frac{dr}{dy}\right)} dx.$$

Es sei zum Beispiel

$$r = f(x, y) = xy,$$

so muſs sich eine Function ψ finden lassen, für welche

$$\psi(xy) = \psi(x) + \psi(y)$$

ist. Da $r = xy$, so ist $\left(\frac{dr}{dx}\right) = y\ \left(\frac{dr}{dy}\right) = x$, also

$$\psi x = \psi' y . \int \frac{y}{x} dx = y \psi' y \log(cx),$$

oder weil y unveränderlich angenommen wird,

$$\psi x = a \log(cx).$$

Dieses giebt

$$\psi y = a \log cy, \ \psi(xy) = a \log cxy;$$

also muſs sein:

$$a \log cxy = a \log cx + a \log cy;$$

welches auch der Fall ist, für $c = 1$.

Durch ein dem obigen ähnliches Verfahren kann man auch Functionen zweier veränderlichen Gröſsen finden, welche gegebenen Gleichungen mit drei

veränderlichen Gröſsen genug thun. Nämlich man kann durch auf einander folgende Differentiationen nach den verschiedenen veränderlichen Gröſsen, Gleichungen finden, aus welchen sich so viele unbekannte Functionen, als man will, eliminiren lassen, und man gelangt zuletzt zu einer Gleichung, welche nur noch eine unbekannte Function enthält. Diese Gleichung wird eine partielle Differential-Gleichung mit zwei unabhängig-veränderlichen Gröſsen sein. Der Ausdruck, welcher diese Gleichung giebt, wird also eine gewisse Zahl willkürlicher Functionen einer einzelnen veränderlichen Gröſse enthalten. Nachdem in die gegebene Gleichung, die auf diese Weise gefundenen unbekannten Functionen substituirt sind, findet man eine Gleichung zwischen mehreren Functionen einer einzelnen unveränderlichen Gröſse. Um diese Functionen zu finden muſs man von Neuem differentiiren, und gelangt dann zu gewöhnlichen Differential-Gleichungen, aus welchen sich die Functionen finden lassen, welche nicht mehr willkürlich angenommen werden können. Auf diese Weise findet man die Form aller der unbekannten Functionen; in sofern nicht etwa die gegebene Gleichung unerfüllbar ist.

3.

Entwickelung einer beliebigen Potenz eines Cosinus durch die Cosinus der vielfachen Bogen.

(Von Herrn *Louis Olivier.*)

1.

Man hat lange Zeit für einen beliebigen Bogen x und für einen beliebigen Exponenten m den Ausdruck

$$(2\cos x)^m = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x \dots$$

angenommen.

Euler und Lagrange haben diesen Ausdruck noch. Derselbe ist aber offenbar unvollständig, denn er giebt nur einen einzigen Werth von $(2\cos x)^m$, und im Gegentheil kann diese Gröfse mehrere Werthe haben. Wenn z. B. m ein Bruch mit dem Nenner ν ist, so kann die Potenz $(2\cos x)^m$, ν verschiedene Werthe haben, und es können auch mehrere derselben zum Theil oder ganz imaginair sein. Es kann selbst gar keine reellen Werthe von $(2\cos x)^m$ geben.

Poisson hat zuerst diese Unvollkommenheit bemerkt. (Man sehe seine Erinnerung im zweiten Bande der *Correspondence sur l'école polytechnique,* Seite 212 etc.) Seitdem hat man viel über diesen Gegenstand geschrieben. Man hat den Ausdruck von $(2\cos x)^m$ vermittelst der allgemeinen Gleichung

$$\cos x = \cos(x + 2n\pi),$$

wo π den halben Kreisumfang für den Halbmesser 1 und n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, vervollständigt und dann die Werthe von n gesucht, welche zu den ganz reellen und zu den ganz imaginairen Werthen von $(\cos x)^m$ gehören; worauf es vorzüglich ankam.

Es scheint aber, dafs die Auflösung der Aufgabe noch nicht vollständig gelang. Selbst die Resultate, welche man fand, stimmen nicht ganz überein. Zwar mufs ich fürchten, durch ein nochmaliges Aufnehmen des Gegenstandes nur die Zahl der erfolglosen Versuche zu vergröfsern. Da indessen der Fall von Bedeutung ist, indem es eine Lücke der Analysis selbst gilt und anderntheils die Resultate, welche ich bei der Untersuchung dieses Gegenstandes fand, die Probe auszuhalten scheinen, auch der Weg auf welchem ich dazu gelangte,

sehr

sehr einfach ist, und gar nicht von allgemein anerkannten Sätzen abweicht, so will ich mittheilen, was ich fand.

2.

Es ist

$$2 \cos x = \cos x \pm i \sin x + \frac{1}{\cos x \pm i \sin x},$$

(wenn man der Kürze wegen $\sqrt{-1}$ durch i bezeichnet. D. H.) also nach dem binomischen Lehrsatze:

$$(2 \cos x)^m = (\cos x \pm i \sin x)^m + m_1 (\cos x \pm i\, x)^{m-2}$$
$$+ m_2 (\cos x \pm i \sin x)^{m-4} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(wenn man wiederum der Kürze wegen, die Binomial-Coefficienten durch m_1, m_2, m_3 u. s. w. bezeichnet, so dafs

$$m_1 = m$$
$$m_2 = \frac{m \,.\, (m-1)}{2.}$$
$$m_3 = \frac{m \,.\, (m-1) \,.\, (m-2)}{2.\ 3.}$$
$$m_4 = \frac{m \,.\, (m-1) \,.\, (m-2) \,.\, (m-3)}{2.\ 3.\ 4.}$$

u. s. w. ist. D. H.)

Mehrerer Einfachheit wegen wollen wir m positiv annehmen, welches auch für alle Fälle zureicht; denn wenn m negativ ist, z. B. $m = -\mu$, so ist $(2 \cos x)^m = (2 \cos x)^{-\mu} = \frac{1}{(2 \cos x)^{\mu}}$; wo es wieder nur auf ein positives μ ankommt.

Nun ist nach dem Moivrischen Lehrsatze, für ein beliebiges m,

$$(\cos x \pm i \sin x)^m = \cos mx \pm i \sin mx.$$

Also ist

$$\begin{aligned}(2 \cos x)^m = {} & \cos mx \pm i \sin mx \\ & + m_1 \big(\cos (m-2)\, x \pm i \sin (m-2)\, x\big) \\ & + m_2 \big(\cos (m-4)\, x \pm i \sin (m-4)\, x\big) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

oder

$$(2 \cos x)^m = \cos mx + m_1 \cos (m-2)\, x + m_2 \cos (m-4)\, x \ldots.$$
$$\pm i \big(\sin mx + m_1 \sin (m-2)\, x + m_2 \sin (m-4)\, x \ldots.\big)$$

Es ist aber

$$\cos x = \cos(x + 2n\pi),$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet; also ist

1. $(2\cos x)^m =$

$$\cos m(x+2n\pi) + m_1 \cos(m-2)(x+2n\pi) + m_2 \cos(m-4)(x+2n\pi) \ldots$$
$$\pm i\left[\sin m(x+2n\pi) + m_1 \sin(m-2)(x+2n\pi) + m_2 \sin(m-4)(x+2n\pi) \ldots\right]$$

Diese Formel ist als der vollständige Ausdruck von $(2\cos x)^m$ anerkannt.

Da dieser Ausdruck im Allgemeinen die Form

$$a \pm ib$$

hat, so kommt es darauf an, den Werth der willkürlichen ganzen Zahl n zu finden, welche für gegebene Werthe von x und m, den besonderen Werthen der Gröſse $(2\cos x)^m$ von der Form a oder von der Form $\pm ib$ entsprechen.

3.

Man setze in den allgemeinen Ausdruck (1)

$$x = 2\mu\pi,$$

wo μ eine beliebige ganze Zahl ist, und schreibe der Kürze wegen

$$\mu + n = \nu,$$

so findet man

$$(2\cos 2\mu\pi)^m = (+2)^m =$$
$$\cos 2m\nu\pi + m_1 \cos(m-2)2\nu\pi + m_2 \cos(m-4)2\nu\pi \ldots$$
$$\pm i\left(\sin 2m\nu\pi + m_1 \sin(m-2)2\nu\pi + m_2 \sin(m-4)2\nu\pi \ldots\right),$$

oder auch, weil

$$\cos 2m\nu\pi = \cos(m-2)2\nu\pi = \cos(m-4)2\nu\pi \ldots\ldots\ldots \text{ und}$$
$$\sin 2m\nu\pi = \sin(m-2)2\nu\pi = \sin(m-4)2\nu\pi \ldots\ldots\ldots \text{ ist,}$$

$$(+2)^m = \cos 2m\nu\pi\,(1 + m_1 + m_2 \ldots\ldots\ldots)$$
$$\pm i \sin 2m\nu\pi\,(1 + m_1 + m_2 \ldots\ldots\ldots),$$

oder, weil $1 + m_1 + m_2 \ldots$ so viel ist als 2^m,

2. $$(+1)^m = \cos 2m\nu\pi \pm i \sin 2m\nu\pi.$$

Aus diesem Ausdruck von $(+1)^m$ läſst sich schlieſsen, daſs die $m$te Potenz von $+1$ immer wenigstens einen reellen Werth hat, was auch der Exponent m sein mag; denn da ν jede ganze Zahl, also auch Null sein kann, so findet man, wenn man $\nu = 0$ setzt, immer

$$(+1)^m = \cos 0 = +1.$$

Die Werthe von $(+1)^m$ können auch die Form $\pm ib$ haben, wenn m von der Art ist, daſs für irgend einen Werth von ν,

$$2m\nu = \lambda \pm \tfrac{1}{2}$$

ist, wo λ eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Denn alsdann ist $\cos 2m\nu\pi = 0$ und $\sin 2m\nu\pi = \pm 1$, also

$$(+1)^m = \pm i.$$

Setzt man zweitens in den allgemeinen Ausdruck (1.)

$$x = (2\mu + 1)\pi,$$

wo μ wieder eine beliebige ganze Zahl bedeutet und wie oben, der Kürze wegen,

$$\mu + n = \nu,$$

so findet man durch eine ähnliche Rechnung,

$$3. \quad (-1)^m = \cos(2\nu + 1)m\pi \pm i \sin(2\nu + 1)m\pi.$$

Die Gröfse $(-1)^m$ kann also einen reellen Werth haben, wenn m von der Art ist, dafs für irgend einen Werth von ν,

$$(2\nu + 1)m = \lambda$$

ist, wo λ eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Da λ nur ungerade sein kann, so ist der reelle Werth von $(-1)^m$,

$$(-1)^m = -1.$$

Unmögliche Werthe von der Form $\pm ib$ kann die Gröfse $(-1)^m$ nicht haben; wie sich leicht zeigen läfst.

4.

Dieses vorausgeschickt, sei nunmehr

cos x positiv,

so kann man schreiben:

$$(2\cos x)^m = |2\cos x|^m . (+1)^m;$$

wo $|2\cos x|^m$ den Zahlenwerth von $(2\cos x)^m$ bezeichnet, ohne Rücksicht auf das Zeichen genommen.

Wir sahen aber oben, dafs die Gröfse $(+1)^m$ in allen Fällen wenigstens einen reellen Werth haben kann, und zwei Werthe von der Form $\pm ib$, wenn m von der Art ist, dafs $2m\nu = \lambda \pm \frac{1}{2}$ sein kann. Die Gröfse $(2\cos x)^m$ kann also ebenfalls wenigstens einen reellen Werth haben, in allen Fällen, und zwei Werthe von der Form ib, wenn $2m\nu = \lambda \pm \frac{1}{2}$ sein kann.

Also ist klar, dafs in allen Fällen wenigstens ein Werth von n existiren mufs, für welchen der imaginaire Theil von $(2\cos x)^m$ in dem allgemeinen Ausdrucke dieser Gröfse (1.) verschwindet und der Werth von $(2\cos x)^m$ ganz reell ist; desgleichen, dafs es, wenn $2m\nu = \lambda \pm \frac{1}{2}$ sein kann, wenigstens zwei Werthe von n geben mufs, für welche der reelle Theil des

Ausdrucks (1) wegfällt, weil alsdann zwei Werthe von $(2\cos x)^m$ von der Form $\pm ib$ existiren.

Mithin mufs die Gleichung

4. $0=\sin m(x+2n\pi)+m_1\sin(m-2)(x+2n\pi)+m_2\sin(m-4)(x+2n\pi)\ldots.$

in allen Fällen, das heifst für einen beliebigen positiven Exponenten m und für einen beliebigen Bogen x, dessen Cosinus positiv ist, und die Gleichung

5. $0=\cos m(x+2n\pi)+m_1\sin(m-2)(x+2n\pi)+m_2\sin(m-4)(x+2n\pi)\ldots.$

unter der Bedingung Statt finden können, dafs

$$2m\nu=\lambda\pm\tfrac{1}{2}$$

sein kann.

Wir wollen die Werthe von n suchen, welche den Gleichungen (4 und 5) genugthun.

5.

Man entwickele die Gleichung (4.), so findet man

$$\begin{aligned}0= \quad & \sin mx\cos 2nm\pi+\cos mx\sin 2nm\pi\\ &+m_1\left(\sin(m-2)x\cos 2nm\pi+\cos(m-2)x\sin 2nm\pi\right)\\ &+m_2\left(\sin(m-2)x\cos 2nm\pi+\sin(m-4)x\sin 2nm\pi\right)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

oder

$$6.\quad \begin{aligned}0=\cos 2nm\pi&\left[\sin mx+m_1\sin(m-2)x+m_2\sin(m-4)x\ldots.\right]\\ +\sin 2nm\pi&\left[\cos mx+m_1\cos(m-2)x+m_2\cos(m-4)x\ldots.\right]\end{aligned}$$

Nun behaupte ich, dafs in diesem Ausdrucke die Gröfsen $\cos 2nm\pi$ und $\sin 2nm\pi$ ihren Werth nicht ändern können, so lange $\cos x$ das nämliche Zeichen hat, so dafs ein und derselbe Werth jedesmal zu allen den x zugleich gehöret, deren Cosinus zwischen zwei Zeichenwechseln liegen, z. B. zu allen x

$$\text{von } x=(2r-\tfrac{1}{2})\pi \text{ bis } x=(2r+\tfrac{1}{2})\pi$$

weil die Cosinus aller dieser Bogen positiv sind. r bezeichnet eine beliebige ganze Zahl.

Dieses läfst sich wie folgt beweisen.

6.

Man bezeichne, der Kürze wegen,

$$7.\quad\left\{\begin{array}{l}\cos m(x+2n\pi)+m_1\cos(m-2)(x+2n\pi)+m_2\cos(m-4)(x+2n\pi)\ldots.\\ \qquad\qquad\text{durch } \varphi(x+2n\pi) \text{ und}\\ \sin m(x+2n\pi)+m_1\sin(m-2)(x+2n\pi)+m_2\sin(m-4)(x+2n\pi)\ldots.\\ \qquad\qquad\text{durch } f(x+2n\pi),\end{array}\right.$$

so ist, wie wir gesehen haben,

$$8.\quad f(x+2n\pi) = fx\cos 2nm\pi + \varphi x\sin 2nm\pi.$$

Entwickelt man eben so $\varphi(x+2n\pi)$, so findet man

$$9.\quad \varphi(x+2n\pi) = \varphi x\cos 2nm\pi - fx\sin 2nm\pi.$$

I. Nun setze man, es sei möglich, dafs $\cos 2nm\pi$ und $\sin 2nm\pi$ ihren Werth für irgend einen Werth α von x, der zwischen $x=(2r-\frac{1}{2})\pi$ und und $x=(2r+\frac{1}{2})\pi$ liegt, ändern können, so dafs, wenn der Werth von n, welcher zu Werthen von x gehört, die α vorhergehen, z. B. zu $\alpha-\beta$, p ist, der Werth von n, welcher zu Werthen von x gehört, die auf α folgen, z. B. zu $\alpha+\gamma$, vielleicht $p+q$ sein wird, wo p und q ganze Zahlen bedeuten, und von $\alpha-\beta$, α und $\alpha+\gamma$ vorausgesetzt wird, dafs sie alle drei zwischen $(2r-\frac{1}{2})\pi$ und $(2r+\frac{1}{2})\pi$ liegen: so ist klar, dafs gleichzeitig

$$10.\quad f(x+2p\pi) = 0 \text{ und}$$

$$11.\quad f(x+2p\pi+2q\pi) = 0$$

sein mufs. Denn der allgemeine Ausdruck von $(2\cos x)^m$ ist

$$(2\cos x)^m = \varphi(x+2n\pi) \pm if(x+2n\pi);$$

also ist,

$$12.\quad \big(2\cos(\alpha-\beta)\big)^m = \varphi(\alpha-\beta+2p\pi) \pm if(\alpha-\beta+2p\pi) \text{ und}$$

$$13.\quad \big(2\cos(\alpha+\gamma)\big)^m = \varphi(\alpha+\gamma+2p\pi+2q\pi) \pm if(\alpha+\gamma+2p\pi+2q\pi).$$

Aber $\cos(\alpha-\beta)$ und $\cos(\alpha+\gamma)$ sind nach der Voraussetzung beide positiv: also müssen $\big(2\cos(\alpha-\beta)\big)^m$ und $\big(2\cos(\alpha+\gamma)\big)^m$ nothwendig jedes wenigstens einen reellen Werth haben: folglich mufs sein:

$$14.\quad f(\alpha-\beta+2p\pi) = 0 \text{ und}$$

$$15.\quad f(\alpha+\gamma+2p\pi+2q\pi) = 0.$$

Da nun aber diese beiden Gleichungen für beliebige Werthe $\alpha-\beta$ und $\alpha-\gamma$ Statt finden, welche unmittelbar α vorhergehen oder auf α folgen, so müssen sie auch für $x=\alpha$ selbst, das heifst für den Uebergang von $\alpha-\beta$ in $\alpha+\gamma$ selbst Statt finden. Also darf man in den Gleichungen (14. und 15.) auch $\beta=0$ und $\gamma=0$ setzen. Dieses aber giebt die Gleichungen (10. und 11.) Also müssen diese beiden Gleichungen zugleich Statt finden.

Es läfst sich nun weiter zeigen, dafs dieses unmöglich ist.

Denn man entwickele die Gleichung (11.) auf die Weise, dafs der Theil $2q\pi$ des Bogens abgesondert wird, so findet man

$$16.\quad f(\alpha+2p\pi)\cos 2mq\pi + \varphi(\alpha+2p\pi)\sin 2mq\pi = 0.$$

Diese Gleichung reducirt sich, weil vermöge (10.) $f(\alpha + 2p\pi) = 0$ sein soll, auf

$$17.\quad \varphi(\alpha + 2p\pi)\sin 2mq\pi = 0,$$

und daraus folgt

$$18.\quad \varphi(\alpha + 2p\pi) = 0,\ \text{oder}$$
$$19.\quad \sin 2mq\pi = 0.$$

Man entwickele die Gleichung (18) weiter, so findet man

$$\varphi\alpha\cos 2mp\pi - f\alpha\sin 2mp\pi = 0,$$

welches

$$20.\quad \cot 2mp\pi = \frac{f\alpha}{\varphi\alpha}$$

giebt. Man entwickele auch die Gleichung (10.) so findet man

$$fx\cos 2mp\pi + \varphi x\sin 2mp\pi = 0,$$

welches

$$21.\quad \tang 2mp\pi = -\frac{f\alpha}{\varphi\alpha}$$

giebt. Also soll vermöge der Gleichungen (20. und 21.).

$$\cot 2mp\pi = -\tang 2mp\pi \text{ oder}$$
$$(\tang 2mp\pi)^2 = -1$$

sein, und daraus folgt

$$22.\quad \tang 2mp\pi = \sqrt{-1},$$

und dieses zeigt, weil *tang* $2mp\pi$ eine unmögliche Gröfse ist, dafs die Gleichungen (18. und 10.) nicht cöexistiren können. Es bleibt also nur noch die Gleichung (19). Das heifst: die Gleichungen (10. und 11.) können nur unter der Bedingung cöexistiren, dafs nach (19.)

$$23.\quad \sin 2mq\pi = 0 \text{ ist.}$$

Auf der anderen Seite folgt aus den Gleichungen (12. und 13.), wenn man wie oben $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ setzt, dafs

$$24.\quad \varphi(\alpha + 2p\pi) = \varphi(\alpha + 2p\pi + 2q\pi)$$

sein mufs. Dieses giebt, wenn man entwickelt,

$$\varphi(\alpha + 2p\pi) = \varphi(\alpha + 2p\pi)\cos 2mq\pi - f(\alpha + 2p\pi)\sin 2mq\pi,$$

und daraus folgt, weil *sin* $2mq\pi = 0$ sein soll,

$$\varphi(\alpha + 2p\pi) = \varphi(\alpha + 2p\pi)\cos 2mq\pi,$$

also

$$25.\quad \cos 2mq\pi = 1.$$

Zusammengenommen also findet man, dafs in dem Ausdrucke (6.) der

Werth von n allerdings eben sowohl p als $p+q$, oder eben sowohl n als $n+q$ sein kann, aber nur unter der Bedingung, dafs

$$\sin 2mq\pi = 0 \text{ und } \cos 2mq\pi = 1 \text{ ist.}$$

Schreibt man nun aber in den Gröfsen $\cos 2nm\pi$ und $\sin 2nm\pi$, $n+q$ statt n; so findet man

$$\cos 2m(n+q)\pi = \cos 2mn\pi \cos 2mq\pi - \sin 2mn\pi \sin 2mq\pi \text{ und}$$
$$\sin 2m(n+q)\pi = \sin 2mn\pi \cos 2mq\pi + \cos 2mn\pi \sin 2mq\pi$$

und dieses giebt, vermöge (23. und 25.),

$$26. \quad \cos 2m(n+q)\pi = \cos 2mn\pi \text{ und}$$
$$27. \quad \sin 2m(n+q)\pi = \sin 2mn\pi$$

und hieraus folgt, dafs die Gröfsen $\cos 2mn\pi$ und $\sin 2mn\pi$ ihren Werth für alle die Cosinus, die zwischen $(2r-\frac{1}{2})\pi$ und $(2r+\frac{1}{2})\pi$ liegen, nicht ändern können.

II. Nachdem auf diese Art bewiesen worden, dafs die Gröfsen $\cos 2mn\pi$ und $\sin 2mn\pi$ ihren Werth nicht ändern können, so lange $\cos x$ das nämliche Zeichen hat, so mufs nun noch gezeigt werden, dafs $\cos 2mn\pi$ und $\sin mn\pi$ ihren Werth dann wirklich ändern können, wenn $\cos x$ ein anderes Zeichen annimmt.

Wir sahen oben, dafs wenn n zwei verschiedene Werthe p und $p+q$ für einen und denselben Werth α von x soll haben können, dafs dann die beiden Gleichungen (10. und 11.) zugleich Statt finden müssen. Nachdem diese Gleichungen entwickelt worden, fanden wir, dafs ihre Cöexistenz von der Cöexistenz der Gleichungen (10. und 18.), nämlich der Gleichungen

$$28. \quad f(\alpha+2p\pi) = 0 \text{ und } \varphi(\alpha+2p\pi) = 0$$

abhängt. Wir fanden weiter, dafs die Gleichungen (28.) für einen beliebigen Werth α von x nicht zugleich Statt finden können, woraus die Bedingungen $\sin 2mq\pi = 0$ und $\cos 2mq\pi = 1$ folgten.

Wenn nun aber $\alpha = (2r \pm \frac{1}{2})\pi$ ist, (das heifst, wenn x denjenigen Werth hat, für welchen $\cos x$ das Zeichen wechselt. D. H.) so verhält es sich anders. Alsdann können die Gleichungen (28.) wirklich zugleich Statt finden; denn sie sind so viel als

$$29. \quad \sin m(\alpha+2p\pi) + m_1 \sin(m-2)(\alpha+2p\pi) + m_2 \sin(m-4)(\alpha+2p\pi) \ldots = 0$$

und

$$30. \quad \cos m(\alpha+2p\pi) + m_1 \cos(m-2)(\alpha+2p\pi) + m_2 \cos(m-4)(\alpha+2p\pi) \ldots = 0,$$

und wenn nun $\alpha = (2r \pm \frac{1}{2})\pi$, so ist

31. $\sin m(\alpha+2p\pi)=-\sin(m-2)(\alpha+2p\pi)=+\sin(m-4)(\alpha+2p\pi)\ldots$
und
32. $\cos m(\alpha+2p\pi)=-\cos(m-2)(\alpha+2p\pi=+\cos(m-4)(\alpha+2p\pi)\ldots$
so dafs sich die Ausdrücke (29. und 30.) auf

$$\sin m\,(2p+2r\pm\tfrac{1}{2})\,\pi\,.\,(1-m_1+m_2-m_3\ldots)=0 \text{ und}$$
$$\cos m\,(2p+2r\pm\tfrac{1}{2})\,\pi\,.\,(1-m_1+m_2-m_3\ldots)=0$$

reduciren, und diese Gröfsen sind wirklich beide gleich Null, weil $1-m_1+m_2-m_3\ldots=(1-1)^m=0$ ist. Also sind in diesem Falle die Bedingungen

$$\sin 2mq\pi=0 \text{ und } \cos 2mq\pi=1$$

nicht mehr nöthig, und folglich können die Gröfsen *cos* $2mn\pi$ und *sin* $2mn\pi$, für diejenigen x, für welche *cos* x das Zeichen wechselt, wirklich ihren Werth verändern.

7.

Nachdem im vorigen Paragraph bewiesen worden, dafs die Gröfsen *cos* $2mn\pi$ und *sin* $2mn\pi$ für alle x, von $(2r-\frac{1}{2})\pi$ bis $(2r+\frac{1}{2})\pi$, nothwendig einen und denselben Werth haben, so folgt, dafs sie auch noch für

$$x=2r\pi$$

den nämlichen Werth haben werden. Also wird, zufolge der Gleichung (6.),

$$0=\cos 2nm\pi\left(\sin 2mr\pi+m_1\sin(m-2)\,r\pi+m_2\sin(m-4)\,r\pi\ldots\right)$$
$$+\sin 2nmr\left(\cos 2mr\pi+m_1\cos(m-2)\,r\pi+m_2\cos(m-4)\,r\pi\ldots\right)$$

oder

$$0=\cos 2mnr\sin 2mr\pi\,(1+m_1+m_2\ldots\ldots\ldots)$$
$$+\sin 2mnr\cos 2mr\pi\,(1+m_1+m_2\ldots\ldots\ldots)$$

sein, welches

$$33.\quad 0=\sin 2m\,(n+r)\,\pi$$

giebt.

Da die Gröfsen r und m gegeben sind, so giebt die Gleichung (33.) die gesuchten Werthe von n und die Gleichung (4.) wird Statt finden, wenn man der Gröfse n die Werthe beilegt, welche die Gleichung (33.) bestimmt, so lange x zwischen den Grenzen

$$(2r-\tfrac{1}{2})\,\pi \text{ und } (2r+\tfrac{1}{2})\,\pi$$

liegt.

Im allgemeinen hängt die Zahl n, für welche der imaginaire Theil des allgemeinen Ausdrucks (1.) verschwindet, in dem gegenwärtigen Fall eines positi-

ven

ven Cosinus, von der Zahl r und dem Exponenten m ab; wie es die Gleichung (33.) zeigt. Diese Gleichung giebt

$$34.\quad -\tang 2mn\pi = \tang 2mr\pi.$$

Aber aus der Gleichung (6.) folgt

$$35.\quad -\tang 2mn\pi = \frac{\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x \ldots\ldots}{\cos mx + m_1 \cos(m-2)x + m_2 \cos(m-4)x \ldots\ldots},$$

also ist

$$\tang 2mr\pi = \frac{\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x \ldots\ldots}{\cos mx + m_1 \cos(m-2)x + m_2 \cos(m-4)x \ldots\ldots}$$

oder

$$36.\quad 0 = \cos 2mr\pi\,[\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x \ldots]$$
$$- \sin 2mr\pi\,[\cos mx + m_1 \cos(m-2)x + m_2 \cos(m-4)x \ldots]$$

oder

$$37.\quad 0 = \sin m(x-2r\pi) + m_1 \sin(m-2)(x-2r\pi) + m_2 \sin(m-4)(x-2r\pi) \ldots$$

Aber ein reeller Werth von $(2\cos x)^m$ findet in allen Fällen Statt: also findet auch die Gleichung (37.) in allen Fällen Statt, nämlich für beliebige Werthe von x, die zwischen

$$(2r-\tfrac{1}{2})\pi \text{ und } (2r+\tfrac{1}{2})\pi$$

liegen.

Da x zwischen den Grenzen $(2r-\frac{1}{2})\pi$ und $(2r+\frac{1}{2})\pi$ eingeschlossen sein soll, so liegt der Bogen $x - 2r\pi$ nothwendig zwischen den Grenzen

$$-\tfrac{1}{2}\pi \text{ und } +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Bezeichnet man also durch x_1 einen beliebigen Bogen, der zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, so ist, vermöge der Gleichung (37.)

$$38.\quad 0 = \sin mx_1 + m_1 \sin(m-2)x_1 + m_2 \sin(m-4)x_1 \ldots\ldots\ldots$$

Dieses giebt das merkwürdige Resultat, daſs für einen beliebigen Bogen x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, die Gröſse $\sin mx_1 + m_1 \sin(m-2)x_1 + m_2 \sin(m-4)x_1 \ldots\ldots$ immer Null ist, was auch x und m sein mögen.

7.

Entwickelt man die Gleichung (5.) für den Fall der Existenz imaginairer Werthe von $(2\cos x)^m$, so findet man durch eine der obigen ähnliche Rechnung:

$$39.\quad 0 = \cos 2mn\pi\,[\cos mx + m_1 \cos(m-2)x + m_2 \cos(m-4)x \ldots]$$
$$- \sin 2mn\pi\,[\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x \ldots] \text{ und}$$

$$40.\quad 0 = \cos 2m(n+r)\pi, \text{ oder } \tang 2mn\pi = \cot 2mr\pi$$

Diese Gleichung giebt den gesuchten Werth von n.

Die Gleichung (39.) giebt

41. $$\operatorname{tang} 2mn\pi = \frac{\cos mx + m_1 \cos(m-2)x + m_2 \cos(m-4)x \ldots\ldots}{\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x \ldots\ldots},$$

also vermöge der Gleichung (40.)

$$\cot 2mr\pi = \frac{\cos mx + m_1 \cos(m-2)x + m_2 \cos(m-4)x \ldots\ldots}{\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x \ldots\ldots}$$

oder

42. $$0 = \cos 2mr\pi(\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x \ldots\ldots) - \sin 2mr\pi(\cos mx + m_1 \cos(m-2)x + m_2 \cos(m-4)x \ldots\ldots)$$

oder

43. $$0 = \sin m(x-2r\pi) + m_1 \sin(m-2)(x-2r\pi) + m_2 \sin(m-4)(x-2r\pi) \ldots,$$

oder auch

44. $$0 = \sin mx_1 + m_1 \sin(m-2)x_1 + m_2 \sin(m-4)x_1 \ldots\ldots\ldots$$

Dieses Resultat stimmt mit dem obigen überein; also mufs die Gleichung (38.) auch Statt finden, wenn imaginaire Werthe von $(2\cos x)^m$ existiren; wie gehörig, weil die Gleichung (38.) in allen Fällen Statt finden mufs.

8.

Um nun die Resultate (38. oder 44.) auf den allgemeinen Ausdruck von $(2\cos x)^m$ (1.) anzuwenden, darf man nur diesen Ausdruck so verwandeln, dafs die Gröfse (38. oder 44.) von dem Uebrigen abgesondert ist.

Es ist

$$\cos m(x+2n\pi) = \cos m(x-2r\pi)\cos 2m(r+n)\pi - \sin m(x-2r\pi)\sin 2m(r+n)\pi$$

$$\cos(m-2)(x+2n\pi) = \cos(m-2)(x-2r\pi)\cos 2m(r+n)\pi - \sin(m-2)(x-2r\pi)\sin 2m(r+n)\pi$$

$$\cos(m-4)(x+2n\pi) = \cos(m-4)(x-2r\pi)\cos 2m(r+n)\pi - \sin(m-4)(x-2r\pi)\sin 2m(r+n)x$$

. . . .

$$\sin m(x+2n\pi) = \cos m(x-2r\pi)\sin 2m(r+n)\pi + \sin m(x-2r\pi)\cos 2m(r+n)\pi$$

$$\sin(m-2)(x+2n\pi) = \cos(m-2)(x-2r\pi)\sin 2m(r+n)\pi + \sin(m-2)(x-2r\pi)\cos 2m(r+n)\pi$$

$$\sin(m-4)(x+2n\pi) = \cos(m-4)(x-2r\pi)\sin 2m(r+n)\pi + \sin(m-4)(x-2r\pi)\cos 2m(r+n)\pi$$

. . . .

also

$$(2\cos x)^m = \Big[\cos 2m(r+n)\pi \pm i \sin 2m(r+n)\pi\Big] \times$$
$$\Big[\cos m(x-2r\pi) + m_1 \cos(m-2)(x-2r\pi) + m_2 \cos(m-4)(x-2r\pi) \ldots\ldots$$
$$\pm i\big(\sin m(x-2r\pi) + m_1 \sin(m-2)(x-2r\pi) + m_2 \sin(m-4)(x-2r\pi) \ldots\ldots\big)\Big].$$

Nun ist vermöge (11. oder 17.)

$$0 = \sin m(x-2r\pi) + m_1 \sin(m-2)(x-2r\pi) + m_2 \sin(m-4)(x-2r\pi) \ldots\ldots;$$

also ist

45. $$(2\cos x)^m = \Big[\cos 2m(r+n)\pi \pm i \sin 2m(r+n)\pi\Big] \times$$
$$\Big[\cos m(x-2r\pi) + m_1 \cos(m-2)(x-2r\pi) + m_2 \cos(m-4)(x-2r\pi) \ldots\ldots\Big].$$

Dieses ist der allgemeine Ausdruck von $(2\cos x)^m$, so reducirt, wie es die Existenz der reellen Werthe erfordert. Er gilt für jeden beliebigen Bogen x, der zwischen den Grenzen

$$(2r - \tfrac{1}{2})\pi \text{ und } (2r + \tfrac{1}{2})\pi$$

liegt, und für einen beliebigen Exponenten m.

9.

Es sei zweitens

cos x negativ.

Da zufolge (§ 3.) unbedingt particulaire Werthe von $(-1)^m$, und folglich in diesem Falle von

46. $$(2\cos x)^m = |2\cos x|^m (-1)^m$$

nicht Statt finden, so kann man, wenn *cos* x negativ ist, nicht wie oben verfahren. Aber es ist leicht, auch in diesem Fall, die obigen Resultate mit dem allgemeinen Ausdrucke von $(2\cos x)^m$ (1.) zu verbinden.

Es sei nämlich y ein beliebiger Bogen, dessen Cosinus negativ ist, so ist klar, daſs

47. $$y - \pi = x$$

ein Bogen sein wird, dessen Cosinus positiv ist. Schreibt man also $\pi + x$ oder y in den allgemeinen Ausdruck von $(2\cos x)^m$ (1.) statt x, so findet man

48. $$(2\cos y)^m = \cos m(x+\pi+2n\pi) + m_1 \cos(m-2)(x+\pi+2n\pi)$$
$$+ m_2 \cos(m-4)(x+\pi+2n\pi) \ldots\ldots\ldots$$
$$\pm i\big(\sin m(x+\pi+2n\pi) + m_1 \sin(m-2)(x+\pi+2n\pi)$$
$$+ m_2 \sin(m-4)(x+\pi+2n\pi) \ldots\ldots\ldots\big).$$

Die Gröſse rechter Hand geht auch in diejenige des Ausdrucks (1.) über, wenn

man $2n+1$ statt $2n$ setzt. Macht man also die nämlichen Verwandlungen wie in (§. 6.) und nimmt dann auf die Gleichungen (37. oder 43.) Rücksicht, so ist das Resultat dasjenige, welches man findet, wenn man in (19.) $2n+1$ statt $2n$ setzt, also
$(2\cos y)^m = [\cos m(2r+2n+1)\pi \pm i \sin m(2r+2n+1)\pi] \times$
$[\cos m(x-2r\pi)+m_1 \cos(m-2)(x-2r\pi)+m_2 \cos(m-4)(x-2r\pi)\ldots]$,
folglich, wenn man wieder statt x seinen Werth $y-\pi$ setzt und dann x statt y schreibt,

$$49.\quad (2\cos x)^m = \Big[\cos m(2r+2n+1)\pi \pm i \sin m(2r+2n+1)\pi\Big] \times \Big[\cos m\big(x-(2r+1)\pi\big)+m_1 \cos(m-2)\big(x-(2r+1)\pi\big) + m_2 \cos(m-4)\big(x-(2r+1)\pi\big)\ldots\ldots\Big].$$

Dieses ist der allgemeine Ausdruck von $(2\cos x)^m$ für einen beliebigen Bogen x, dessen Cosinus negativ ist, und der zwischen den Grenzen

$$(2r+\tfrac{1}{2})\pi \text{ und } (2r+\tfrac{3}{2})\pi$$

liegt.

Die Gleichung (38.) ist in dem gegenwärtigen Falle folgende:

$$50.\quad 0=\sin m(x_2-\pi)+m_1 \sin(m-2)(x_2-\pi)+m_2 \sin(m-4)(x_2-\pi)\ldots,$$

wo x_2 einen Bogen zwischen den Grenzen

$$\tfrac{1}{2}\pi \text{ und } \tfrac{3}{2}\pi$$

bezeichnet.

10.

Nachdem die allgemeinen Ausdrücke von $(2\cos x)^m$ (45. und 49.) in den beiden Fällen positiver und negativer Cosinus gefunden sind, ist es leicht, diejenigen Werthe der willkürlichen Gröfse n zu unterscheiden, die den besondern Werthen der Potenz $(2\cos x)^m$ zukommen.

Da nämlich die Factoren

$$\cos m(x-2r\pi)+m_1 \cos(m-2)(x-2r\pi)+m_2 \cos(m-4)(x-2r\pi)\ldots \text{ und}$$
$$\cos m\big(x-(2r+1)\pi\big)+m_1 \cos(m-2)\big(x-(2r+1)\pi\big) + m_2 \cos(m-4)\big(x-(2r+1)\pi\big)\ldots\ldots$$

in den Ausdrücken (45. und 49.) immer reell sind, so sind offenbar die Werthe von $(2\cos x)^m$ dann reell, wenn die imaginairen Werthe der andern Factoren

$$\cos 2m(r+n)\pi \pm i \sin 2m(r+n)\pi \text{ und}$$
$$\cos 2m(2r+2n+1)\pi \pm i \sin m(2r+2n+1)\pi$$

verschwinden: hingegen sind sie imaginair, wenn die reellen Theile dieser Factoren gleich Null sind; das heifst: die Werthe von $(2\cos x)^m$ werden reell sein, wenn

51. $\begin{cases}\text{für einen positiven Cosinus } \sin 2m(r+n)\pi = 0, \\ \text{für einen negativen Cosinus } \sin m(2r+2n+1)\pi = 0,\end{cases}$

ist, und sie werden imaginair sein, wenn

52. $\begin{cases}\text{für einen positiven Cosinus } \cos 2m(r+n)\pi = 0, \\ \text{für einen negativen Cosinus } \cos m(2r+2n+1)\pi = 0\end{cases}$

ist.

Aus diesen Bedingungen lassen sich die gesuchten Werthe von n für gegebene Werthe von m leicht finden.

I. *Es sei* m *eine ganze Zahl.*

In diesem Falle ist immer

$$\sin 2m(r+n)\pi = 0 \text{ und } \sin m(2r+2n+1) = 0.$$

Zugleich ist

$$\cos 2m(r+n)\pi = 1 \text{ und}$$
$$\cos(2r+2n+1)\pi = -1, \text{ für ein ungrades, und}$$
$$\cos(2r+2n+1)\pi = +1, \text{ für ein grades } m.$$

Der Ausdruck von $(2\cos x)^m$ ist also

$$(2\cos x)^m = \pm\left(\cos mx + m_1 \cos(m-2)x + m_2 \cos(m-4)x \ldots\ldots\right)$$

Das obere Zeichen gehört zu jedem beliebigen Werthe von m, wenn *cos* x positiv ist und zu graden Werthen von m, wenn *cos* x negativ ist. Das untere Zeichen gehört zu ungraden Werthen von m, wenn *cos* x negativ ist. Imaginaire Werthe existiren, wenn m eine ganze Zahl ist, nicht.

II. *Es sei* m *ein Bruch.*

A. Ist der Nenner von m eine grade Zahl,

so kann man setzen

$$m = \frac{\nu}{2\mu}.$$

Da der Bruch m auf die kleinsten Zahlen gebracht vorausgesetzt wird, so dafs ν mit 2μ keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr hat, so mufs ν nothwendig ungrade sein.

a. Reelle Werthe von $(2\cos x)^m$.

α. Wenn *cos* x positiv ist.

Alsdann ist $\sin 2m(n+r) = 0$, wenn

$$n+r = 0 \text{ und } n+r = \mu,$$

und weil zugleich $\cos 2m(\tau+n) = +1$, für $n+\tau=0$; und $=-1$ für $n+\tau=\mu$ ist, so existiren zwei reelle Werthe von $(2\cos x)^m$. Sie sind

$(2\cos x)^m =$

$$\pm\Big[\cos m(x-2\tau\pi)+m\cos(m-2)(x-2\tau\pi)+m_2\cos(m-4)(x-2\tau\pi)\ldots\Big].$$

b. Wenn *cos.* x negativ ist

giebt es keinen reellen Werth von $(2\cos x)^m$; denn die Bedingung der Existenz solcher Werthe, nämlich die Gleichung

$$\sin(2\tau+2n+1)m\pi = \sin\frac{(2\tau+2n+1)\nu}{2\mu}\pi = 0,$$

kann durch keinen ganzzahligen Werth von n erfüllt werden, weil $2\tau+2n+1$ und ν, beides ungrade Zahlen sind, 2μ hingegen eine grade Zahl ist und folglich $\frac{(2\tau+2n+1)\nu}{2\mu}$ für kein ganzzahliges n eine ganze Zahl sein kann.

β. Imaginaire Werthe von $(2\cos x)^m$.

a. Wenn *cos* x positiv ist.

Der Bedingung der Existenz solcher Werthe, nämlich der Gleichung

$$\cos 2m(\tau+n)\pi = \cos\frac{\nu(\tau+n)}{\mu}\pi = 0$$

kann Genüge geschehen, wenn $\frac{\nu}{\mu} = 2p \pm \frac{1}{2}$, das heifst, wenn $\mu = \frac{2\nu}{4p\pm 1}$, oder wenn

$$m = \frac{4p\pm 1}{4}$$

ist, wo p eine beliebige ganze Zahl bedeutet; und weil in diesem Falle

$$\sin 2m(\tau+n)\pi = \sin\frac{4p\pm 1}{2}(n+\tau)\pi$$

sowohl $+1$ als -1 sein kann, so sind zwei imaginaire Werthe von $(2\cos x)^m$ möglich. Sie sind

$(2\cos x)^m =$

$$\pm i\Big[\cos m(x-2\tau\pi)+m_1\cos(m-2)(x-2\tau\pi)+m_2\cos(m-4)(x-2\tau\pi)\ldots\Big].$$

b. Wenn *cos* x negativ ist,

so läfst sich die Bedingung der Existenz imaginairer Werthe von $(2\cos x)^m$, nämlich die Gleichung

$$\cos(2n+2\tau+1)m\pi = \cos\frac{2n+2\tau+1}{2\mu}\nu = 0$$

erfüllen, wenn $\frac{\nu}{2\mu} = 2p \pm \frac{1}{2}$, das heifst, wenn $\mu = \frac{\nu}{4p \pm 1}$, oder wenn

$$m = \frac{4p \pm 1}{2}$$

ist, wo p eine beliebige ganze Zahl bedeutet; und weil in diesem Fall

$$\sin(2n + 2r + 1)m\pi = \sin\frac{(4p \pm 1)(2n + 2r + 1)}{2}\pi,$$

sowohl $+1$ als -1 sein kann, so giebt es zwei imaginaire Werthe von $(2\cos x)^m$. Sie sind

$$(2\cos x)^m = \pm i\Big[\cos m\big(x - (2r + 1)\pi\big) + m_1 \cos(m-2)\big(x - (2r + 1)\pi\big) + m_2 \cos(m-4)\big(x - (2r + 1)\pi\big) \ldots\ldots\Big].$$

B. Ist der Nenner von m eine ungrade Zahl,

so kann man setzen:

$$m = \frac{\nu}{2\mu + 1}.$$

Da der Bruch m wiederum auf die kleinsten Zahlen gebracht vorausgesetzt wird, so ist die Zahl ν durch $2\mu + 1$ nicht theilbar.

a. Reelle Werthe von $(2\cos x)^m$.

a. Wenn *cos* x positiv ist,

so kann

$$\sin 2m(n + r)\pi \quad \text{oder} \quad \sin\frac{2\nu(n + r)}{2\mu + 1}\pi$$

gleich Null sein, wenn

$$n + r = 0 \quad \text{und} \quad n + r = p(2\mu + 1).$$

In diesem Falle ist also

$$\cos 2m(n + r)\pi = \cos o\pi = +1 \quad \text{und}$$
$$\cos 2m(n + r)\pi = \cos 2\nu p\pi = +1.$$

Also giebt es in allen Fällen immer einen reellen Werth von $(2\cos x)^m$. Er ist

$$(2\cos x)^m = +\Big[\cos m(x - 2n\pi) + m_1 \cos(m-2)(x - 2n\pi) + m_2 \cos(m-4)(x - 2n\pi) \ldots\Big]$$

b. Wenn *cos* x negativ ist,

so kann

$$\sin(2n + 2r + 1)m\pi \quad \text{oder} \quad \sin\frac{\nu(2n + 2r + 1)}{2\mu + 1}\pi$$

gleich Null sein, wenn $2n+2r+1$ durch $2\mu+1$ theilbar ist, das heifst, wenn

$$\frac{2n+2r+1}{2\mu+1}=p$$

ist, wo p eine ganze Zahl bedeutet. Dieses giebt

$$n+r=\frac{p(2\mu+1)-1}{2}.$$

Da $2\mu+1$ ungrade ist, so mufs p ungrade sein. Denn wäre p grade, so würde $p(2\mu+1)-1$ ungrade und folglich durch 2 nicht theilbar sein. Für $\sin(2n+2r+1)m\pi=0$ ist

$$\cos(2n+2r+1)m\pi=\cos p\nu\pi,$$

und weil p ungrade sein mufs, so giebt es nur einen Werth $+1$ von $\cos p\nu\pi$, wenn ν ungrade, und zwei Werthe $+1$ und -1, wenn ν grade ist. Die reellen Werthe von $(2\cos x)^m$ werden also

$$(2\cos x)^m=\pm\Big[\cos m(x-2r\pi)+m_1\cos(m-2)(x-2r\pi)$$
$$+m_2\cos(m-4)(x-2r\pi)\ldots\ldots\Big]$$

sein. Sie finden beide Statt, wenn ν grade und nur einer wenn ν ungrade ist.

β. Imaginaire Werthe von $(2\cos x)^m$.

a. Wenn $\cos x$ positiv ist.

Die Bedingung der Existenz solcher Werthe, nämlich die Gleichung

$$\cos 2m(n+1)\pi=\cos\frac{2(n+r)\nu}{2m+1}\pi=0$$

erfordert, dafs

$$\frac{2(n+r)\nu}{2\mu+1}=2p\pm\tfrac{1}{2}$$

ist, wo p eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Dieses giebt $4(n+r)\nu=(4p\pm1)(2\mu+1)$, oder

$$n+r=\frac{(4p\pm1)(2\mu+1)}{4\nu}.$$

Aber dieser Werth von $n+r$ kann nie, wie es sein mufs, eine ganze Zahl sein; denn die Zahlen $4p\pm1$ und $2\mu+1$ sind beide ungrade, also ist der Zähler von $m+r$ ungrade und folglich durch 4ν nicht theilbar.

Mithin giebt es in dem gegenwärtigen Falle keinen imaginairen Werth von $(2\cos x)^m$.

b. Wenn

b. Wenn *cos* x negativ ist.

Die Bedingung der Existenz imaginairer Werthe von $(2\cos x)^m$, nämlich die Gleichung

$$\cos(2n+2r+1)m\pi = \cos\frac{(2n+2r+1)\nu}{2\mu+1}\pi = 0$$

erfordert, daſs

$$\frac{(2n+2r+1)\nu}{2\mu+1} = 2p+\tfrac{1}{2},$$

wenn p eine beliebige ganze Zahl ist. Dieses giebt

$$2\nu(2n+2r+1) = (4p\pm 1)(2\mu+1),$$

oder $$n+r = \frac{(4p\pm 1)(2\mu+1)-2\nu}{4\nu}.$$

Dieser Werth von $n+r$ kann aber niemals eine ganze Zahl sein; denn $4p\pm 1$ und $2\mu+1$ sind beides ungrade Zahlen, und 2ν ist grade. Also ist der Zähler von $n+r$ ungrade und folglich durch den graden Nenner 4ν nicht theilbar.

Mithin existiren in dem gegenwärtigen Falle keine imaginairen Werthe von $(2\cos x)^m$.

III. *Es sei* m *irrational oder imaginair.*

In diesem Falle können die Producte

$$2m(n+r) \text{ und } (2n+2r+1)m,$$

für einen andern Werth von r als Null, niemals weder ganze Zahlen, noch ungrade Zahlen durch 2 dividirt, sein. Allgemein also können die Bedingungen (51. und 52.) nicht erfüllt werden, und folglich giebt es in dem gegenwärtigen Falle, allgemein, weder ganz reelle noch ganz imaginaire Werthe von $(2\cos x)^m$.

Ist $r=0$, so existirt für $n=0$ ein einzelner reeller Werth von $(2\cos x)^m$, in so fern *cos* x positiv ist. Er ist

$$(2\cos x)^m = +\left[\cos mx + m_1\cos(m-2)x + m_2\cos(m-4)x \ldots\ldots\right].$$

11.

Auf diese Weise wäre die Aufgabe vollständig aufgelöset.

Die Gleichung

$$\sin mx_1 + m_1\sin(m-2)x_1 + m_2\sin(m-4)x_1 \ldots\ldots = 0 \quad (38),$$

welche eines von den Resultaten war, verdient eine besondere Aufmerksamkeit.

Diese Gleichung ist es wesentlich, aus welcher die Differenzen der verschiedenen Untersuchungen der Aufgabe entstehen. In der That fällt es beim ersten Anblick auf, dafs die Gleichung eine wechselseitige Abhängigkeit der beiden Gröfsen m und x von einander auszudrücken scheint. Aber da eine solche Abhängigkeit nicht Statt findet, so folgt, dafs die Gleichung identisch ist. Sie ist dieses bekanntlich für ein ganzzahliges m. Sie mufs es also allgemein sein.

Die Gleichung läfst sich auch noch auf folgende Art beweisen.

Es ist

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Dieses giebt, wenn man der Reihe nach mx, $(m-2)x$, $(m-4)x$, etc. statt x schreibt,

53. $\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x \ldots\ldots\ldots$

$$\begin{aligned} = \; & e^{imx} - e^{-imx} \\ & + m_1(e^{i(m-2)x} - e^{-i(m-2)x}) \\ & + m_2(e^{i(m-4)x} - e^{-i(m-4)x}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$= \left.\begin{array}{l} + e^{imx}(1 + m_1 e^{-2ix} + m_2 e^{-4ix} \ldots\ldots\ldots) \\ - e^{-imx}(1 + m_1 e^{+2ix} + m_2 e^{+4ix} \ldots\ldots\ldots) \end{array}\right\} : 2i$$

$$= \frac{e^{imx}(1 + e^{-2ix})^m - e^{-imx}(1 + e^{+2ix})^m}{2i}$$

$$= \frac{(e^{+ix} + e^{-ix})^m - (e^{-ix} + e^{+ix})^m}{2i}.$$

Nun ist

$$e^{+ix} + e^{-ix} = 2\cos x,$$

also

54. $(e^{+ix} + e^{-ix})^m = (2\cos x)^m = |2\cos x|^m (\pm 1)^m$

$$= |2\cos x|^m . \left\{\begin{array}{l} \cos 2mn\pi + i\sin 2mn\pi \\ \cos(2n+1)m\pi + i\sin(2n+1)m\pi, \end{array}\right.$$

und wenn man $-i$ statt $+i$ schreibt,

55. $(e^{-ix} + e^{+ix})^m + |2\cos x|^m . \left\{\begin{array}{l} \cos 2mn\pi - i\sin 2mn\pi \\ \cos(2n+1)m\pi - i\sin(2n+1)\pi; \end{array}\right.$

also, wenn man (28 und 29) in (27) substituirt,

$\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x \ldots\ldots\ldots$

$= \begin{cases} 56.\ |2\cos x|^m \sin 2mn\pi, \text{ für einen positiven Cosinus, und} \\ 57.\ |2\cos x|^m \sin(2n+1)m\pi, \text{ für einen negativen Cosinus.} \end{cases}$

Dieser Ausdruck hat rechterhand n verschiedene Werthe für ein und dasselbe x, und es ist klar, dafs die Verschiedenheit der Werthe von n nur von der Verschiedenheit der Zahl der Quadranten herkommen kann, in welche x fällt. Ein und derselbe Werth von n wird allen x, die zwischen zwei Zeichenwechseln des Cosinus liegen, gleichmäfsig zukommen. Man fange z. B. die x von $-\frac{1}{2}\pi$ an, so wird der Ausdruck (56.) für alle x, von $x=-\frac{1}{2}\pi$ bis $x=+\frac{1}{2}\pi$ passen, weil die Cosinus aller dieser x positiv sind. Die Zahl n wird irgend einen Werth haben, welcher der nämliche bleibt für alle jene x. Dieser Werth von n kann sich deshalb nicht verändern, weil solches nur sprungweise geschehen würde, die x aber stetig auf einander folgen. Ist nun aber x bis zu $+\frac{1}{2}\pi$ gekommen, so ändert der Cosinus plötzlich sein Zeichen; also kann dann auch n seinen Werth ändern. Es mufs ihn sogar ändern, weil von $x=+\frac{1}{2}\pi$ an, der Ausdruck (56.) nicht mehr, nämlich nicht für Bogen pafst, die gröfser sind als $+\frac{1}{2}\pi$, indem die Cosinus solcher Bogen nicht mehr positiv, sondern negativ sind. Für sie pafst nunmehr der Ausdruck (57.), welcher von $x=\frac{1}{2}\pi$ bis $x=\frac{3}{2}\pi$ gilt, und wie man sieht, hat nun $2n$ um eine Einheit zugenommen. Eine solche Veränderung findet von neuem Statt, wenn x bis nach $\frac{3}{2}\pi$ gelangt ist; und so weiter.

Verschiedene Werthe von n können also nur verschiedenen Abtheilungen des Umfanges, und jeder Abtheilung kann nur ein und derselbe Werth von n zukommen.

Daraus lassen sich leicht die Werthe von n finden, welche einer gegebenen Abtheilung des Umfanges zugehören. Es sei z. B.: $x=0$, so ist offenbar

$$\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x \ldots\ldots\ldots$$

gleich Null. Aber wenn $x=0$, so ist $[\cos x]^m = +1$, also giebt alsdann die Gleichung (55.);

$$0 = \sin 2mn\pi.$$

Aber der nämliche Werth von n, welcher $x=0$ angehört, kommt auch, wie vorhin bemerkt, allen andern x zu, von $x=-\frac{1}{2}\pi$ bis $x=+\frac{1}{2}\pi$. Also ist für alle diese x ebenfalls $\sin 2mn\pi = 0$, folglich, vermöge der Gleichung (56.)

$$\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(n-4)x \ldots\ldots\ldots = 0,$$

für alle x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$; welches zu beweisen war.

12.

Die Gleichung

$$\sin mx_1 + m_1 \text{ sis } (m-2)\, x_1 + m_2 \sin (m-4)\, x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

entwickelt, giebt

$$o = \sin mx_1 + m_1 \sin mx_1 \cos 2x_1 + m_2 \sin mx_1 \cos 4x_1 \ldots\ldots\ldots$$
$$- m_1 \cos mx_1 \sin 2x_1 - m_2 \cos mx_1 \sin 4x_1 \ldots\ldots\ldots$$

oder

$$58.\quad 0 = \sin mx_1\, (1 + m_1 \cos 2x_1 + m_2 \cos 4x_1 \ldots\ldots\ldots)$$
$$- \cos mx_1\, (\quad m_1 \sin 2x_1 + m_2 \sin 4x_1 \ldots\ldots\ldots),$$

woraus

$$59.\quad \tang mx_1 = \frac{m_1 \sin 2x_1 + m_2 \sin 4x_1 + m_3 \sin 6x_1 \ldots\ldots\ldots}{1 + m_1 \cos 2x_1 + m_2 \cos 4x_1 + m_3 \cos 6x_1 \ldots\ldots\ldots}$$

folgt. Diese Gleichung wird also für alle x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ und für jedes beliebige m Statt finden.

Es sei z. B.: $x = \frac{1}{2}\pi$, so ist

$$\sin (m-2)x_1 = \sin (\tfrac{1}{2}m\pi - \pi) = - \sin \tfrac{1}{2}m\pi$$
$$\sin (m-4)x_1 = \sin (\tfrac{1}{2}m\pi - 2\pi) = + \sin \tfrac{1}{2}m\pi$$
$$\sin (m-6)x_1 = \sin (\tfrac{1}{2}m\pi - 3\pi) = - \sin \tfrac{1}{2}m\pi$$

etc., also

$$\sin mx_1 + m_1 \sin (m-2)\, x_1 + m_2 \sin (m-4)\, x_1 \ldots\ldots\ldots$$
$$= \sin \tfrac{1}{2}m\pi\, (1 - m_1 + m_2 - m_3 + m_4 - \ldots\ldots\ldots)$$
$$= \sin \tfrac{1}{2}m\pi\, (1-1)^m$$

welches, wenn m positiv, Null ist; wie gehörig.

Es sei $x_1 = \frac{1}{4}\pi$, so ist

$$\sin 2x_1 = 1,\ \sin 4x_1 = 0,\quad \sin 6x_1 = -1,\ \sin 8x_1 = 0 \text{ etc.}$$
$$\cos 2x_1 = 0,\ \cos 4x_1 = -1,\ \cos 6x_1 = 0,\quad \cos 8x_1 = +1 \text{ etc.}$$

also zufolge des Ausdrucks (59.)

$$60.\quad \tang \tfrac{1}{4}m\pi = \frac{m_1 - m_3 + m_5 - m_7 + \ldots\ldots\ldots\ldots}{1 - m_2 + m_4 - m_6 + \ldots\ldots\ldots\ldots}.$$

Es lassen sich aus dem Ausdrucke (44.) noch mehrere interessante Sätze herleiten.

4.

Untersuchung der Wirkung einer Kraft auf drei Puncte.

(Vom Herrn Bau-Conducteur *Kossack.*)

Aufgabe. Eine feste unbiegsame horizontale Ebene ruhe auf den drei Puncten A, B, C (Fig. 11.) und sei in G mit dem Gewicht P belastet: man sucht den Druck auf die Unterstützungspuncte.

Auflösung. Die Lage sämmtlicher Stücke sei gegeben durch die graden Linien $GA = a$, $GB = b$, $GC = c$ und durch die Winkel $AGB = \alpha$, $AGC = \beta$. Setzt man nun den Druck auf $A = Q$, den Druck auf $B = Q'$ und den Druck auf $C = Q''$, so hat man, da die Pressungen Q, Q', Q'' als Kräfte angesehen werden können, welche mit der Last P im Gleichgewicht stehen,

$$P = Q + Q' + Q'';$$

und in Beziehung auf AG, als Momentenachse,

$$Q'b \sin \alpha = Q''c \sin \beta,$$

hingegen in Beziehung auf BG, als Momentenachse,

$$Q'a \sin \alpha = - Q''c \sin (\alpha + \beta).$$

Aus diesen Gleichungen erhält man für die drei unbekannten Gröfsen folgende Ausdrücke:

$$Q = \frac{- bc \sin (\alpha + \beta)}{- bc \sin (\alpha + \beta) + ac \sin \beta + ab \sin \alpha} . P,$$

$$Q' = \frac{ac \sin \beta}{- bc \sin (\alpha + \beta) + ac \sin \beta + ab \sin \alpha} . P,$$

$$Q'' = \frac{ab \sin \alpha}{- bc \sin (\alpha + \beta) + ac \sin \beta + ab \sin \alpha} . P.$$

Für $\beta = \alpha$ folgt, wenn man zuvor Zähler und Nenner mit $\sin \alpha$ dividirt,

$$Q = \frac{- 2bc \cos \alpha}{- 2bc \cos \alpha + ac + ab} . P,$$

$$Q' = \frac{ac}{- 2bc \cos \alpha + ac + ab} . P,$$

$$Q'' = \frac{ab}{- 2bc \cos \alpha + ac + ab} . P.$$

Für $\alpha = 180°$, oder für den Fall, dafs die drei Unterstützungspuncte in einer graden Linie liegen, ergiebt sich:

$$Q = \frac{2bc}{2bc + ac + ab} . P, \quad Q' = \frac{ac}{2bc + ac + ab} . P, \quad Q'' = \frac{ab}{2bc + ac + ab} . P.$$

5.

Einige geometrische Sätze.

(Von Herrn *Steiner*.)

1.

Folgender Satz ist bekannt:

„Wenn die drei graden Linien Aa, Bb, Cc (Fig. 1.), welche die Ecken zweier in einerlei Ebene liegenden Dreiecke ABC, abc paarweise verbinden, sich in einem und demselben Punct S treffen, so liegen die drei Schneidepuncte $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, in welchen die entsprechenden Seiten AB und ab, BC und bc CA, und ca sich paarweise kreutzen, in einer graden Linie." Und umgekehrt:

„Liegen die Schneidepuncte $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, in welchen die Seiten zweier in einerlei Ebene liegenden Dreiecke ABC, abc sich paarweise kreutzen, in einer graden Linie; so treffen sich die drei graden Linien Aa, Bb, Cc, welche die entsprechenden Eckpuncte der beiden Dreiecke paarweise verbinden, in einem und demselben Puncte S."

2.

Es findet ein analoger Satz im Raume Statt, aus welchem sich verschiedene interessante Folgerungen ziehen lassen, nämlich folgender Satz:

„Treffen die vier graden Linien Aa, Bb, Cc, Dd (Fig. 2.), welche die Ecken zweier beliebigen viereckigen Körper $ABCD$, $abcd$ paarweise verbinden, sich in einem und demselben Puncte S: so liegen die vier Linien, in welchen sich die entsprechenden Seitenflächen der beiden Körper paarweise schneiden, oder die sechs Puncte $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$, in welchen sich die entsprechenden Kanten (AB und ab, AC und ac, AD und ad, BC und bc, BD und bd, CD und cd) schneiden, in einer und derselben Ebene (E)." Und umgekehrt:

„Liegen die vier graden Linien, in welchen sich die Seitenflächen irgend zweier viereckiger Körper paarweise schneiden, zusammen in einerlei Ebene (E): so treffen sich die vier graden Linien Aa, Bb, Cc, Dd, welche die entsprechenden (d. h. die den gepaarten Seitenflächen gegenüber stehenden) Ecken der Körper paarweise verbinden, in einem und demselben Puncte S."

Denn im ersten Falle dieses Satzes folgt aus der Voraussetzung: dafs die Ecken der beiden Körper paarweise mit dem Puncte S in graden Linien liegen, unmittelbar, dafs jede zwei entsprechende Kanten der beiden gegebenen Körper mit dem Puncte S in einer Ebene liegen. So liegen z. B. die beiden Kanten AB, ab offenbar in der Ebene ASB. Daher treffen zwei solche Kanten sich in einem Puncte $\alpha\beta$, und mithin schneiden sich die entsprechenden Kanten der beiden Körper in den sechs Puncten $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$. In je zwei entsprechenden Seitenflächen (z. B. ABC, abc) liegen drei Paare entsprechender Kanten (AB und ab, BC und bc, CA und ca); daher liegen die drei Durchschnittspuncte ($\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$) dieser drei Kantenpaare nothwendig in der Durchschnittslinie der beiden Seitenflächen, mithin in einer graden Linie. Da es aber vier Paare entsprechender Seitenflächen giebt; so liegen von den sechs Durchschnittspuncten der sechs Paare entsprechender Kanten, vier mal drei in einer graden Linie, woraus folgt, dafs diese sechs Puncte zusammen in einer und derselben Ebene (E) liegen.

Der Beweis für den zweiten Fall des obigen Satzes ergiebt sich hieraus von selbst. Ferner ist leicht zu sehen, dafs der Beweis des Satzes Nr. 1. unmittelbar aus dem vorliegenden folgt, wenn man annimmt: die Seitenflächen ABC und abc der beiden Körper liegen in einerlei Ebene.

3.

Da die Ebene (E), in welcher die sechs Schneidepuncte der sechs Paare entsprechender Kanten, oder der vier Durchschnittslinien der vier Paare entsprechender Seitenflächen der beiden Körper liegen, durch die Durchschnittslinie ($\beta\gamma\delta$) der beiden Seitenflächen BCD, bcd und durch den Durchschnittspunct ($\alpha\beta$) der beiden Kanten AB, ab bestimmt ist, so behält sie, in Bezug auf die beiden Körper, dieselbe Eigenschaft, wenn auch die übrigen Eckpuncte D, C, d, c, ohne aus den zugehörigen Ebenen BCD, bcd herauszutreten, und ohne aufzuhören paarweise mit dem Puncte S in graden Linien (SdD, ScC) zu liegen, ihre Lage beliebig ändern. Daraus folgt Nachstehendes:

„Sind irgend zwei Ebenen BCD, bcd und drei beliebige Puncte S, a, A, die in einer graden Linie liegen, gegeben, und man zieht aus einem der drei Puncte, z. E. aus S, eine willkürliche Linie SdD, welche die beiden Ebenen in den Puncten d und D schneidet, und verbindet diese beiden Puncte d und D mit den beiden übrigen gegebenen Puncten a, A durch die Linien da, DA: so ist der Ort des Durchschnittspuncts ($\alpha\delta$) dieser beiden Linien eine bestimmte

Ebene (E), welche durch die Durchschnittslinie $(\beta\gamma\delta)$ der beiden gegebenen Ebenen geht." Und umgekehrt:

„Sind drei beliebige Ebenen BCD, bcd und (E), die sich in einer graden Linie $(\beta\gamma\delta)$ schneiden, nebst zwei beliebigen Puncten A, a gegeben, und man zieht aus einem willkürlichen Puncte $(\alpha\delta)$ der einen Ebene (E), durch die beiden gegebenen Puncte zwei Linien, welche die beiden übrigen Ebenen in den Puncten D, d schneiden, so liegen diese beiden Puncte D, d immer mit einem und demselben Puncte S in einer graden Linie, und es liegt dieser Punct S zugleich mit den beiden gegebenen Puncten A, a in einer graden Linie; oder:

„Nimmt man in der Ebene (E) eine willkürliche Linie $(\alpha\gamma\delta)$ an, legt durch diseelbe und durch die beiden gegebenen Puncte (A, a) zwei Ebenen, welche die beiden übrigen gegebenen Ebenen BCD, bcd, in den Linien DC, dc schneiden: so liegen diese beiden Durchschnittslinien in einer Ebene, und diese Ebene geht immer durch einen bestimmten Punct S, welcher mit den beiden gegebenen Puncten (A, a) in einer graden Linie liegt."

4.

Hieraus folgt weiter, dafs der obige Satz Nr. 2. noch allgemeiner Statt findet, nämlich, dafs er nicht blos für zwei viereckige Körper, sondern für jede zwei vielseitige Pyramiden gilt; welches folgenden Satz giebt:

„Treffen die graden Linien, welche die Eckpuncte zweier beliebigen $n$seitigen Pyramiden paarweise verbinden, in einem und demselben Puncte S zusammen: so liegen die Durchschnittslinien der entsprechenden Seitenflächen der beiden Körper, so wie auch die Durhschnittspuncte der entsprechenden Kanten, (diese Durchschnittspuncte liegen in jenen Durchschnittslinien) zusammen in einer und derselben Ebene." Und umgekehrt:

„Liegen die Durchschnittslinien, in welchen die Seitenflächen zweier $n$seitigen Pyramiden, paarweise genommen, einander schneiden, oder liegen die Durchschnittspuncte, in welchen die paarweise genommenen Kanten zweier $n$seitigen Pyramiden einander schneiden, zusammen in einer und derselben Ebene: so treffen sich die graden Linien, welche die entsprechenden Ecken der beiden Körper paarweise verbinden, in einem und demselben Puncte S."

5.

Man kann die obigen Sätze auch mit andern Worten wie folgt ausdrücken:

„Sind A, a die Scheitel zweier beliebigen gegebenen Kegel (vom $n$ten Grade), deren Grundflächen in den Ebenen BCD, bcd liegen, und liegen die beiden Grundflächen aufserdem in einem Kegel, dessen Scheitel S mit den Scheiteln

teln A, a der gegebenen Kegel in einer graden Linie liegt: so schneiden sich die beiden gegebenen Kegel (über ihre Grundflächen hinaus verlängert, wenn es erforderlich ist) in einer ebenen Curve, deren Ebene (E) durch die Durchschnittslinie ($\beta\gamma\delta$) der Grundflächen der beiden gegebenen Kegel geht." Oder was dasselbe ist:

„Liegen die Scheitel S, a, A dreier Kegel ($n$ten Grades) in einer graden Linie SaA, und es schneiden irgend zwei dieser Kegel den dritten in zwei ebenen Curven: so schneiden auch diese beiden Kegel einander in einer ebenen Curve, und die Ebenen dieser drei Durchschnitts-Curven schneiden sich zusammen in einer und derselben geraden Linie." Und umgekehrt:

„Schneiden sich die Mantelflächen irgend zweier gegebenen Kegel ($n$ten Grades) in einer ebenen Curve, deren Ebene zugleich durch die Durchschnittslinie der beiden Grundflächen der Kegel geht: so liegen die beiden Grundflächen der gegebenen Kegel zusammen in einem dritten Kegel, dessen Scheitel mit den Scheiteln der beiden gegebenen Kegel in einer graden Linie liegt." Oder was auf dasselbe hinauskommt:

„Schneiden irgend zwei gegebene Kegel (A, a,) einander in einer ebenen Curve, und man nimmt in der Ebene (E) dieser Curve eine willkürliche Linie ($\beta\gamma\delta$) an, legt durch diese Linie zwei willkürliche Ebenen, welche die gegebenen Kegel respective in zwei ebenen Curven schneiden: so liegen diese beiden letzten Curven immer zusammen in einem Kegel, dessen Scheitel S stets in der graden Linie (Aa) liegt, welche durch die Scheitel der beiden gegebenen Kegel geht."

6.

Da man einen Zylinder als einen Kegel ansehen kann, dessen Scheitel in unendlicher Entfernung liegt, so gelten die obigen Sätze in gleichem Sinne auch für Zylinder und lauten in diesem speziellen Falle wie folgt:

„Sind die Kanten dreier gegebenen Zylinder ($n$ten Grades) mit einer Ebene parallel, und schneidet von je zweien jeder den dritten in einer ebenen Curve: so schneiden sich auch diese beiden Zylinder in einer ebenen Curve, und es schneiden sich die Ebenen dieser drei genannten Curven in einer und derselben graden Linie." Und umgekehrt:

„Schneiden zwei beliebige Zylinder ($n$ten Grades) einander in einer ebenen Curve, und man nimmt in der Ebene (E) dieser Curve eine willkürliche Linie ($\beta\gamma\delta$) an, und legt durch diese Linie zwei willkürliche Ebenen, welche die gegebenen Zylinder respective in zwei ebenen Curven schneiden: so liegen

diese beiden letztgenannten Curven zusammen in einem dritten Zylinder und die Kanten desselben, nebst den Kanten der beiden gegebenen Zylinder, sind stets mit einer und derselben Ebene parallel."

7.

Ein anderer besonderer Fall ist derjenige, wo man die vorhin betrachteten Kegel auf den zweiten Grad beschränkt. In diesem Falle findet Folgendes Statt:

I. „Berührt von zwei Kegeln vom zweiten Grade jeder beide Flächen eines und desselben Flächenwinkels: so schneiden diese beiden Kegel einander in zwei ebenen Curven (zweiten Grades)."

Denn man stelle sich zwei Kegel A, a und zwei Ebenen E, e, von denen jede jene beiden Kegel berührt, vor: so berührt z. B. die Ebene E jeden der beiden Kegel A, a in einer graden Linie; und in dem Puncte P, in welchem diese beiden Linien sich schneiden, berührt sie beide Kegel zugleich: eben so berührt die andere Ebene e beide Kegel zugleich, in einem Puncte p. Man denke sich ferner durch diese beiden Puncte P, p und durch irgend einen Punct q, welcher im Durchschnitte der beiden Kegelflächen liegt, eine Ebene E_1 gelegt: so wird diese Ebene E_1 von den beiden Kegelflächen A, a in zwei Curven zweiten Grades C, c, und von den beiden Ebenen E, e in zwei graden Linien L, l geschnitten, und es berührt nothwendig die Linie L beide Curven C, c zugleich, in dem Puncte P, so wie die Linie l dieselben zugleich in dem Puncte p berührt, und nothwendiger Weise gehen auch beide Curven C, c durch den Punct q. Da es aber bekanntlich unmöglich ist, dafs zwei Curven vom zweiten Grade C, c, einander in zwei Puncten P, p berühren und aufserdem noch in einem Puncte q schneiden, so folgt, dafs die beiden vorausgesetzten Curven C, c ein und dieselbe Curve sind, in welcher die beiden Kegelflächen A, a sich schneiden.

Da aber, wie sich aus der Anschauung ergiebt, der Durchschnitt der beiden Kegelflächen aus zwei Theilen besteht, so ist jeder derselben eine ebene Curve, und daher schneiden sich die beiden Kegel A, a, unter den vorausgesetzten Bedingungen, in zwei ebenen Curven zweiten Grades.

Aus dem vorliegendem Satze folgt unmittelbar der nachstehende:

II. „Wenn irgend zwei Kegel vom zweiten Grade einander in einer ebenen Curve C schneiden, so schneiden sie einander, im Allgemeinen, noch in einer zweiten ebenen Curve."

Denn wenn zwei Kegel vom zweiten Grade einander in einer ebenen Curve

C schneiden, so kann man im Allgemeinen durch die Linie, welche die Scheitel der Kegel verbindet, immer zwei Ebenen legen, von denen jede die genannte ebene Durchschnitts-Curve C, und somit beide Kegel berührt; woraus der Satz vermöge des vorigen folgt. Geht aber die Linie, welche die Scheitel der Kegel verbindet, durch den von der genannten Curve C eingeschlossenen Raum, so daſs keine Ebene beide Kegel zugleich berühren kann, so kann der vorliegende Satz, durch Hülfe der harmonischen Proportion, allgemein bewiesen werden; wovon im Zusammenhange mit andern ähnlichen Betrachtungen, an einem andern Orte.

Aus dem Obigen folgt, daſs wenn die in den Sätzen Nr. 5. vorkommenden drei Kegel vom zweiten Grade sind: so schneiden sie sich, unter den dortigen Bedingungen, paarweise in sechs ebenen Curven. Um weiter bei den Folgerungen aus diesen Sätzen der Einbildungskraft zu Hülfe zu kommen, nehme man an: Fig. 3. sei der Schnitt einer Ebene mit drei Kegeln vom zweiten Grade, deren Scheitel in einer graden Linie liegen und welche einander in sechs ebenen Curven schneiden: nämlich S, a, A seien die Scheitel, und die drei Winkel BSE, $\beta a \delta$, $\beta A \varepsilon$ seien die Durchschnitte der Ebene mit den drei Kegeln; so gehen die Ebenen der beiden Curven, in welchen die beiden Kegel S und a einander schneiden, durch die beiden Linien bc und de; eben so gehen die Ebenen der beiden Curven, in welchen sich die beiden Kegel S und A schneiden, durch die beiden Linien BC und DE; desgleichen gehen die Ebenen der beiden Curven, in welchen sich die Kegel a und A schneiden, durch die Linien $\beta\gamma$ und $\delta\varepsilon$.

Nun schneiden sich, zufolge des obigen Satzes (Nr. 5.), die drei Ebenen bc, BC und $\beta\gamma$ (d. h. die oben genannten Ebenen, welche respective durch die in der Figur verzeichneten Linien bc, BC und $\beta\gamma$ gehen) in einer Linie L_1 (welche die Ebene der Figur in dem Puncte L_1 schneidet); nach demselben Satze schneiden ferner auch die drei Ebenen bc, DE und $\varepsilon\delta$ einander in einer Linie L_2, desgleichen die drei Ebenen de, BC und $\delta\varepsilon$ in einer graden Linie L_3, und eben so schneiden die drei Ebenen ed, ED und $\beta\gamma$ einander in einer graden Linie L_4.

Bemerkt man ferner, daſs, wenn z. B. die beiden Linien L_1, L_2, welche in einerlei Ebene bc liegen, sich in einem Puncte P treffen, alsdann nothwendig die fünf Ebenen bc, BC, DE, $\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$ durch diesen nämlichen Punct P gehen, und daſs daher nothwendig auch die sechste Ebene de, so wie auch die beiden übrigen Linien L_3, L_4 durch denselben Punct P gehen: so folgt, daſs

die sechs Ebenen bc, de, BC, DE, $\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$, so wie auch die vier Linien L_1, L_2, L_3, L_4 im Allgemeinen immer in einem und demselben Puncte P zusammentreffen, und nur in dem besondern Falle, wo dieser Punct sich ins Unendliche entfernt, mit einer und derselben graden Linie parallel sind.

Aus allen diesem zusammengenommen zieht man folgenden Satz *):

III. „Liegen die Scheitel S, a, A dreier gegebenen Kegel BSE, $\beta a\delta$, $\beta A\varepsilon$ vom zweiten Grade, welche einander in ebenen Curven schneiden, in einer graden Linie SaA: so schneiden sich von den sechs Ebenen (bc, de, BC, DE, $\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$) der sechs Durchschnitts-Curven, vier mal drei in einer graden Linie (L_1, L_2, L_3, L_4), und alle sechs Ebenen, so wie auch diese vier Linien L_1, L_2, L_3, L_4, schneiden einander, zusammen in einem und demselben Puncte P (oder sind zusammen mit einer und derselben graden Ltnie parallel)."

8.

Die in (Nr. 7.) enthaltenen Sätze über die Kegel vom zweiten Grade, sind nur spezielle Fälle von folgenden allgemeinern Sätzen über die Flächen vom zweiten Grade überhaupt, welche wir ohne Beweis hinzufügen und welche an einem andern Orte, durch eben so einfache geometrische Betrachtungen bewiesen werden sollen.

I. „Wenn zwei beliebige Flächen zweiten Grades einander in einer ebenen Curve schneiden: so schneiden sie sich im Allgemeinen noch in einer zweiten ebenen Curve." (II. Satz Nr. 7.)

II. „Alle grade Linien aus einem Puncte S, welche eine gegebene Fläche vom zweiten Grade berühren, liegen in einer Kegelfläche zweiten Grades, und alle zusammen berühren die gegebene Fläche in einer ebenen Curve vom zweiten Grade."

Oder mit andern Worten:

„Legt man an eine gegebene Fläche zweiten Grades, aus einem aufserhalb, beliebig angenommenen Puncte S, einen Berührungskegel, so ist dieser Kegel vom zweiten Grade, und berührt die gegebene Fläche in einer ebenen Curve vom zweiten Grade."

*) In Bezug auf die Durchschnittsfigur folgenden Satz:

„Liegen die Scheitel S, a, A dreier gradliniger Winkel BSE, $\beta a\delta$, $\beta A\varepsilon$, welche in einerlei Ebene liegen, in einer graden Linie SaA: so schneiden sich von den sechs Diagonalen bc, de, BC, DE, $\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$ der drei Vierecke $bdce$, $BDCE$, $\beta\delta\gamma\varepsilon$, welche jene Winkel paarweise mit einander bilden, vier mal drei in einem Puncte, nämlich in den vier Puncten L_1, L_2, L_3, L_4."

III. „Berühren zwei beliebige Flächen vom zweiten Grade einander in mehr als zwei Puncten: so berühren sie einander in einer ebenen Curve vom zweiten Grade."

IV. „Berühren zwei beliebige Flächen vom zweiten Grade, eine dritte solche Fläche in ebenen Curven: so schneiden sie sich in ebenen Curven."

Da zwei Ebenen zusammengenommen als eine Fläche vom zweiten Grade zu betrachten sind, so ist der erste Satz Nr. 7. ein spezieller Fall des gegenwärtigen. Ein anderer spezieller Fall ist folgender:

„Jede zwei Zylinder vom zweiten Grade, welche zugleich entweder zwischen oder aufserhalb zwei parallelen Ebenen liegen, (und also elliptische oder hyperbolische Zylinder sind) und diese Ebenen berühren, schneiden einander in zwei ebenen Curven vom zweiten Grade."

V. „Zwei beliebige ebene Curven, welche in einer und derselben Fläche zweiten Grades liegen, bestimmen zusammen zwei Kegel vom zweiten Grade, d. h., die beiden Curven liegen zugleich in zwei bestimmten Kegeln zweiten Grades." Oder mit andern Worten: „Bewegt man eine Ebene, welche zwei ebene Curven, die in einer und derselben Fläche zweiten Grades liegen, berührt, auf die Weise, dafs sie die beiden Curven immerfort berührt: so geht die Ebene immer durch einen bestimmten Punct *S*, und dieser Punct *S* ist der Scheitel eines Kegels (zweiten Grades), welcher durch die beiden genannten Curven geht, und welcher stets von der Ebene berührt wird." Da aber die Ebene auf zwei verschiedene Arten an die beiden Curven gelegt werden kann, so liegen die beiden Curven zugleich in zwei bestimmten Kegeln.

Insbesondere folgt hieraus:

„Macht man in irgend einem gegebenen Kegel zweiten Grades zwei beliebige ebene Schnitte: so liegen die beiden Durchschnitts-Curven zugleich in einem andern Kegel vom zweiten Grade."

Ferner kann aus dem obigen Satze der folgende abgeleitet werden:

„Legt man durch einen willkürlichen Punkt *P*, [in einer Fläche vom zweiten Grade] eine Berührungsebene (*E*), und ferner aus demselben Punct *P*, durch beliebige ebene Curven, welche in der Fläche liegen, Kegel: so schneidet jede Ebene, welche mit der genannten Berührungsebene (*E*) parallel ist, alle diese Kegel (sammt der gegebenen Fläche) in ähnlichen Curven zweiten Grades." Oder mit andern Worten:

„Projizirt man aus einem willkürlichen Puncte *P*, der in einer gegebenen Fläche vom zweiten Grade liegt, beliebige ebene Curven, welche in derselben

Fläche liegen, auf eine Ebene, welche mit der in dem Punct P an die Fläche gelegten Berührungsebene parallel ist: so sind die Projectionen sämmtlich ähnliche Curven vom zweiten Grade."

VI. „Wenn von drei beliebigen gegebenen Flächen zweiten Grades, je zwei einander in ebenen Curven schneiden: so schneiden sich von den sechs Ebenen dieser sechs Durchschnitts-Curven [je zwei Flächen schneiden einander in zwei Ebenen Curven (I.)], vier mal drei in einer graden Linie, und alle sechs Ebenen, oder diese vier graden Linien schneiden sich zusammen in einem und demselben Puncte P."

Der Beweis dieses Satzes folgt aus (V. und Nr. 7. III.).

Aus dem vorliegenden Satze kann leicht der folgende abgeleitet werden.

VII. „Wenn in einer Ebene irgend zwei beliebige Curven zweiten Grades gegeben sind, und man legt durch jede derselben eine willkürliche Fläche zweiten Grades, jedoch so, dafs die beiden Flächen einander in zwei ebenen Curven schneiden: so schneiden die Ebenen dieser beiden Durchschnitts-Curven die gegebene Ebene in zwei constanten Linien L, l."

Diese beiden Linien L, l haben in Bezug auf die beiden gegebenen Curven, eine der merkwürdigsten Eigenschaften zweier beliebigen Kegelschnitte in einerlei Ebene. Nimmt man nämlich in einer der beiden Linien L, l (z. B. Fig. 6.) einen willkürlichen Punct P an, legt aus diesem Punct an jede der beiden gegebenen Curven, zwei Tangenten, welche die Curven in den vier Puncten A, B und a, b berühren, verbindet ferner diese vier Puncte A, B, a, b paarweise durch sechs grade Linien, von denen sich Aa und Bb in einem Puncte S, Ab und Ba in einem Puncte T, und AB und ab in einem Puncte Q schneiden: so bleiben die Puncte S und T constant, wie auch der angenommene Punct P unter der festgesetzten Bedingung seine Lage ändert; dagegen ist der Ort des Puncts Q, dieselbe grade Linie L oder l, in welcher sich der Punct P befindet. Liegt der Punct P im Durchschnitt (D) der beiden Linien L, l: so liegen die vier Berührungspuncte A_1, B_1, a_1, b_1, der aus demselben an beide Curven gelegten Tangenten, in einer graden Linie, welche durch die beiden Puncte S und T geht; diese Eigenschaft kommt nur diesem Puncte D allein zu.

Ferner: Legt man die vier gemeinschaftlichen Tangenten an die beiden gegebenen Curven (d. h., diejenigen vier graden Linien, von welchen jede beide Curven zugleich berührt): so schneiden sich zwei derselben in dem genannten Puncte S und die beiden übrigen in dem Puncte T. Dadurch läfst sich auch

mit Hülfe der beiden Linien L, l, die meines Wissens noch nicht geometrisch gelösete Aufgabe:

„An zwei gegebene, in einerlei Ebene liegende Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Tangente zu legen," leicht auflösen.

Endlich ist zu bemerken, dafs, im Fall die gegebenen Curven einander in vier Puncten A, B, C, D schneiden, drei Systeme zweier zusammengehöriger Linien L, l vorhanden sind. Nämlich jede zwei von den sechs gemeinschaftlichen Sehnen der beiden Curven, welche zusammen durch alle vier Schneidepuncte A, B, C, D gehen (also AB und CD, AC und BD, AD und BC) sind ein solches Linien-Paar L, l.

VIII. „Der Ort des Scheitels eines graden Kegels vom zweiten Grade, welcher eine der Gröfse und Lage nach gegebene Fläche vom zweiten Grade in einer ebenen Curve berührt: ist eine ebene Curve vom zweiten Grade."

Ist z. B. die gegebene Fläche ein Ellipsoïd: so ist der Ort des Scheitels desjenigen graden Kegels, welcher diese Fläche in einer ebenen Curve berührt, eine Hyperbel. Diese Hyperbel hat folgende merkwürdige Beziehungen zu dem Ellipsoïd:

α. Die Hyperbel liegt in der Ebene (AC) der kleinsten (C) und gröfsten Axe (A) des Ellipsoïds; ihre Hauptaxe liegt in der gröfsten Axe (A) des Ellipsoïds, und ihr Mittelpunct fällt mit dem Mittelpunct des Ellipsoïds zusammen.

β. Die Axen der Hyperbel sind der Gröfse nach gleich den Excentricitäten derjenigen beiden Ellipsen, in welchen die beiden Ebenen der Axen (AB), (BC) das Ellipsoïd schneiden. Sind also a, b, c die halben Axen des Ellipsoïds, so ist die Gleichung der Hyperbel:

$$(a^2 - b^2)\, z^2 - (b^2 - c^2)\, x^2 = -(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)$$

wo die Coordinaten x, z respective mit den Axen A, C des Ellipsoïds parallel sind.

γ. Die Hyperbel schneidet die Oberfläche des Ellipsoïds, in denjenigen vier Puncten, in welchen diese Fläche von vier Ebenen berührt wird, die mit Ebenen parallel sind, welche das Ellipsoïd in Kreisen schneiden.

Eine andere merkwürdige Eigenschaft der vier Puncte, in welchen die Hyperbel die Oberfläche des Ellipsoïds schneidet, und welche Monge „*Ombilics*" nennt, wird von ihm bewiesen (*Application de l'Analyse à la Géométrie* §. XVI. *p.* 121.)

Ein gegebenes Ellipsoïd kann also nur von zwei graden Zylindern (zweiten Grades) in ebenen Curven berührt werden; die Axen dieser beiden Zylinder bilden die Asymptoten der genannten Hyperbel.

IX. Bekanntlich bestimmt jeder Kreis, in der Oberfläche einer Kugel, mit deren Mittelpunct zusammen, einen graden Kegel; und umgekehrt: jeder grade Kegel, dessen Scheitel im Mittelpuncte einer Kugel liegt, schneidet die Fläche der Kugel in zwei Kreisen. Dieser Satz findet aber nicht bei der Kugel allein, sondern allgemeiner, wie folgt, Statt.

„Bewegt sich irgend eine Curve vom zweiten Grade um ihre Hauptaxe (in welcher die Brennpuncte liegen), so beschreibt sie eine Fläche zweiten Grades, welche mit der beschreibenden Curve einerlei Brennpuncte hat, und jede beliebige ebene Curve, welche in dieser Fläche liegt, bestimmt mit jedem der beiden Brennpuncte einen graden Kegel. Umgekehrt: jeder grade Kegel, dessen Scheitel in einem der beiden Brennpuncte liegt, schneidet die genannte Fläche in zwei ebenen Curven."

Ist die erzeugende Curve eine Parabel, so ist einer ihrer Brennpuncte unendlich weit entfernt. Jede ebene Curve also, welche man in diesem Falle in der genannten Fläche annimmt, liegt in einem graden Zylinder (zweiten Grades), dessen Axe mit der Drehaxe parallel ist; und umgekehrt: jeder grade Zylinder zweiten Grades, dessen Axe mit der Drehaxe parallel ist, schneidet die genannte Fläche in einer ebenen Curve.

X. „Sind zwei Ebenen der Lage nach und ist in der einen eine Curve vom zweiten Grade der Lage und Gröfse nach gegeben: so ist der Ort des Scheitels desjenigen Kegels k vom zweiten Grade, welcher durch diese Curve geht, und dessen Schnitt mit der andern Ebene ein Kreis ist, eine ebene Curve vom zweiten Grade."

Ist z. B. die gegebene Curve eine Ellipse, so ist der Ort des Scheitels des genannten Kegels k eine Hyperbel; und umgekehrt: ist die gegebene Curve eine Hyperbel, so ist der Ort des Scheitels des Kegels k eine Ellipse; und ist endlich die gegebene Curve eine Parabel, so ist auch der Ort des Scheitels des Kegels k eine Parabel. Ferner:

„Die Mittelpuncte m, M.... der Kreise m, M.... (Fig. 4.) in welchen der genannte Kegel k die zweite Ebene schneidet, liegen immer in einer graden Linie AD, welche auf der Durchschnittslinie PD der beiden gegebenen Ebenen (ADP, EDP) senkrecht steht; und legt man aus irgend einem Puncte P der Durchschnittslinie PD, Tangenten Pn, PN an die Kreise m, M...., so sind alle diese Tangenten einander gleich, d. h. $Pn = PN = \ldots\ldots$"

„Legt man an die gegebene Curve (C) zwei Tangenten BB_1, bb_1, welche mit der Durchschnittslinie DP der beiden gegebenen Ebenen parallel sind: so bestim-

bestimmen die beiden Berührungspuncte B, b dieser Tangenten einen Durchmesser Bb, welcher mit der vorhin genannten Linie AD, in dem Puncte D zusammentrifft. Die genannte Curve, welche der Ort des Scheitels des Kegels k ist, liegt immer in der Ebene ADE und hat mit der gegebenen Curve (C) den Durchmesser Bb gemein.

XI. „Sind zwei Ebenen der Lage nach, und ist in der einen eine beliebige Curve (C) vom zweiten Grade, der Lage und Gröfse nach gegeben: so ist der Ort des Scheitels desjenigen Kegels (K), welcher durch diese Curve geht, und dessen Schnitt mit der andern Ebene eine gleichseitige Hyperbel ist, eine Fläche (F) vom zweiten Grade." Nämlich:

a) Ist die gegebene Curve C eine Ellipse: so ist die Fläche F die Oberfläche eines Ellipsoïds, welches mit der gegebenen Ellipse einerlei Mittelpunct hat.

b) Ist (C) eine Hyperbel, so ist (F) eine hyperbolische Fläche zweiten Grades, und zwar:

α) Wenn die Durchschnittslinie (PD) der beiden gegebenen Ebenen nur einen (oder gar keinen) Zweig der gegebenen Hyperbel (C) schneidet: so ist die Fläche (F) eine zweitheilige hyperbolische Fläche zweiten Grades (*hyperboloïde à deux nappes*).

β) Wenn die genannte Durchschnittslinie (PD) beide Zweige der gegebenen Hyperbel schneidet: so ist die Fläche (F) eine einfache hyperbolische Fläche zweiten Grades (*hyperboloïde à une nappe*).

c) Ist (C) eine Parabel, so ist (F) eine elliptisch-parabolische Fläche zweiten Grades (*paraboloïde elliptique*).

d) Sind (C) zwei sich schneidende grade Linien (welche zusammen als eine Hyperbel betrachtet werden können): so ist (F) eine Kegelfläche zweiten Grades.

e) Sind (C) zwei parallele grade Linien: so ist F die Fläche eines elliptischen Zylinders.

In den beiden letztern Fällen (d und e) treten aber an die Stelle der verlangten gleichseitigen Hyperbel, zwei sich rechtwinklig schneidende grade Linien, welche als eine gleichseitige Hyperbel betrachtet werden können.

Die so eben genannten Flächen zweiten Grades sind diejenigen, welche von einer Ebene in einem Kreise geschnitten werden können; und zwar wird in jedem der obigen Fälle die Fläche (F) von einer Ebene, welche mit der zweiten gegebenen Ebene (ADP) parallel ist, in einem Kreise geschnitten.

Es ist zu bemerken, daſs nicht jede Fläche zweiten Grades durch eine Ebene in einem Kreise geschnitten, oder wie man sagt, durch Bewegung eines (veränderlichen) Kreises erzeugt werden kann. Auſser dem hyperbolischen und parabolischen Kegel und dem Systeme zweier Ebenen ist hiervon die hyperbolisch-parabolische Fläche zweiten Grades (*paraboloïde hyperbolique*) ausgenommen. Biot: (*Essai de Géométrie analytique*, S. 271.) schlieſst diese Fläche nicht aus; und Monge: (*Application de l'Analyse à la Géométrie*) sagt S. 45. ausdrücklich, daſs die Fläche durch die Bewegung eines veränderlichen Kreises erzeugt werden könne. Das von uns behauptete Gegentheil läſst sich kürzlich wie folgt zeigen.

Die Gleichung der genannten Fläche (für rechtwinklige Coordinaten) ist bekanntlich

$$Pz^2 - py^2 = -pPx \dots\dots\dots\dots (A).$$

Wird die Fläche (A) von einer beliebigen Ebene, welche durch die Gleichung

$$x = ay + bz + c \dots\dots\dots\dots (B)$$

gegeben ist, geschnitten: so ist die Projection der Durchnitts-Curve auf die Ebene der (yz)

$$Pz^2 - py^2 = -pP(ay + bz + c) \dots\dots\dots (C),$$

welches, da z^2 und y^2 verschiedene Zeichen haben, die Gleichung der Hyperbel ist. Mithin ist auch die Durchschnitts-Curve selbst eine Hyperbel. Es ist klar, daſs die Curve (C) und also auch die Durchschnitts-Curve immer eine Hyperbel ist, wenn man in der Gleichung (B) der schneidenden Ebene entweder y oder z oder y und z gleich 0 setzt, d. h. wenn die schneidende Ebene (B) entweder mit y, oder mit z, oder mit y und z parallel ist. Nimmt man dagegen an, die schneidende Ebene sei mit x parallel, so daſs ihre Gleichung

$$ay + bz + c = 0 \dots\dots\dots\dots (D)$$

ist, so hat man für die Projection der Durchschnitts-Curve auf die Ebene der (xz)

$$Pz^2 - p\left(-\frac{bz + c}{a}\right)^2 = -pPx \dots\dots\dots\dots (E),$$

welches, wie man sieht, die Gleichung der Parabel ist; und mithin ist auch die Durchschnitts-Curve selbst eine Parabel.

Die Fläche (A) wird demnach von einer Ebene im Allgemeinen in einer Hyperbel (wozu auch zwei grade Linien gehören) geschnitten, und nur in dem besondern Falle, wenn die schneidende Ebene mit der Axe der x parallel ist, ist die Durchschnitts-Curve eine Parabel.

9.

Im vierzehnten Bande (Seite 280, 286.) der Annalen der Mathematik von Gergonne beweisen Querret und Sturm folgenden Satz:

„Wenn man aus irgend einem Puncte der Peripherie eines Kreises, welcher mit dem um ein gegebenes Dreieck beschriebenen Kreise konzentrisch ist, auf die Seiten des Dreiecks Lothe fället, so ist der Inhalt desjenigen Dreiecks, dessen Scheitel die Fuſspuncte dieser Lothe sind, constant."

Im funfzehnten Bande der Annalen wird Seite 45. von einem Abonnenten und Seite 250. von Sturm folgender Satz bewiesen:

„Fället man aus irgend einem Puncte der Peripherie eines Kreises, welcher mit einem gegebenen regelmäſsigen Polygon einerlei Mittelpunct hat, Lothe auf die Seiten dieses Polygons, so ist der Inhalt desjenigen Polygons, dessen Ecken in den Fuſspuncten dieser Lothe liegen, konstant."

Diesen Satz gab L'Huilier in der Bibliothèque universelle (Maerz 1824. p. 169.)

Die beiden Sätze sind aber nur spezielle Fälle des folgenden allgemeinern Satzes:

„Fället man aus irgend einem, in der Ebene eines beliebigen gegebenen Polygons $ABCDE$, Fig. 5., liegenden Puncte P, Lothe PA_1, PB_1, PC_1.... auf die Seiten des Polygons, verbindet die Fuſspuncte dieser Lothe der Reihe nach durch grade Linien, wodurch ein in das gegebene eingeschriebenes Polygon $A_1B_1C_1D_1E_1$ entsteht: so ist, im Fall der Inhalt dieses eingeschriebenen Polygons konstant bleiben soll, der Ort des Punctes P die Peripherie eines Kreises. Der Mittelpunct dieses Kreises ist von dem Inhalte des eingeschriebenen Polygons und von der Lage des ursprünglich angenommenen Punctes P unabhängig. Er ist, wenn man Kräfte annimmt, die in parallelen Richtungen auf die Ecken des gegebenen Polygons wirken, und sich verhalten wie die Sinusse der respectiven doppelten Winkel des gegebenen Polygons, der Mittelpunct (Schwerpunct) dieser Kräfte.

Beweis.

Man verbinde den Punct P mit den Eckpuncten des gegebenen Vierecks durch die graden Linien a, b, c, d, e, so ist z. B.

$$\left.\begin{aligned} PA_1 &= a\,.\sin\alpha \text{ und } PE_1 = a\,.\sin(A-\alpha)\ldots\ldots\ldots \\ AA_1 &= a\,.\cos\alpha \text{ und } AE_1 = a\,.\cos(A-\alpha)\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}\ (1)$$

Bezeichnet man den Inhalt des Dreiecks A_1PE_1 durch $\triangle$ und den Inhalt des Vierecks AA_1PE_1 durch $\square$, so hat man

$$2\triangle = PA_1 \times PE_1\,.\sin A_1PE_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

$$\square = \frac{AA_1 \times AE_1\,.\sin A}{2} + \frac{PA_1 \times PE_1}{2}\,.\sin A_1PE_1 \ldots . (3).$$

Substituirt man in diese Gleichungen die Werthe von PA_1, PE_1, AA_1, AE_1 aus (1), und bemerkt, dafs

$$\sin A = \sin A_1 PE_1,$$

weil die Winkel A und A_1PE_1 zusammen zwei Rechte betragen, und zieht alsdann die Gleichungen (2) und (3) von einander ab, so findet man

$$\begin{aligned} \square - 2\triangle &= \frac{a^2 . \sin A.}{2}\Big(\cos\alpha . \cos(A-\alpha) + \sin\alpha . \sin(A-\alpha) - 2\sin\alpha . \sin(A-\alpha)\Big) \\ &= \frac{a^2 . \sin A.}{2}\Big(\cos\alpha . \cos(A-\alpha) - \sin\alpha \sin(A-\alpha)\Big) \\ &= \frac{a^2 . \sin . A . \cos A}{2} \\ &= \frac{a^2 . \sin 2A}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{aligned}$$

Eine ähnliche Gleichung findet zwischen dem Viereck BB_1PA_1 und dem Dreieck B_1PA_1, zwischen dem Viereck CC_1PB_1 und dem zugehörigen Dreieck C_1PB_1, u. s. w. Statt. Die Summe aller Vierecke ist aber gleich dem Inhalte des gegebenen Vielecks $ABCDE$, und die Summe aller Dreiecke ist gleich dem Inhalte des eingeschriebenen Vielecks $A_1B_1C_1D_1E_1$; bezeichnet man daher den Inhalt des gegebenen Vielecks durch J und den Inhalt des eingeschriebenen Vielecks durch J_1, so hat man vermöge der Gleichung (4):

$$J - 2J_1 = \frac{a^2 \sin 2A + b^2 \sin 2B + c^2 \sin 2C + d^2 \sin 2D + e^2 \sin 2E}{4} \ldots (5).$$

Soll nun der Inhalt J_1 des eingeschriebenen Vielecks konstant seyn, so ist $J-2J_1$ eine konstante Gröfse, welche K sein mag, so dafs

$$a^2 \sin 2A + b^2 \sin 2B + c^2 \sin 2C + d^2 \sin 2D + e^2 \sin 2E = 4K \ldots (6).$$

In dieser Gleichung sind alle Gröfsen konstant, bis auf a, b, c, d, e, welche die Entfernungen des unbestimmten Puncts P von den gegebenen Puncten A, B, C, D, E ausdrücken. Es ist aber bekannt, dafs

„wenn in einer Ebene beliebige Puncte A, B, C, D. E .... gegeben sind und man nimmt in derselben Ebene einen willkürlichen Punct P an, zieht aus demselben grade Linien a, b, c, d, e nach jenen gegebenen Puncten, multiplicirt die Quadrate dieser Linien mit beliebigen Gröfsen α, β, γ, δ, ε, ..., und setzt die Summe dieser Producte konstant: dafs dann der Ort des angenommenen Puncts P die Peripherie eines Kreises ist, dessen Mittelpunct in dem gemeinschaftlichen Schwerpunct liegt, wenn man die Gröfsen α, β, γ, δ, ε als in den gegebenen Puncten A, B, C, D, E parallel wirkende Kräfte betrachtet."

Daher folgt nunmehr unmittelbar der obige allgemeine Lehrsatz. Dafs die beiden im Anfange angeführten Sätze spezielle Fälle des gegenwärtigen Satzes sind, ist leicht zu sehen. Berlin im November 1825.

6.

Ueber die Zerfällung einer ächt-gebrochenen Function in einfache Parzial-Brüche.

(Von Herrn Prof. *Dirksen.*)

1) Die Zerfällung einer ächt-gebrochenen Function in einfache Partial-Brüche ist durch das Bedürfniſs anderweitiger analytischer Theorien, und insonderheit durch das der Integral-Rechnung, zu einem Probleme von Wichtigkeit erhoben worden. Die erste Idee einer solchen Transformation gehört, meines Wissens, Leibnitz; die erste durchgreifende Behandlung derselben hingegen Euler; und es ist die Eulersche Methode, welche noch bis heute in den Lehrbüchern über Differenzial- und Integral-Rechnung zu diesem Behufe dargestellt wird. — Inzwischen scheint mir sowohl die Behandlung des Problems einer Bemerkung, als der für die Zerfällung ermittelte Algorithmus einer Modification fähig zu seyn, die beide nicht ganz unerheblich sein dürften.

2) Das allgemeinste Schema einer ächt-gebrochenen Function ist bekanntlich folgendes:

$$\frac{a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+a_{n-4}x^{n-4}+\ldots\, a_1 x+a_0}{A_n x^n+A_{n-1}x^{n-1}+A_{n-2}x^{n-2}+A_{n-3}x^{n-3}+A_{n-4}x^{n-4}+\ldots\, A_1 x+A_0}$$

wo n eine beliebige positive und ganze Zahl bedeutet, und die Coefficienten a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ... a_0; A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, ... A_0, als reelle, von x unabhängige, sowohl negative, als positive, gebrochene, als ganze Zahlen, 0 nicht ausgenommen, angesehen werden.

Es darf hier aus der Theorie der algebraischen Gleichungen als bekannt angenommen werden, daſs der Nenner eines solchen Bruches, durch den Coefficienten desjenigen Gliedes dividirt, welches x zur höchsten Potenz enthält, als ein Product von n einfachen Factoren von der Form

$$x-\alpha_1,\; x-\alpha_2,\; x-\alpha_3,\; x-\alpha_4\; \ldots\ldots\ldots\; x-\alpha_n$$

betrachtet werden kann, wo α_1, α_2, α_3, α_4 .... α_n, als Functionen von den Coefficienten $\frac{A_{n-1}}{A_n}$, $\frac{A_{n-2}}{A_n}$ ...., sowohl negative, als positive, gebrochene, als ganze,

imaginaire, als reelle Zahlen bezeichnen. Da nun unter diesen Factoren mehrere vorhanden sein können, die einander gleich sind, so ist die allgemeinste Gestalt des Nenners, unter der Form eines Productes einfacher Factoren dargestellt,

$$A_n(x-\alpha_1)^s(x-\alpha_2)^t(x-\alpha_3)^u(x-\alpha_4)^v \ldots\ldots\ldots,$$

wo die Exponenten s, t, u, v .... nur positive ganze Zahlen, 0 ausgenommen, bezeichnen, und der Summe nach $= n$ sind. Bezeichnet man nun, der Kürze wegen, den Zähler desBruches mit P und setzt $A_n(x-\alpha_2)^t(x-\alpha_3)^u(x-\alpha_4)^v \ldots\ldots = Y$, so geht der Bruch über in

$$\frac{P}{(x-\alpha_1)^s \cdot Y},$$

wo, rücksichtlich x, P von der $(n-1)^{\text{ten}}$, Y aber von der $(n-s)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Jetzt wird behauptet, dafs dieser Bruch wie zwei andere Brüche von der Form $\frac{X^{(1)}}{(x-\alpha_1)^s}$ und $\frac{X_{(1)}}{Y}$ zerfällt werden könne, dergestalt, dafs man habe:

$$\frac{P}{(x-\alpha_1)^s \cdot Y} = \frac{X^{(1)}}{(x-\alpha_1)^s} + \frac{X_{(1)}}{Y},$$

wo $X^{(1)}$ von der $(s-1)^{\text{ten}}$, und $X_{(1)}$ von der $(n-s-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sei.

Denn, multiplicirt man die Gleichung mit $(x-\alpha_1)^s \cdot Y$, so kommt

$$\text{(I)} \quad P = X^{(1)} \cdot Y + X_{(1)}(x-\alpha_1)^s.$$

Setzt man nun hier

$$X^{(1)} = R^{(s-1)} \cdot x^{s-1} + R^{(s-2)} \cdot x^{s-2} + R^{(s-3)} \cdot x^{s-3} + \ldots . R^{(1)} \cdot x + R^{(0)}$$
$$X_{(1)} = R_{(n-s-1)}\, x^{n-s-1} + R_{(n-s-2)}\, x^{n-s-2} + R_{(n-s-3)}\, x^{n-s-3} + \ldots . R_{(1)} x + R_{(0)}$$

wo die Coefficienten unabhängig von x sind, so kommt alles darauf an, zu erweisen, dafs die Coefficienten einer solchen Bestimmung fähig sind, dafs der Gleichung Genüge geschehe. Da $X^{(1)}$ von der $(s-1)^{\text{ten}}$ und Y von der $(n-s)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, so wird $X^{(1)} Y$ von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sein; ferner, da $X_{(1)}$ von der $(n-s-1)^{\text{ten}}$ und $(x-\alpha_1)^s$ von der s^{ten} Ordnung ist, so wird $X_{(1)}(x-\alpha_1)^s$ ebenfalls von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, mithin auch $X^{(1)} \cdot Y + X_{(1)}(x-\alpha_1)^s$, so wie auch P selbst von dieser Ordnung sein. Denkt man sich demnach für $X^{(1)} \cdot Y$ und $X_{(1)}$ jene Formen in die Gleichung (I) substituirt, und die Producte entwickelt, so erhält man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens zwei Formen, welche mit x^{n-1} anheben, und sich zu x^0 hinabziehen. Damit nun die Gleichung unabhängig von x Statt finde, müssen bekanntlich die Coefficienten derjenigen Glieder, welche x zu derselben Potenz enthalten, einander gleich sein; und da

auf jeder Seite der Gleichung n verschiedene Potenzen von x vorhanden sind, so führt dies zu n Gleichungen zwischen den bekannten und den n unbekannten Gröſsen $R^{(s-1)}$, $R^{(s-2)}$ .... $R^{(0)}$; $R_{(n-s-1)}$, $R_{(n-s-2)}$ .... $R_{(0)}$, welche Gleichungen also zur Bestimmung von letztern Gröſsen dienen können.

Dies ist das bekannte Raisonnement.

3) Daſs man auf die vorbeschriebene Weise zu n linearischen Gleichungen zwischen den bekannten und unbekannten Gröſsen gelange, kann nicht geläugnet werden; daſs die n Unbekannten diesen Gleichungen werden genügen **müssen**, falls die aufgestellte Behauptung richtig sein soll, ist eben so einleuchtend: daſs sie aber diesen Gleichungen unter allen Verhältnissen werden genügen **können**, ist ein Punct, der hier fraglich bleibt, und der grade bewiesen werden muſs, im Falle der in Rede stehende Satz als erwiesen wird betrachtet werden dürfen.

Es darf hier aus der Eliminations-Theorie als bekannt vorausgesetzt werden, daſs die Bestimmung von n Unbekannten mittelst der n linearischen Gleichungen

$$L_0 = 0,\quad L_1 = 0,\quad L_2 = 0,\quad L_3 = 0, \;\ldots\ldots\ldots\; L_{n-1} = 0,$$

stets möglich ist, wenn sich aus den Gröſsen auf der linken Seite der Gleichheitszeichen keine linearische Function

$$\zeta_0 L_0 + \zeta_1 L_1 + \zeta_2 L_2 + \ldots\ldots\ldots \zeta_{n-1} L_{n-1}$$

bilden läſst, die entweder identisch gleich Null, oder von den Unbekannten unabhängig wäre. Um nun die Unmöglichkeit einer solchen Function für den vorliegenden Fall darzuthun, müssen wir die Gleichung (I) selbst etwas näher in's Auge fassen. Dieselbe ist

$$P = X^{(1)} Y + X_{(1)} (x - \alpha_1)^s. \quad \text{(I)}$$

Setzt man hier $x - \alpha_1 = \tau$; folglich $x = \tau + \alpha_1$ und eliminirt x, so erhält man offenbar

$$\begin{aligned}
P &= T^{(0)} + T^{(1)}\tau + T^{(2)}\tau^2 + T^{(3)}\tau^3 + \ldots\ldots\ldots T^{(n-1)}\tau^{n-1} \\
X^{(1)} &= S^{(0)} + S^{(1)}\tau + S^{(2)}\tau^2 + S^{(3)}\tau^3 + \ldots\ldots\ldots S^{(s-1)}\tau^{s-1} \\
Y &= S_{(0)} + S_{(1)}\tau + S_{(2)}\tau^2 + S_{(3)}\tau^3 + \ldots\ldots\ldots S_{(n-s)}\tau^{n-s} \\
X_{(1)} &= T_{(0)} + T_{(1)}\tau + T_{(2)}\tau^2 + T_{(3)}\tau^3 + \ldots\ldots\ldots T_{(n-s-1)}\tau^{n-s-1} \\
(x - \alpha_1)^s &= \tau^s.
\end{aligned}$$

Das allgemeine Glied von $X^{(1)} Y$ kann also dargestellt werden durch

$$\tau^k \times {}^{s+\varrho}_{\;\;k}\Sigma\, S^{(s)} S_{(\varrho)}$$

von $r = o$ bis $r = s - 1$, und von $\varrho = o$ bis $\varrho = n - s$; und das allgemeine Glied von $X_{(1)}(x - \alpha_1)^s$ durch

$$r^{l+s} T_{(l)}$$

von $l = o$ bis $l = n - s - 1$; daher ist das allgemeine Glied von $X^{(1)} Y + X_{(1)}(x - \alpha_1)^s$,

1. für den Theil, wo $k < s$ ist,

$$r^k \times \overset{r+\varrho}{\underset{k}{}} \Sigma S^{(r)} . S_{(\varrho)}$$

2. für den übrigen Theil,

$$r^k \left[\overset{r+\varrho}{\underset{k}{}} \Sigma S^{(r)} . S_{(\varrho)} + T(k - s) \right]$$

Die aus der Identität der allgemeinen Gleichung (I) hervorgehenden Special-Gleichungen sind demnach von der Form:

(a) $\overset{r+\varrho}{\underset{k}{}} \Sigma S^{(r)} . S_{(\varrho)} - T^{(k)} = 0$, von $k = 0$ bis $k = s - 1$ eingeschlossen;

(b) $\overset{r+\varrho}{\underset{k}{}} \Sigma S^{(r)} . S_{(\varrho)} + T_{(k-s)} - T^{(k)} = 0$, von $k = s$ bis $k = n - 1$ eingeschlossen.

Jetzt ist es einleuchtend, daſs von den Gleichungen, welche aus dem Schema (a) entstehen, jede folgende, Eine von den Gröſsen $S^{(0)}, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots\ldots S^{(s-1)}$ mehr, als die vorhergehenden Gleichungen, und die für $k = (s - 1)$ diese Gröſsen insgesammt enthalten wird. Eben so wird auch von den Gleichungen, die aus dem Schema (b) hervorgehen, jede folgende, Eine von den Gröſsen $T_{(0)}, T_{(1)}, T_{(2)}, \ldots T_{(n-s-1)}$ enthalten, welche in den vorhergehenden nicht vorhanden ist. Ganz allgemein wird daher von den n Gleichungen, aus den Formen (a) und (b) entstehend, jede folgende eine von den Unbekannten $S^{(0)}, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots S^{(s-1)}; T_{(0)}, T_{(1)}, T_{(2)}, \ldots T_{(n-s-1)}$ befassen, die in den vorhergehenden nicht enthalten ist.

Bezeichnet man also die n Gleichungen mit

$$L_0 = 0,\ L_1 = 0,\ L_2 = 0,\ L_3 = 0, \ldots L_{(n-1)} = 0;$$

so wird es keine linearische Function

$$\xi_0 L_0 + \xi_1 L_1 + \xi_2 L_2 + \ldots \xi_{n-1} L_{n-1}$$

geben, die entweder identisch $= o$, oder von jenen Unbekannten unabhängig wäre.

Hieraus folgt also, daſs die Gleichung (I) so beschaffen ist, daſs, nach der Transformation in (II), die Coefficienten der geforderten Bestimmung fähig sind. Denkt man sich nun diese als geleistet, mithin die beiden Formen $X^{(1)}$ und $X_{(1)}$ in r bestimmt, so werden sich daraus die Formen in x ergeben, indem man r mittelst der Gleichung $r = (x - \alpha_1)$ eliminirt; weshalb auch diese vollkommen bestimmt, und durch die Gleichung (I) zu ermitteln sein werden.

4) Da

4) Da also jeder Bruch von der Form $\frac{P}{A_n(x-a_1)^s(x-a_2)^t(x-a_3)^u \ldots\ldots}$ wo P von der Ordnung $= -1+s+t+u\ldots\ldots$ ist, zerfället werden kann in zwei andere

$$\frac{X^{(1)}}{(x-a_1)^s}, \quad \frac{X_{(1)}}{A_n(x-a_2)^t(x-a_3)^u(x-a_4)^v\ldots\ldots},$$

wo $X^{(1)}$ von der Ordnung $= -1+s$ und $X_{(1)}$ von der Ordnung $= -1+t+u+v\ldots\ldots$ ist: so findet dieses auch mit Bezug auf letztern Bruch statt; und eine wiederholte Anwendung desselben Satzes auf die nach und nach hervortretenden Parzial-Brüche führt zu dem Resultate, dafs der vorgegebene Bruch, ganz allgemein, zerfället werden kann in einen Inbegriff von ächten Parzial-Brüchen von den Formen

$$\frac{X^{(1)}}{(x-a_1)^s}, \quad \frac{X^{(2)}}{(x-a_2)^t}, \quad \frac{X^{(3)}}{(x-a_3)^u}, \quad \frac{X^{(4)}}{(x-a_4)^v}, \text{ u. s. w.};$$

dergestalt, dafs man habe:

$$\frac{P}{(x-a_1)^s(x-a_2)^t(x-a_3)^u(x-a_4)^v\ldots\ldots} =$$
$$\frac{X^{(1)}}{(x-a_1)^s}+\frac{X^{(2)}}{(x-a_2)^t}+\frac{X^{(3)}}{(x-a_3)^u}+\frac{X^{(4)}}{(x-a_4)^v}+\text{etc.}$$

Nun läfst es sich leicht darthun, dafs ein jeder von diesen Parzial-Brüchen, z. B. $\frac{X^{(2)}}{(x-a_2)^t}$, zerfällt werden kann in einen Inbegriff von einfachen, d. h. von Parzial-Brüchen, von der Form $\frac{Ck}{(x-a_2)^k}$, wo Ck von x unabhängig und k eine positive, ganze, zwischen 0 und $t+1$ exclus. enthaltene, Zahl ist. Denn setzt man $x-a_2=\zeta$, und eliminirt x, so geht der in Rede stehende Bruch über in

$$\frac{\zeta^{t-1}+C_{t-2}\zeta^{t-2}+C_{t-3}\zeta^{t-3}+C_{t-4}\zeta^{t-4}+\ldots\ldots C_1\zeta+C_0}{\zeta^t},$$

aus welchem Ausdruck sich durch Division ergiebt

$$\frac{1}{\zeta}+\frac{C_{t-2}}{\zeta^2}+\frac{C_{t-3}}{\zeta^3}+\frac{C_{t-4}}{\zeta^4}+\ldots\ldots\frac{C_1}{\zeta^{t-1}}+\frac{C_0}{t},$$

welches die behauptete Form ist.

Da dieses offenbar auf einen jeden der obigen Parzial-Brüche anwendbar ist, so darf behauptet werden, dafs jeder ächte Bruch

$$\frac{P}{A_n(x-\alpha_1)^s(x-\alpha_2)^t(x-\alpha_3)^u(x-\alpha_4)^v\ldots\ldots\ldots}$$

zerfällt werden kann in einen Inbegriff von einfachen Parzial-Brüchen

$$\frac{C^{(m)}k}{(x-\alpha_m)^k},$$

wo $C^{(m)}k$ von x unabhängig und k zwischen 0 und $1+s+t+u+v+\ldots.$ exclus. enthalten ist.

5) Dies zur Begründung des bekannten algebraischen Satzes an sich. Jetzt soll von einer allgemeinen, zum Behuf dieser Zerfällung dienlichen, Methode die Rede seyn.

Es sei hier, wie oben, der Bruch

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots.\,a_{n-1}x^{n-1}}{A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots.\,A_{n-1}x^{n-1}+A_nx^n}=\frac{P}{Q},$$

$$Q=A_n(x-\alpha_1)^{t^I}(x-\alpha_2)^{t^{II}}(x-\alpha_3)^{t^{III}}(x-\alpha_4)^{t^{IV}}\ldots.(x-\alpha_\varrho)^{t(\varrho)}\ldots.$$

und ganz allgemein die Frage nach denjenigen Parzialbrüchen, deren Nenner irgend eine Potenz von $(x-\alpha_\varrho)$ bilden.

Setzt man die algebraische Summe aller dieser Parzial-Brüche $=\frac{X^{(\varrho)}}{(x-\alpha_\varrho)^{t(\varrho)}}$, und

$$\frac{Q}{(x-\alpha_\varrho)^{t(\varrho)}}=Y_{(\varrho)},$$

so wird die algebraische Summe aller übrigen Brüche durch $\frac{X_{(\varrho)}}{Y_{(\varrho)}}$ dargestellt werden können, wo $X^{(\varrho)}$ von $X_{(\varrho)}$ ganze Functionen von x, erstere von der Ordnung $=-1+t^{(\varrho)}$, und letztere von der Ordnung $=-1-t+n$, bezeichnen. Alsdann hat man

$$\frac{P}{Q}=\frac{X^{(\varrho)}}{(x-\alpha_\varrho)^{t(\varrho)}}+\frac{X_{(\varrho)}}{Y_{(\varrho)}},$$

$$\text{also}\quad X^{(\varrho)}=\frac{P}{Y_{(\varrho)}}-\frac{X_{(\varrho)}(x-\alpha_\varrho)^{t(\varrho)}}{Y_{(\varrho)}}.$$

Setzt man hier $x-\alpha_\varrho=\zeta_{(\varrho)}$, und bezeichnet die correspondirenden Formen in $\zeta_{(\varrho)}$ mit

$$_{(1)}X^{(\varrho)},\ _{(1)}P,\ _{(1)}X_{(\varrho)},\ _{(1)}Y_{(\varrho)},$$

so geht die Gleichung über in

$$_{(1)}X^{(\varrho)}=\frac{_{(1)}P}{_{(1)}Y_{(\varrho)}}-\frac{_{(1)}X_{(\varrho)}\zeta_{(\varrho)}^{t(\varrho)}}{_{(1)}Y_{(\varrho)}}$$

Denkt man sich nun die in dieser Gleichung enthaltenen Gröfsen nach steigenden Potenzen von $\zeta_{(\varrho)}$ geordnet, und die Quotienten nach eben dieser Form entwickelt, so wird das niedrigste Glied, in $\frac{{}_{(1)}X_{(\varrho)}\zeta_{(\varrho)}}{{}_{(1)}Y_{(\varrho)}}$ enthalten, von der $t^{(\varrho)\text{ten}}$ Ordnung sein. Da nun das höchste der in ${}_{(1)}X^{(\varrho)}$ enthaltenen Glieder von der Ordnung $= t^{(\varrho)} - 1$ ist; so werden die Glieder dieser Gröfse blofs in $\frac{{}_{(1)}P}{{}_{(1)}Y_{(\varrho)}}$ enthalten, und die Gröfse selbst der algebraischen Summe der $t^{(\varrho)}$ ersten Glieder in der, nach steigenden Potenzen von $\zeta_{(\varrho)}$, geordneten Entwickelung von $\frac{{}_{(1)}P}{{}_{(1)}Y_{(\varrho)}}$ gleich sein. Bezeichnet man diese Summe mit

$$R_0 + R_1\zeta_{(\varrho)} + R_2\zeta^2_{(\varrho)} + R_3\zeta^3_{(\varrho)} + R_4\zeta^4_{(\varrho)} + \ldots\ldots R t^{\varrho} - 1\, \zeta^{t-1}_{(\varrho)}$$

so hat man

$$\frac{{}_{(1)}X^{(\varrho)}}{\zeta^{t(\varrho)}_{(\varrho)}} = \frac{R_0}{\zeta^{t(\varrho)}_{(\varrho)}} + \frac{R_1}{\zeta^{t(\varrho)-1}_{(\varrho)}} + \frac{R_2}{\zeta^{t(\varrho)-2}_{(\varrho)}} + \frac{R_3}{\zeta^{t(\varrho)-3}_{(\varrho)}} + \ldots\ldots \frac{R_{t(\varrho)-1}}{\zeta_{(\varrho)}};$$

folglich, indem man $\zeta_{(\varrho)}$ mittelst der Gleichung $\zeta_{(\varrho)} = x - \alpha_\varrho$ eliminirt,

$$\frac{X^{(\varrho)}}{(x-\alpha_\varrho)^{t(\varrho)}} =$$

$$\frac{R_0}{(x-\alpha_\varrho)^{t(\varrho)}} + \frac{R_1}{(x-\alpha_\varrho)^{t(\varrho)-1}} + \frac{R_2}{(x-\alpha_\varrho)^{t(\varrho)-2}} + \frac{R_3}{(x-\alpha_\varrho)^{t(\varrho)-3}} + \ldots\ldots \frac{R t^{\varrho} - 1}{(x-\alpha_\varrho)}.$$

Hieraus ergiebt sich folgende Regel:

Hat man eine ächten Bruch $\frac{P}{Q}$, wo

$$Q = A_n\,(x-\alpha_1)^s\,(x-\alpha_2)^t\,(x-\alpha_3)^u\,(x-\alpha_4)^v \ldots\ldots$$

ist, den man in einfache Parzial-Brüche zu zerlegen wünscht; so bilde man daraus, zur Bestimmung der Brüche, die $(x-\alpha_1)$ im Nenner haben, den Bruch $\frac{P}{Q.\frac{1}{(x-\alpha_1)^s}}$, introducire ζ anstatt x mittelst der Gleichung $x - \alpha_1 = \zeta$, und entwickele das Resultat nach steigenden Potenzen von ζ, von der 0ten bis zur $(s-1)^{\text{ten}}$ Ordnung eingeschlossen. Die hervortretende Form, durch $\zeta^s = (x-\alpha_1)^s$ dividirt, wird, nach der Elimination von ζ mittelst x, die gesuchten einfachen Parzial-Brüche liefern.

Darauf bilde man, zur Bestimmung von denjenigen einfachen Parzial-Brü-

chen, welche $(x - \alpha_g)$ im Nenner haben, den Bruch $\frac{P}{Q \cdot \frac{1}{(x-\alpha_g)^t}}$, introducire ζ anstatt x mittelst der Gleichung $x - \alpha_g = \zeta$, und entwickele das Resultat nach steigenden Potenzen von ζ, von der 0ten bis zur $(t - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung eingeschlossen. Die hervortretende Form, durch ζ^t dividirt, wird, nach der Elimination von ζ mittelst x, die gesuchten einfachen Parzial-Brüche geben.

Diese Operation so weit fortgeführt gedacht, bis die Factoren im Nenner des vorgegebenen Bruches erschöpft sind, werden die so gewonnenen Brüche, nach ihren algebraischen Zeichen additiv mit einander verbunden, ein Aequivalent des Bruches $\frac{P}{Q}$ bilden.

6) Vor dem Eulerschen Algorithmus hat dieser offenbar den Vorzug, nicht nur, daſs er auf alle Formen, ohne Unterschied, anwendbar ist, sondern auch, daſs er sich in denjenigen Fällen sehr einfach ausnimmt, wo jener mit einigen Weitläuftigkeiten verbunden ist.

Anderweitige, diesen Gegenstand betreffende Betrachtungen werden hier deshalb übergangen, weil sie, von dem angegebenen Standpunct aus, nicht den mindesten Schwierigkeiten unterworfen, überdieſs auch sattsam bekannt sind.

7.

Ueber zwei Curven.

(Von Herrn Dr. *Lehmus*.)

I. Aufgabe.

In der graden Linie AD (Fig. 8.) bewege sich ein Punct h gleichförmig mit der Geschwindigkeit c, von A nach D; in der zu bestimmenden Curve BG aber, ein Punct p gleichförmig mit der Geschwindigkeit ω, von B nach G; h und p gehen gleichzeitig von A und B ab. Die Curve der Bedingung gemäſs zu bestimmen, daſs die graden Verbindungslinien der Endpuncte gleichzeitiger Wege Tangenten der Curve werden.

Auflösung.

Ist h in E, wenn p in C ist, so hat man die Bedingungs-Gleichung

$$AE : BC = c : \omega$$

und hieraus $BC = \varrho$; $\omega : c = n$ gesetzt,

1) $\varrho = n \,.\, AE.$

Nimmt man BA als Abscissen-Linie, B als Anfangspunct der Abscissen an, setzt jede Abscisse $= x$; die Ordinaten, parallel mit $AD = y$; also auch $BF = x$, $FC = y$; so hat man, CH parallel mit BA genommen, den Abstand $BA = a$; den Winkel $BAD = 2\alpha$ und den veränderlichen Winkel $CEA = 2\beta$ gesetzt,

2) $AE = y + \dfrac{(a-x)\sin(2\alpha+2\beta)}{\sin 2\beta}$; also

3) $\varrho = ny + \dfrac{n(a-x)\sin(2\alpha+2\beta)}{\sin 2\beta}.$

Die erste Ableitung von 3) giebt

4) $d\varrho = n\,dy + \dfrac{-n(a-x)\sin 2\alpha \,.\, d2\beta - n\sin(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta \,.\, dx}{\sin 2\beta^2}.$

Es ist aber CE, als Tangente in C betrachtet,

$$d\varrho \,.\, \sin 2\beta = dx \sin 2\alpha$$

und $dx\sin(2\alpha+2\beta) = dy\sin 2\beta$

und substituirt man hieraus die Werthe für $d\varrho$ und dy in 4), so erhält man

5) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} dx = n \cdot \frac{\sin(2\alpha + 2\beta)}{\sin 2\beta} dx - \frac{n(a-x)\sin 2\alpha . d . 2\beta}{\sin 2\beta^2}$
$- \frac{n \sin(2\alpha + 2\beta) \sin 2\beta . dx}{\sin 2\beta^2}$; oder

6) $dx = - n(a-x)\frac{d 2\beta}{\sin 2\beta}$; also

7) $\frac{d(a-x)}{a-x} = n \cdot \frac{d 2\beta}{\sin 2\beta}$; folglich

8) $\int \frac{d(a-x)}{a-x} = n \int \frac{d 2\beta}{\sin 2\beta}$; oder

9) $ln(a-x) = n\, ln tg\beta + C$; oder auch, $n l n A$ für C geschrieben,

10) $a - x = [A tg \beta]^n$.

Für $x = 0$ wird $2\beta = \pi - 2\alpha$; daher

11) $a = [A . \text{cotg}\, \alpha]^n$; und hieraus $A = \frac{\sqrt[n]{a}}{\text{cotg}\, \alpha} = \text{tg}\, \alpha . \sqrt[n]{a}$; folglich vollständig:

12) $x = a - a[\text{tg}\, \alpha\ \text{tg}\, \beta]^n$

Substituirt man hieraus den Werth für

$\text{tg}\, \beta$, nemlich $\text{cotg}\, \alpha . \left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ in die Gleichung

$dy . \sin 2\beta = dx \sin(2\alpha + 2\beta)$; oder

$dy = dx . [\sin 2\alpha . \text{cotg}\, 2\beta + \cos 2\alpha]$

$= dx \left[\sin 2\alpha . \frac{1 - \text{tg}\beta^2}{2\, \text{tg}\, \beta} + \cos 2\alpha\right]$

$= dx \left[\frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\text{tg}\, \beta} - \sin\alpha \cos\alpha\, \text{tg}\beta + \cos 2\alpha\right]$; so entsteht

13) $dy = dx\left[\sin\alpha^2 . \left[\frac{a-x}{a}\right]^{-\frac{1}{n}} - \cos\alpha^2 . \left[\frac{a-x}{a}\right]^{\frac{1}{n}} + \cos 2\alpha\right]$

und hieraus, wenn man integrirt:

14) $y = -\sin\alpha^2 \frac{an}{n-1}\left[\frac{a-x}{a}\right]^{\frac{n-1}{n}} + \cos\alpha^2 \frac{an}{n+1}\left[\frac{a-x}{a}\right]^{\frac{n+1}{n}} + \cos 2\alpha . x + C$.

Es verschwinden aber x und y zugleich; daher

$0 = -\sin\alpha^2 . \frac{an}{n-1} + \cos\alpha^2 . \frac{an}{n-1} + C$, folglich

15) Const $= \frac{a . n}{n-1} . \sin\alpha^2 - \frac{an}{n+1}\cos\alpha^2$: also

16) $y = \frac{an \sin \alpha^2}{n-1}\left[1 - \left[\frac{a-x}{a}\right]^{\frac{n-1}{n}}\right] + \frac{an \cos \alpha^2}{n+1}\left[\left[\frac{a-x}{a}\right]^{\frac{n+1}{n}} - 1\right] + x \cos 2\alpha.$

Diese Endgleichung 16) liefert für $c = \varpi$, also für $n = 1$ folgende:

17) $y = a \sin \alpha^2 \ln \frac{a}{a-x} + \frac{a \cos \alpha^2}{2}\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 - \frac{a \cos \alpha^2}{2} + x \cos 2\alpha.$

Ist $n > 1$ und $x = a$, so wird aus 16)

18) $y = a\left[\frac{\sin \alpha^2}{n-1} + \frac{\cos \alpha^2}{n+1}\right]$, woraus für $\alpha = 90^0$, das aus gewöhnlichen algebraischen Aufgaben bekannte Resultat $y = \frac{a}{n-1}$ folgt.

Ist $n < 1$, so erhält man aus 16) für $x = a$,

19) $y = \infty$; d. h. AD wird Asymptote der Curve.

Anmerk. Diese Curve, deren Gleichung 16) darstellt, beschreibt z. B. ein Hund, der von seinem Herrn angerufen wird, wenn der Herr zugleich in einer graden Linie fort geht.

II. Aufgabe.

Die Curve AC (Fig. 9.) der Bedingung gemäfs zu bestimmen, dafs in Beziehung auf den Endpunct jeder rechtwinklichten Ordinate, die gegebene Richtung AB als Abscissen-Linie verstanden, das Widerstands-Moment, der in allen Puncten der Ebene der Curve, parallel mit AB wirkenden gleichen Kräfte, dem Moment der im Anfangspunct A der Abscissen, unter einem bestimmten Winkel α mit der Abscissen-Linie wirkenden Kraft P gleich sei.

Auflösung.

Zerlegt man P in A, in die mit FG parallele Thätigkeit $P \sin \alpha$ und in die nach der Richtung AF wirkende $P \cos. \alpha$, so hat erstere den Hebelsarm $= x$; letztere den y. Bezeichnet nun ϖ die Summe der mit AB parallelen Kräfte in jeder Flächen-Einheit, so ist das Widerstands-Moment der Ebene $AFG = \varpi \int \frac{y}{2} y \,.\, dx$, und es entsteht daher die Bedingungs-Gleichung

$$P \sin \alpha \,.\, x = P \cos \alpha \,.\, y + \varpi \,.\, \int \frac{y}{2} \,.\, y dx.$$

Wird nun der Kürze wegen

$\frac{2P \sin \alpha}{\varpi}$ durch a^2 und

$\frac{2P \cos \alpha}{\varpi}$ durch b^2 ausgedrückt, so hat man

$$a^2x = b^2y + \int y^2 \,.\, dx \text{ und hieraus}$$

$$a^2dx = b^2dy + y^2 \,.\, dx; \text{ folglich}$$

$$dx = \frac{b^2 dy}{a^2 - y^2}; \text{ also}$$

$$x = b^2 \int \frac{dy}{a^2 - y^2}$$

$$= \frac{b^2}{2a} \,.\, \int \left[\frac{dy}{a+y} + \frac{dy}{a-y} \right]$$

$$= \frac{b^2}{2a} \left[\ln (a+y) - \ln (a-y) \right] + C$$

$$= \frac{b^2}{2a} \ln \frac{a+y}{a-y} + C.$$

Es verschwindet aber x mit y, daher $C = 0$; folglich

$$x = \frac{b^2}{2a} \ln \frac{a+y}{a-y}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man auch, unter e die Basis des natürlichen Log. Systems verstanden,

$$\frac{2ax}{b^2} \,.\, \ln e - \ln \frac{a+y}{a-y}; \text{ folglich}$$

$$e^{\frac{2ax}{b^2}} = \frac{a+y}{a-y}, \text{ und hieraus}$$

$$y = a \,.\, \frac{e^{\frac{2ax}{b^2}} - 1}{e^{\frac{2ax}{b^2}} + 1}.$$

---

8. Be-

8.

Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen.

(Von Herrn N. H. *Abel.*)

Bekanntlich kann man algebraische Gleichungen bis zum vierten Grade allgemein auflösen, Gleichungen von höhern Graden aber nur in einzelnen Fällen, und irre ich nicht, so ist die Frage:

> Ist es möglich, Gleichungen von höhern als dem vierten Grade allgemein aufzulösen?

noch nicht befriedigend beantwortet worden. Der gegenwärtige Aufsatz hat diese Frage zum Gegenstande.

Eine Gleichung algebraisch auflösen heifst nichts anders, als ihre Wurzeln durch eine algebraische Function der Coefficienten ausdrücken. Man mufs also erst die allgemeine Form algebraischer Functionen betrachten und alsdann untersuchen, ob es möglich sei, der gegebenen Gleichung auf die Weise genug zu thun, dafs man den Ausdruck einer algebraischen Function statt der unbekannten Gröfse setzt.

§. 1.

Ueber die allgemeine Form algebraischer Functionen.

Wenn x', x'', x''' .... eine endliche Menge beliebiger Gröfsen sind, so sagt man: v sei eine algebraische Function dieser Gröfsen, wenn es sich durch x', x'', x''' etc. vermittelst folgender Operationen ausdrücken läfst. Erstlich durch die Addition, zweitens durch die Multiplication, sowohl von Gröfsen, die von x', x'', x''' .... abhängen, als von Gröfsen, die nicht davon abhängen; drittens durch die Division; viertens durch Ausziehen von Wurzeln mit Exponenten, die Primzahlen sind. Wir nennen die Subtraction, Potenziirung und Ausziehung von Wurzeln mit zusammengesetzten Exponenten nicht besonders, weil sie offenbar in den vier vorhin genannten Operationen mit enthalten sind.

Läfst sich die Function v durch die drei ersten der vier obigen Operationen zusammensetzen, so ist sie algebraisch rational oder blos rational; und

sind nur die beiden ersten Operationen nöthig, so heifst sie algebraisch-rational und ungebrochen, oder auch blos ganze Function.

Es sei $f(x', x'', x''' \dots\dots)$ eine beliebige Function, welche durch die Summe einer endlichen Zahl von Gliedern von der Form

$$A\, x'^{m_1} x''^{m_2} \dots\dots\dots$$

ausgedrückt werden kann, wo A eine von x', x'' etc. unabhängige Gröfse ist, und m_1, m_2 etc. ganze positive Zahlen bedeuten; so ist klar, dafs die zwei ersten obigen Operationen besondere Fälle der durch $f(x', x'' \dots\dots)$ bezeichneten Operation sind. Man kann also ganze Functionen, ihrer Definition zufolge, als aus einer endlichen Zahl von Wiederholungen dieser Operationen entstehend betrachten. Bezeichnet man nun durch v', v'', v''' etc. mehrere Functionen der Gröfsen x', x'', $x''' \dots\dots$ von der nämlichen Form wie $f(x', x'' \dots\dots)$, so ist auch offenbar $f(v', v'', v''' \dots\dots)$ eine Function von eben der Form wie $f(x', x'' \dots\dots)$. Nun ist $f(v', v'' \dots\dots)$ der allgemeine Ausdruck der Functionen, welche durch zweimalige Wiederholung der Operation $f(x', x'' \dots\dots)$ entstehen. Man findet also auch immer das nämliche Resultat, wenn man die Operation beliebig oft wiederholt. Daraus folgt, dafs jede ganze Function mehrer Gröfsen x', $x'' \dots\dots$ durch die Summe mehrer Glieder von der Form $A x'^{m_1} x''^{m_2} \dots\dots$ ausgedrückt werden kann.

Wir wollen nunmehr die rationalen Functionen betrachten.

Wenn $f(x', x'' \dots)$ und $\varphi(x', x'' \dots)$ zwei ganze Functionen sind, so ist klar, dafs der Quotient

$$\frac{f(x', x'' \dots\dots)}{\varphi(x', x'' \dots\dots)}$$

ein besonderer Fall der Resultate der drei ersten Operationen ist, welche rationale Functionen geben. Man kann also eine rationale Function als das Resultat der Wiederholung dieser Operation betrachten. Bezeichnet man durch v', v'', v''' etc. mehrere Functionen von der Form $\frac{f(x', x'' \dots)}{\varphi(x', x'' \dots)}$, so ist leicht zu sehen, dafs $\frac{f(v', v'' \dots)}{\varphi(v', v'' \dots)}$ wiederum auf die nemliche Form gebracht werden kann. Es folgt also, wie oben bei den ungebrochenen Functionen, dafs jede rationale Function von mehreren Gröfsen x', $x'' \dots\dots$ immer auf die Form

$$\frac{f(x', x'' \dots\dots)}{\varphi(x', x'' \dots\dots)}$$

gebracht werden kann, wo Zähler und Nenner ganze Functionen sind.

Wir wollen ferner die **allgemeine** Form algebraischer Functionen suchen.

Man bezeichne durch $f(x', x'' \ldots\ldots)$ eine beliebige rationale Function, so ist klar, daſs jede algebraische Function vermittelst der durch $f(x', x'' \ldots)$ bezeichneten Operation, verbunden mit der Operation $\sqrt[m]{r}$, wo m eine Primzahl ist, zusammengesetzt werden kann. Sind also $p', p'' \ldots$ rationale Functionen von $x', x'' \ldots\ldots$, so wird

$$p_1 = f(x', x'' \ldots\ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots\ldots)$$

die allgemeine Form algebraischer Functionen von $x', x'' \ldots\ldots$ sein, in welchen sich die durch $\sqrt[m]{r}$ ausgedrückte Operation nunmehr nur auf rationale Functionen bezieht. Wir wollen die Functionen von der Form p_1 algebraische Functionen **von der ersten Ordnung** nennen. Bezeichnet man durch p_1', p_1'' etc. mehrere Gröſsen von der Form p_1, so wird

$$p_2 = f(x', x'' \ldots\ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots\ldots \sqrt[n_1']{p_1'}, \sqrt[n_1'']{p_1''}, \ldots\ldots)$$

die allgemeine Form algebraischer Functionen von $x', x'' \ldots\ldots$ sein, in welchen die Operation $\sqrt[m]{r}$ sich nur auf rationale und auf algebraische Functionen **von der ersten Ordnung** bezieht. Wir wollen die Functionen von der Form p_2 algebraische Functionen **von der zweiten Ordnung** nennen. Auf dieselbe Weise wird der Ausdruck

$$p_3 = f(x', x'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''}, \ldots\ldots \sqrt[n_1']{p_1'}, \sqrt[n_1'']{p_1''}, \ldots \sqrt[n_2']{p_2'} \sqrt[n_2'']{p_2''}, \ldots),$$

in welchem p_2', p_2'' Functionen der zweiten Ordnung sind, die allgemeine Form algebraischer Functionen von $x', x'' \ldots\ldots$ sein, in welchen die Operation $\sqrt[m]{r}$ sich nur auf rationale und auf algebraische Functionen der ersten und zweiten Ordnung bezieht.

Fährt man auf diese Weise fort, so bekommt man algebraische Functionen von der dritten, vierten $\ldots$ μ^{ten} Ordnung, und es ist klar, daſs der Ausdruck der Functionen von der μ^{ten} Ordnung der **allgemeine** Ausdruck algebraischer Functionen sein wird.

Bezeichnet man also durch μ die Ordnungszahl einer beliebigen algebraischen Function und durch v die Function selbst, so ist

$$v = f(r', r'' \ldots\ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''}, \ldots\ldots),$$

wo $p', p'' \ldots\ldots$ Functionen von der Ordnung $\mu - 1$; $r', r'' \ldots\ldots$ Functionen von der Ordnung $\mu - 1$, oder niedrigen Ordnungen, und $n', n'' \ldots\ldots$ Primzahlen sind. f bezeichnet, wie immer, eine rationale Function der Gröſsen, welche zwischen den Klammern stehen.

Man kann offenbar annehmen, daſs es unmöglich ist, eine der Gröſsen $\sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots\ldots$ durch eine rationale Function der übrigen und der Gröſsen r', $r'' \ldots\ldots$ auszudrücken; denn wäre es möglich, so würde v die einfachere Gestalt

$$v = f(r', r'' \ldots\ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots\ldots)$$

haben, wo die Zahl der Gröſsen $\sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots\ldots$ wenigstens um eine Einheit geringer wäre wie oben. Reducirte man nun, wenn es angeht, diesen Ausdruck von v eben so noch weiter, so müſste man zuletzt nothwendig entweder auf einen irreductibeln Ausdruck, oder auf einen Ausdruck von der Form

$$v = f(r', r'', r''' \ldots\ldots\ldots)$$

kommen. Diese Function wäre aber blos von der $\mu - 1^{ten}$ Ordnung, während v von der μ^{ten} Ordnung sein sollte; welches sich widerspricht.

Ist in dem Ausdruck von v die Zahl der Gröſsen $\sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots\ldots$ gleich m, so wollen wir die Function v von der μ^{ten} Ordnung und vom μ^{ten} Grade nennen. Auf diese Weise ist eine Function von der μ^{ten} Ordnung und vom 0ten Grade das nemliche, wie eine Function von der $\mu - 1^{ten}$ Ordnung, und eine Function von der 0ten Ordnung ist das nämliche wie eine rationale Function.

Daraus folgt, daſs man setzen kann

$$v = f(r', r'', \ldots\ldots\ldots \sqrt[n]{p})$$

wo p eine Function von der $\mu - 1^{ten}$ Ordnung ist, r', $r'' \ldots\ldots$ aber Functionen von der μ^{ten} Ordnung und höchstens vom $m - 1^{ten}$ Grade und von der Art sind, daſs es unmöglich ist, $\sqrt[n]{p}$ durch eine rationale Function dieser Gröſsen auszudrücken.

Da eine rationale Function mehrer Gröſsen, wie wir vorhin sahen, immer auf die Form

$$\frac{s}{t}$$

gebracht werden kann, wo s und t ganze Functionen der nemlichen veränderlichen Gröſsen sind, so kann v immer durch

$$v = \frac{\varphi(r', r'' \ldots\ldots\ldots \sqrt[n]{p})}{\tau(r', r'' \ldots\ldots\ldots \sqrt[n]{p})}$$

ausgedrückt werden, wo φ und τ zwei ganze Functionen der Gröſsen r', $r'' \ldots\ldots$ und $\sqrt[n]{p}$ bezeichnen. Vermöge dessen, was wir oben fanden, kann aber eine ganze Function mehrer Gröſsen s, r', $r'' \ldots\ldots$ immer durch

$$t_0 + t_1 s + t_2 s^2 \ldots\ldots\ldots t_m s^m)$$

ausgedrückt werden, wenn t_0, $t_1 \ldots\ldots t_m$ ganze Functionen von r', r'', $r''' \ldots$ ohne s bedeuten. Man kann also

$$v = \frac{t_0 + t_1 p^{\frac{1}{n}} + t_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots\ldots t_m p^{\frac{m}{n}}}{v_0 + v_1 p^{\frac{1}{n}} + v_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots\ldots v_{m'} p^{\frac{m'}{n}}} = \frac{T}{V}$$

setzen, wo t_0, $t_1 \ldots\ldots t_m$ und v_0, $v \ldots\ldots v_{m'}$ ganze Functionen von r', r'', r''' etc. sind.

Nun mögen V_1, $V_2 \ldots\ldots V_{n-1}$ die $n-1$ Werthe von V sein, welche man findet, wenn man $\alpha . p^{\frac{1}{n}}$, $\alpha^2 p^{\frac{1}{n}}$, $\alpha^3 p^{\frac{1}{n}} \ldots\ldots \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}}$ statt $p^{\frac{1}{n}}$ setzt: α bedeutet eine der Wurzeln der Gleichung $\alpha^n - 1 = 0$, die nicht 1 ist. Alsdann erhält man, wenn man den Bruch $\frac{T}{V}$ oben und unten mit

$V_1 V_2 \ldots\ldots\ldots V_{n-1}$ multiplicirt,

$$v = \frac{T . V_1 . V_2 \ldots\ldots\ldots V_{n-1}}{V . V_1 . V_2 \ldots\ldots\ldots V_{n-1}}.$$

Das Product $V . V_1 \ldots\ldots V_{n-1}$ kann aber, wie bekannt, durch eine ganze Function von p und von den Gröſsen r', $r'' \ldots\ldots$ ausgedrückt werden, und das Product $T . V_1 . V_2 \ldots\ldots V_{n-1}$ ist, wie man sieht, eine ganze Function von $\sqrt[n]{p}$ und von r', $r'' \ldots\ldots$ Setzt man also dieses Product gleich

$$s_0 + s_1 p^{\frac{1}{n}} + s_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots\ldots s_k p^{\frac{k}{n}},$$

so findet man

$$v = \frac{s_0 + s_1 p^{\frac{1}{n}} + s_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots s_k p^{\frac{k}{n}}}{M},$$

oder, wenn man q_0, q_1, $q_2 \ldots\ldots$ statt $\frac{s_0}{m}$, $\frac{s_1}{m}$, $\frac{s_2}{m}$ etc. schreibt,

$$v = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots + q_k p^{\frac{k}{n}},$$

wo p_0, $q_1 \ldots\ldots q_k$ rationale Functionen der Gröſsen p, r', r'' etc. sind.

Welche nun auch die ganze Zahl μ sein mag, so kann man setzen

$$\mu = an + \alpha,$$

wo a und α zwei ganze Zahlen sind und $\alpha < n$ ist. Daraus folgt, daſs

$$p^{\frac{\mu}{n}} = p^{\frac{an+\alpha}{n}} = p^a . p^{\frac{\alpha}{n}}$$

Setzt man daher in den Ausdruck von v, statt $p^{\frac{\mu}{n}}$ diesen Ausdruck, so erhält man

$$v = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

wo q_0, q_1, q_2 etc., wie vorhin, rationale Functionen von p, r', $r'' \ldots\ldots$ und

folglich Functionen von der μ^{ten} Ordnung und höchstens vom $m-1^{ten}$ Grade und von der Art sind, daſs sich $p^{\frac{1}{n}}$ nicht durch rationale Functionen dieser Gröſsen ausdrücken läſst.

In dem obigen Ausdruck von v kann man immer

$$q_1 = 1$$

setzen. Denn wenn q_1 nicht Null ist, so erhält man, wenn man $p_1 = p.q_1^n$ setzt, $p = \frac{p_1}{q_1^n}$, und $p^{\frac{1}{n}} = \frac{p_1^{\frac{1}{n}}}{q_1}$, also

$$v = q_0 + p_1^{\frac{1}{n}} + \frac{q_2}{q_1^2} p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots\ldots + \frac{q^{n-1}}{q_1^{n-1}} p^{\frac{n-1}{n}},$$

welcher Ausdruck von der nemlichen Gestalt ist, wie der vorige, nur daſs $q_1 = 1$. Ist $q_1 = 0$, so sei q_μ eine von den Gröſsen $q_1, q_2 \ldots\ldots q_{n-1}$, welche nicht Null ist und $q_\mu^n p^\mu = p_1$. Dieses giebt $q_\mu^\alpha . p^{\frac{\alpha\mu}{n}} = p^{\frac{1}{n}}$. Nimmt man daher zwei ganze Zahlen α und β, welche der Gleichung $\alpha\mu - \beta n = \mu'$ genugthun, wo μ' eine ganze Zahl ist, so erhält man

$$q_\mu^\alpha p^{\frac{\beta n + \mu'}{n}} = p_1^{\frac{\alpha}{n}} \text{ und } p^{\frac{\mu'}{n}} = q_\mu^{-\alpha} . p^{-\beta} . p_1^{\frac{\alpha}{n}}.$$

Diesem zufolge und weil $q_\mu . p^{\frac{\mu}{n}} = p_1^{\frac{1}{n}}$ ist, wird v die Form

$$v = q_0 + p_1^{\frac{1}{n}} + q_2 p_1^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots q_{n-1} p_1^{\frac{n-1}{n}}$$

haben.

Aus allem diesen folgt Nachstehendes:

Wenn v eine algebraische Function von der Ordnung μ und vom Grade m ist, so kann man immer setzen:

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + q_3 p^{\frac{3}{n}} \ldots\ldots q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}};$$

n ist eine Primzahl, $q_0, q_2 \ldots\ldots q_{n-1}$ sind algebraische Functionen von der Ordnung μ und höchstens vom Grade $m-1$ und p ist eine algebraische Function von der Ordnung $\mu - 1$ und von der Art, daſs sich $p^{\frac{1}{n}}$ nicht durch eine rationale Function von $q_0, q_2 \ldots\ldots q_{n-1}$ ausdrücken läſst.

§. II.

Eigenschaften der algebraischen Functionen, welche einer gegebenen Gleichung genugthun.

Es sei

$$c_0 + c_1 y + c_2 y^2 \ldots\ldots\ldots + c_{r-1} y^{r-1} + y^r = 0 \qquad 1.$$

eine beliebige Gleichung vom Grade r, wo c_0, c_1 ...... rationale Functionen von x', x'', ... sind. x', x'', ... sind beliebige unabhängige Gröfsen. Man nehme an, es lasse sich derselben genugthun, wenn man statt y irgend eine algebraische Function von x', x'', ... setzt. Diese Function sei

$$y = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \quad 2.$$

Substituirt man diesen Ausdruck von y in die gegebene Gleichung, so erhält man, dem Obigen zufolge, einen Ausdruck von der Form

$$r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0 \quad 3.$$

wo r_0, r_1, r_2 ..... r_{n-1} rationale Functionen der Gröfsen p, q_0, q_1 .... q_{n-1} sind.

Nun behaupte ich, dafs die Gleichung (3) nicht Statt finden kann, wenn nicht einzeln

$$r_0 = 0, \; r_1 = 0 \ldots\ldots\ldots r_{n-1} = 0$$

ist. Denn es sei nicht so, so müfsten, wenn man z. B. $p^{\frac{1}{n}}$ durch z bezeichnet, die beiden Gleichungen

$$z^n - p = 0 \text{ und}$$
$$r_0 + r_1 z + r_2 z^2 \ldots\ldots + r_{n-1} z^{n-1} = 0$$

eine oder mehrere gemeinschaftliche Wurzeln haben. Es sei k die Zahl dieser Wurzeln, so läfst sich, wie bekannt, eine Gleichung finden, welche diese k Wurzeln hat und deren Coefficienten rationale Functionen der Gröfsen p, r_0, r_1, ... r_{n-1} sind.

Die Gleichung sei

$$s_0 + s_1 z + s_2 z^2 \ldots\ldots + s_{k-1} z^{k-1} + z^k = 0$$

und

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 \ldots\ldots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^{\mu}$$

ein Factor ihres ersten Gliedes, wo t_0. t_1 etc. rationale Functionen von p, r_0, r_1 ...... r_{n-1} sind, so ist auch

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 \ldots\ldots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^{\mu} = 0,$$

und es ist klar, dafs man es als unmöglich annehmen kann, eine Gleichung von niedrigerem Grade von der nemlichen Form zu finden. Diese Gleichung hat nun ihre μ Wurzeln mit der Gleichung $z^n - p$ gemein. Nun aber sind die Wurzeln der Gleichung $z^n - p$ alle von der Form αz, wo α irgend eine Wurzel der Einheit ist. Erwägt man also, dafs μ nicht kleiner sein kann als 2, weil es unmöglich sein soll, z durch eine rationale Function der Gröfsen p, r_0, r_1 ...... r_{n-1} auszudrücken, so folgt, dafs zwei Gleichungen von der Form

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 \ldots\ldots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^\mu = 0 \text{ und}$$
$$t_0 + \alpha t_1 z + \alpha t_2 z^2 \ldots\ldots + \alpha^{\mu-1} t_{\mu-1} z^{\mu-1} + \alpha^\mu z^\mu = 0$$

Statt finden müssen. Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man z^μ eliminirt,

$$t_0(1-\alpha^\mu) + t_1(\alpha-\alpha^\mu)z \ldots\ldots + t_{\mu-1}(\alpha^{\mu-1}-\alpha^\mu)z^{\mu-1} = 0.$$

Da nun aber die Gleichung $z^\mu + t_{\mu-1}z^{\mu-1} \ldots\ldots = 0$ irreductibel ist, so muſs sie, weil sie vom $\mu - 1^{\text{ten}}$ Grade ist, (~~einzeln~~) und t_0 nicht null ist

$$\alpha^\mu - 1 = 0, (\alpha - \alpha^\mu = 0 \ldots\ldots \alpha^{\mu-1} - \alpha^\mu = 0)$$

geben; was nicht sein kann.

Es muſs also

$$r_0 = 0,\ r_1 = 0 \ldots\ldots\ldots r_{n-1} = 0$$

sein.

Finden nun aber diese Gleichungen Statt, so ist klar, daſs der gegebenen Gleichung durch alle die Werthe von y genug gethan werden muſs, welche man findet, wenn man der Gröſse $p^{\frac{1}{n}}$ alle die Werthe $\alpha p^{\frac{1}{n}}, \alpha^2 p^{\frac{1}{n}}, \ldots\ldots\ldots \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}}$ beilegt.

Man sieht leicht, daſs alle diese Werthe von y von einander verschieden sein müssen; denn sonst würde man eine Gleichung von derselben Gestalt wie (3) erhalten, und eine solche Gleichung würde, wie wir sahen, auf Widersprüche führen.

Bezeichnet man also durch $y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$ n verschiedene Wurzeln der Gleichung (1), so findet man

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots\ldots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$
$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + \alpha^2 q_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots\ldots + \alpha^{n-1} q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = q_0 + \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} + \alpha^{n-2} q_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots + \alpha q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}.$$

Aus diesen n Gleichungen folgt leicht

$$q_0 = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + y_n)$$
$$p^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha^{n-1} y_2 + \alpha^{n-2} y_3 \ldots\ldots\ldots + \alpha y_n)$$
$$q_2 p^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha^{n-2} y_2 + \alpha^{n-4} y_3 \ldots\ldots\ldots + \alpha^2 y_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3 \ldots\ldots\ldots + \alpha^{n-1} y_n).$$

Man

Man sieht daraus, daſs alle die Gröſsen $p^{\frac{1}{n}}$, q_0, q_2 ...... q^{n-1} durch rationale Functionen der gegebenen Gleichung ausgedrückt werden können.

In der That ist

$$q_\mu = n^{\mu-1} \cdot \frac{y_1 + \alpha^{-\mu} y_2 + \alpha^{-2\mu} y_3 \ldots\ldots + \alpha^{-(n-1)\mu} y_n}{(y_1 + \alpha^{-1} y_2 + \alpha^{-2} y_3 \ldots\ldots + \alpha^{-(n-1)} y^n)^\mu}$$

Man nehme nun eine allgemeine Gleichung vom Grade m an, z. B.

$$0 = a + a_1 x + a_2 x^2 \ldots\ldots + a_{m-1} x^{m-1} + x^m$$

und setze, sie sei algebraisch auflösbar. Es sei

$$x = s_0 + v^{\frac{1}{n}} + s_2 v^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots + s_{n-1} v^{\frac{n-1}{n}},$$

so lassen sich dem Obigen zu Folge die Gröſsen v, s_0, s_2 etc. durch rationale Functionen von x_1, x_2 ...... x_m ausdrücken, wenn man durch x_1, x_2 .... x_m die Wurzeln der gegebenen Gleichung bezeichnet.

Nun untersuche man irgend eine der Gröſsen v, s_0, s_2 etc., zum Beispiel v. Man bezeichne durch v, v_2, ... $v_{n'}$, die verschiedenen Werthe von v, welche man findet, wenn man die Wurzeln x_1, x_2 ...... x_m auf alle mögliche Weise untereinander verwechselt, so läſst sich eine Gleichung vom Grade n' aufstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von a, a_1, ... a_{n-1} und deren Wurzeln die Gröſsen v_1, v_2 ...... $v_{n'}$ sind, welche rationale Functionen der Gröſsen x_1, x_2 ...... x_m sind. Setzt man also

$$v = t_0 + u^{\frac{1}{\nu}} + t_2 u^{\frac{2}{\nu}} \ldots\ldots + t_{\nu-1} u^{\frac{\nu-1}{\nu}}$$

so sind alle die Gröſsen $u^{\frac{1}{\nu}}$, t_0, t_2 ...... $t_{\nu-1}$ rationale Functionen von v_1, v_2, ... $v_{n'}$, also auch von x_1, x_2, ... x_m. Verfährt man eben so mit den Gröſsen u, t_0, t_2 etc., so folgt Nachstehendes:

> Wenn eine Gleichung algebraisch auflösbar ist, so kann man der Wurzel allezeit eine solche Form geben, daſs sich alle algebraische Functionen, aus welchen sie zusammengesetzt ist, durch rationale Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen.

§. III.

Ueber die Zahl der verschiedenen Werthe, welche eine Function mehrerer Gröſsen haben kann, wenn man die Gröſsen, von welchen sie abhängt, unter einander vertauscht.

Es sei v eine rationale Function mehrerer von einander unabhängiger Gröſsen x_1, x_2 ...... x_n. Die Zahl der verschiedenen Werthe, deren diese Func-

tion durch Vertauschung der Grössen, von welchen sie abhängt, fähig ist, kann nicht grösser sein als das Product $1 . 2 . 3 \ldots . n$. Dieses Product sei gleich μ. Nun sei

$$\varphi\begin{pmatrix}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\ldots\ldots\ldots\\ a\;b\;c\;d\ldots\ldots\ldots\end{pmatrix}$$

der Werth, welchen eine beliebige Function φ bekommt, wenn man darin x_a, x_b, x_c x_d etc. statt x_α, x_β, x_γ, x_δ etc. setzt, so ist klar, dass wenn man durch $A_1, A_2 \ldots . A_\mu$ die verschiedenen Formen bezeichnet, deren 1, 2, 3, 4 .... n durch Verwechselung der Zeiger $1, 2, 3 \ldots\ldots n$ fähig ist, die verschiedenen Werthe von φ durch

$$\varphi\begin{pmatrix}A_1\\A_1\end{pmatrix},\quad \varphi\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix},\quad \varphi\begin{pmatrix}A_1\\A_3\end{pmatrix}\ldots\ldots\varphi\begin{pmatrix}A_1\\A_\mu\end{pmatrix}$$

ausgedrückt werden können. Man setze, die Zahl der verschiedenen Werthe welche φ hat sei kleiner als μ, so müssen mehrere Werthe von φ einander gleich sein. Es sei also

$$\varphi\begin{pmatrix}A_1\\A_1\end{pmatrix}=\varphi\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}\ldots\ldots=\varphi\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}.$$

Unterwirft man diese Grössen der durch $\begin{pmatrix}A_1\\A_{m+1}\end{pmatrix}$ bezeichneten Verwandlung, so bekommt man die neue Reihe gleicher Werthe:

$$\varphi\begin{pmatrix}A_1\\A_{m+1}\end{pmatrix}=\varphi\begin{pmatrix}A_1\\A_{m+2}\end{pmatrix}\ldots\ldots\ldots=\varphi\begin{pmatrix}A_1\\A_{2m}\end{pmatrix},$$

welche Grössen von den vorigen verschieden, aber an Zahl ihnen gleich sind. Verwandelt man diese Grössen von Neuem, wie es durch $\begin{pmatrix}A_1\\A_{2m+1}\end{pmatrix}$ ausgedrückt wird, so erhält man ein neues System von gleichen Grössen, die sämmtlich von den vorigen verschieden sind. Fährt man auf diese Weise fort, bis die möglichen Verwandlungen erschöpft sind, so werden die μ Werthe von φ in eine gewisse Zahl von Systemen, jedes von m gleichen Werthen, zerlegt sein. Es folgt also, dass wenn die Zahl der verschiedenen Werthe von φ gleich ϱ ist, welche Zahl der Zahl der Systeme gleich kommt, dass dann

$$\varrho m = 2 . 3 . 4 \ldots\ldots\ldots n = \mu$$

sein muss, das heisst:

Die Zahl der verschiedenen Werthe, welche eine Function von n Grössen durch die möglichen Vertauschungen dieser Grössen erhalten kann, ist nothwendig ein Submultiplum des Products $1 . 2 . 3 \ldots\ldots n$; wie bekannt.

Es sei nunmehr $\binom{A_1}{A_m}$ eine beliebige Verwandlung. Dieselbe werde mit v mehreremal vorgenommen, so entsteht eine Reihe von Werthen

$$v,\ v_1,\ v_2 \ldots\ldots\ldots v_{p-1},\ v_p,$$

und es ist klar, daſs v nothwendig wiederholt vorkommen muſs. Kehrt v nach p Verwandlungen wieder, so nennt man $\binom{A_1}{A_m}$ wiederkehrende Verwandlung von der p^{ten} Ordnung. Man hat alsdann die periodische Reihe

$$v,\ v_1,\ v_2 \ldots \ldots \ldots v_{p-1},\ v,\ v_1,\ v_2 \ldots \ldots \ldots,$$

oder wenn man durch $v\binom{A_1}{A_m}^r$ den Werth von v bezeichnet, welcher entsteht, nachdem die durch $\binom{A_1}{A_m}$ bezeichnete Verwandlung r mal wiederholt worden, die Reihe

$$v\binom{A_1}{A_m}^0,\ v\binom{A_1}{A_m}^1,\ v\binom{A_1}{A_m}^2 \ldots\ldots v\binom{A_1}{A_m}^{p-1},\ v\binom{A_1}{A_m}^0 \ldots\ldots$$

Hieraus folgt, daſs

$$v\binom{A_1}{A_m}^{\alpha p+r} = v\binom{A_1}{A_m}^r$$

$$v\binom{A_1}{A_m}^{\alpha p} = v\binom{A_1}{A_m}^0 = v.$$

Nun setze man, p sei die gröſste in n enthaltene Primzahl, und die Zahl der verschiedenen Werthe von v sei kleiner als p, so müssen unter p beliebigen Werthen von v nothwendig zwei einander gleich sein.

Es müssen also zwei von den p Werthen

$$v\binom{A_1}{A_m}^0,\ v\binom{A_1}{A_m}^1,\ v\binom{A_1}{A_m}^2 \ldots\ldots v\binom{A_1}{A_m}^{p-1}$$

gleich sein. Es sei z. B.

$$v\binom{A_1}{A_m}^r = v\binom{A_1}{A_m}^{r'},$$

so folgt daraus

$$v\binom{A_1}{A_m}^{r+p-r} = v\binom{A_1}{A_m}^{r'+p-r}$$

Dieses giebt, weil $v\binom{A_1}{A_m}^p = v$, wenn man r statt $r'+p-r$ setzt,

$$v = v\binom{A_1}{A_m}^r,$$

wo r offenbar kein Vielfaches von p ist. Der Werth von ϱ wird also durch die Substitution $\binom{A_1}{A_m}^r$ nicht mehr verwandelt, folglich auch nicht durch die Wiederholung derselben. Es ist also

$$\varrho = \varrho \binom{A_1}{A_m}^{r\alpha},$$

wo α eine ganze Zahl bedeutet.

Wenn nun p eine Primzahl ist, so läſst sich offenbar immer eine ganze Zahl β finden, von der Art, daſs

$$r\alpha = p\beta + 1.$$

Also ist

$$\varrho = \varrho \binom{A_1}{A_m}^{p\beta+1},$$

oder weil $\varrho = \varrho \binom{A_1}{A_m}^{p\beta}$ war,

$$\varrho = \varrho \binom{A_1}{A_m}.$$

Der Werth von ϱ wird also durch die wiederkehrende Verwandlung $\binom{A_1}{A_m}$ vom Grade p <u>nicht</u> verändert.

Nun ist klar, daſs

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\delta\ldots\ldots\zeta\eta\\ \beta\gamma\delta\varepsilon\ldots\ldots\eta\alpha\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots\ldots\eta\alpha\\ \gamma\alpha\beta\delta\ldots\ldots\zeta\eta\end{pmatrix}$$

zwei wiederkehrende Verwandlungen vom Grade p sind, wenn die Zahl der Zeiger $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots \eta$ gleich p ist. Der Werth von ϱ wird also auch durch die Verbindung dieser beiden Verwandlungen nicht verändert. Die beiden Verwandlungen sind aber offenbar gleich bedeutend mit der einen

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\\ \gamma\alpha\beta\end{pmatrix}$$

und diese eine mit den beiden nach einander vorgenommenen

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \beta\alpha\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}\beta\gamma\\ \gamma\beta\end{pmatrix}.$$

Der Werth von ϱ wird also durch diese beiden mit einander verbundenen Verwandlungen nicht verändert. Also ist

$$\varrho = \varrho \begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \beta\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\gamma\\ \gamma\beta\end{pmatrix}$$

und eben so

$$\varrho = \varrho \begin{pmatrix}\beta\gamma\\ \gamma\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\delta\\ \delta\gamma\end{pmatrix},$$

woraus

$$\varrho = \varrho \binom{\alpha\beta}{\beta\alpha} \binom{\gamma\delta}{\delta\gamma}$$

folgt.

Man sieht hieraus, dafs die Function ϱ durch zwei aufeinander folgende Verwandlungen von der Form $\binom{\alpha\beta}{\beta\alpha}$, wenn α und β zwei beliebige Zeiger sind, nicht verändert wird. Nennt man daher eine solche Verwandlung, Versetzung (Transposition), so folgt, dafs ein beliebiger Werth von ϱ durch eine grade Zahl von Versetzungen nicht verändert wird, und dafs folglich alle Werthe von ϱ, welche eine ungrade Zahl von Versetzungen geben, gleich sind. Jede beliebige Vertauschung der Elemente einer Function kann aber durch eine gewisse Zahl von Versetzungen geschehen: Die Function ϱ kann also nicht mehr als zwei verschiedene Werthe haben. Dieses giebt folgenden Lehrsatz:

Die Zahl der verschiedenen Werthe einer Function von n Gröfsen kann entweder gar nicht bis unter die gröfste Primzahl, die sich unter den Factoren von n befindet, vermindert werden, oder nur bis auf 2 oder 1.

man sehe die Errata

Es ist also unmöglich, eine Function von fünf Gröfsen zu finden, welche 3 oder 4 verschiedene Werthe hätte.

Der Beweis dieses Lehrsatzes ist aus einem Mémoire von Cauchy genommen, welches sich in dem 17ten Hefte des *Journal de l'école polytechnique* pag. 1 etc. befindet.

Es mögen nun ϱ und ϱ' zwei Functionen sein, welche jede zwei verschiedene Werthe haben, so ist dem Vorigen zufolge klar, dafs wenn man durch ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_1', ϱ_2' jene doppelten Werthe bezeichnet, dafs alsdann die beiden Ausdrücke

$$\varrho_1 + \varrho_2 \text{ und } \varrho_1 \varrho_1' + \varrho_2 \varrho_2'$$

symmetrische Functionen sind. Es sei

$$\varrho_1 + \varrho_2 = t \text{ und } \varrho_1 \varrho_1' + \varrho_2 \varrho_2' = t_1,$$

so findet man

$$\varrho_1 = \frac{t \cdot \varrho_2' - t_1}{\varrho_2' - \varrho_1'}.$$

Man setze nunmehr die Zahl der Gröfsen $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_m$ sei fünf, so ist das Product

$$\varrho = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5)$$
$$(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5)$$

offenbar eine Function, welche zwei verschiedene Werthe hat; der zweite

Werth ist die nemliche Function mit entgegengesetztem Zeichen. Setzt man also $\varrho_1{}' = \varrho$, so ist $\varrho_2{}' = -\varrho$. Der Ausdruck von ϱ_1 ist also

$$\varrho_1 = \frac{t_1 + \varrho t_2}{2\varrho}, \text{ oder}$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2} t_2 + \frac{t_1}{2\varrho^2}\varrho,$$

wo $\frac{1}{2} t_2$ eine symmetrische Function ist. ϱ hat zwei Werthe, die nur dem Zeichen nach verschieden sind, so dafs also $\frac{t_1}{2\varrho^2}$ ebenfalls eine symmetrische Function ist. Setzt man also $\frac{1}{2} t_2 = p$ und $\frac{t_1}{2\varrho_2} = q$, so folgt

> dafs jede Function von fünf Gröfsen, welche zwei verschiedene Werthe hat, durch $p + q \cdot \varrho$ ausgedrückt werden kann, wo p und q zwei symmetrische Functionen sind und
>
> $$\varrho = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots\ldots (x_4 - x_5)$$
>
> ist.

Für unsern Zweck ist noch die allgemeine Form der Functionen von fünf Gröfsen nöthig, welche fünf verschiedene Werthe haben. Man kann dieselben, wie folgt, finden.

Es sei ϱ eine rationale Function der Gröfsen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, welche die Eigenschaft hat, unveränderlich zu sein, wenn man beliebige vier von den fünf Gröfsen z. B. x_2, x_3, x_4, x_5 untereinander vertauscht. Unter dieser Bedingung ist ϱ offenbar nach x_2, x_3, x_4, x_5 symmetrisch. Man kann also ϱ durch eine rationale Function von x_1 und symmetrische Functionen von x_2, x_3, x_4, x_5 ausdrücken. Jede symmetrische Function dieser Gröfsen kann aber durch eine rationale Function der Coefficienten einer Gleichung vom vierten Grade ausgedrückt werden, deren Wurzeln x_2, x_3, x_4, x_5 sind. Setzt man also

$$(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s,$$

so kann die Function ϱ durch eine rationale Function von x_1, p, q, r, s ausgedrückt werden. Setzt man aber

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5) = x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e,$$

so erhält man

$$(x - x_1)(x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s) = x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e$$
$$= x^5 - (p + x_1)x^4 + (q + px_1)x^3 - (r + qx_1)x^2 + (s + rx_1)x - sx_1,$$

woraus

$$p = a - x_1$$
$$q = b - ax_1 + x_1^2$$

$$r = c - bx_1 + ax_1^2 - x_1^3$$
$$s = d - cx_1 + bx_1^2 - ax_1^3 + x_1^4$$

folgt. Es läſst sich also ϱ durch eine rationale Function von x_1, a, b, c, d und e ausdrücken.

Daraus folgt, daſs man ϱ auf folgende Gestalt bringen kann:

$$\varrho = \frac{t}{\varphi(x_1)}$$

wo t und $\varphi(x_1)$ zwei ganze Functionen von x_1, a, b, c, d und e sind. Multiplicirt man diesen Bruch oben und unten mit $\varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4), \varphi(x_5)$, so findet man

$$\varrho = \frac{t \cdot \varphi(x_2) \cdot \varphi(x_3) \cdot \varphi(x_4) \cdot \varphi(x_5)}{\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdot \varphi(x_3) \cdot \varphi(x_4) \cdot \varphi(x_5)}.$$

Nun ist $\varphi(x_2) \cdot \varphi(x_3) \cdot \varphi(x_4) \cdot \varphi(x_5)$, wie man sieht, eine ganze und symmetrische Function von x_2, x_3, x_4, x_5. Man kann also dieses Product durch eine ganze Function von p, q, r, s ausdrücken, also auch durch eine ganze Function von x_1, a, b, c, d. Der Zähler des obigen Bruchs ist also eine ganze Function der nemlichen Gröſse; der Nenner ist eine symmetrische Function von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 und kann also durch eine rationale Function von a, b, c, d, e ausgedrückt werden. Daraus folgt, daſs man

$$\varrho = r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 \ldots\ldots\ldots + r_m x_1^m$$

setzen kann. Multiplicirt man die Gleichung

$$x_1^5 = ax_1^4 - bx_1^3 + cx_1^2 - dx_1 + e$$

mit $x_1, x_1^2 \ldots\ldots\ldots x_1^{m-5}$, so ist klar, daſs man $m - 4$ Gleichungen erhält, aus welchen sich der Reihe nach $x_1^5, x_1^6 \ldots\ldots\ldots x_1^m$ finden lassen, und zwar durch Gröſsen von der Form

$$\alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 + \delta x_1^3 - \varepsilon x_1^4,$$

in welchen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ rationale Functionen von a, b, c, d, e sind.

Man kann also ϱ auf die Form

$$\varrho = r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 + r_3 x_1^3 + r_4 x^4 \qquad (a)$$

bringen, wo r_0, r_1, r_2 etc. rationale Functionen von a, b, c, d, e sind, das heiſst symmetrische Functionen von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Dieses ist die allgemeine Form der Functionen, welche sich nicht verändern, wenn man die Gröſsen x_2, x_3, x_4, x_5 vertauscht. Sie haben entweder fünf verschiedene Werthe, oder sie sind symmetrisch.

Es sei nunmehr ϱ irgend eine rationale Function von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, welche die fünf Werthe $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5$ hat. Man nehme die Function $x_1^m \varrho$.

Verwechselt man in derselben die vier Gröſsen x_2, x_3, x_4, x_5 auf alle mögliche Art, so wird $x_1^m \rho$ jedesmal einen der Werthe

$$x_1^m \rho_1,\ x_1^m \rho_2,\ x_1^m \rho_3,\ x_1^m \rho_4,\ x_1^m \rho_5$$

bekommen.

Nun behaupte ich, daſs die Zahl der durch diese Vertauschung entstehenden Werthe von $x_1^m \rho$ kleiner als fünf ist. Denn nimmt man alle fünf Werthe an, so entstehen durch die Vertauschung von x_1 mit x_2, x_3, x_4, x_5 aus diesen Werthen zwanzig andere, die nothwendig unter sich und von den vorigen verschieden sind. Die Function würde also überhaupt 25 verschiedene Werthe haben, welches nicht möglich ist; denn 25 ist kein Divisor des Products 1.2.3.4.5. Bezeichnet man also durch μ die Zahl der Werthe, welche ρ bekommt, wenn man die Gröſsen x_2, x_3, x_4, x_5 unter einander vertauscht, so muſs μ einen der vier Werthe 1, 2, 3, 4 haben.

1. Es sei $\mu = 1$, so ist ρ, vermöge des Obigen, von der Form (a).

2. Es sei $\mu = 4$, so ist $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4$ eine Function von der Form (a). Es ist aber

$$\rho_5 = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5) - (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4)$$

= einer symmetrischen Function, weniger $(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4)$; also ist ρ_5 von der Form (a).

3. Es sei $\mu = 2$, so ist $\rho_1 + \rho_2$ eine Function von der Form (a). Es sei also

$$\rho_1 + \rho_2 = r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 + r_3 x_1^3 + r_4 x_1^4 = \varphi(x_1)$$

Vertauscht man der Reihe nach x_1 mit x_2, x_3, x_4, x_5, so erhält man

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 &= \varphi(x_1) \\ \rho_2 + \rho_3 &= \varphi(x_2) \\ &\dots\dots\dots \\ \rho_{m-1} + \rho_m &= \varphi(x_{m-1}) \\ \rho_m + \rho_1 &= \varphi(x_m), \end{aligned}$$

wo m eine der Zahlen, 2, 3, 4, 5 ist. Für $m = 2$ ist $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, welches nicht möglich ist, weil die Zahl der Werthe von $\varphi(x_1)$ fünf sein soll. Für $m = 3$ ist

$$\rho_1 + \rho_2 = \varphi(x_1),\ \rho_2 + \rho_3 = \varphi(x_2),\ \rho_3 + \rho_1 = \varphi(x_3),$$

welches

$$2\rho_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_3)$$

giebt. Das zweite Glied dieser Gleichung hat aber mehr als fünf Werthe, nemlich 30. Auf dieselbe Weise läſst sich zeigen, daſs auch m nicht gleich 4 sein kann. μ kann also nicht gleich zwei sein.

4. Es

4. Es sei $\mu = 3$. Alsdann hat $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3$, folglich auch $\varrho_4 + \varrho_5 = (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 + \varrho_5) - (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)$, fünf Werthe. Wir sahen aber, dafs diese Voraussetzung nicht Statt findet. Also kann auch nicht $\mu = 3$ sein.

Zusammengenommen also findet man folgenden Lehrsatz:

Jede rationale Function von fünf Gröfsen, welche fünf verschiedene Werthe hat, ist nothwendig von der Form

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4,$$

wo r_0, r_1, r_2 etc. symmetrische Functionen sind, und x eine von den fünf Gröfsen ist.

Aus

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 = \varrho$$

findet man leicht, wenn man von der gegebenen Gleichung Gebrauch macht, den Werth von x, wie folgt, ausgedrückt

$$x = s_0 + s_1 \varrho + s_2 \varrho^2 + s_3 \varrho^3 + s_4 \varrho^4$$

wo s_0, s_1, s_2 etc. eben wie r_0, r_1, r_2, etc., symmetrische Functionen sind.

Es sei ϱ irgend eine rationale Function, welche m verschiedene Werthe ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 ...... ϱ_m hat. Setzt man

$$(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)(\varrho - \varrho_3) \ldots\ldots (\varrho - \varrho_m)$$
$$= q_0 + q_1 \varrho + q_2 \varrho^2 \ldots\ldots + q_{m-1} \varrho^{m-1} + \varrho^m = 0,$$

so sind bekanntlich q_0, q_1, q_2 .... symmetrische Functionen, und die m Wurzeln der Gleichung sind ϱ_1, ϱ_2 ...... ϱ_m. Nun behaupte ich, dafs es unmöglich ist, den Werth von ϱ als Wurzel einer Gleichung von derselben Form, aber von einem niedrigeren Grade auszudrücken. Denn es sei

$$t_0 + t_1 \varrho + t_2 \varrho^2 \ldots\ldots + t_{\mu-1} \varrho^{\mu-1} + \varrho^\mu = 0$$

eine solche Gleichung, wo t_0, t_1 etc. symmetrische Functionen sind, und ϱ_1 sei ein Werth von ϱ, der der Gleichung genug thut, so ist

$$\varrho^\mu + t_{\mu-1} \varrho^{\mu-1} \ldots\ldots = (\varrho - \varrho_1) \,.\, P_1.$$

Verwechselt man nun unter einander die Elemente der Function, so findet man folgende Reihe von Gleichungen:

$$\varrho^\mu + t_{\mu-1} \varrho^{\mu-1} \ldots\ldots = (\varrho - \varrho_2) \,.\, P_2,$$
$$\varrho^\mu + t_{\mu-1} \varrho^{\mu-1} \ldots\ldots = (\varrho - \varrho_3) \,.\, P_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varrho^\mu + t_{\mu-1} \varrho^{\mu-1} \ldots\ldots = (\varrho - \varrho_m) \,.\, P_m.$$

Daraus folgt, dafs $\varrho - \varrho_1$, $\varrho - \varrho_2$, $\varrho - \varrho$ ....$\varrho - \varrho_m$ sämmtlich Factoren

von $\varrho^\mu + t_{\mu-1}\varrho^{\mu-1}$ ...... sind, und dafs folglich μ nothwendig gleich m sein mufs. Man erhält daher folgenden Lehrsatz:

Wenn eine rationale Function mehrerer Gröfsen m verschiedene Werthe hat, so läfst sich allezeit eine Gleichung vom Grade m finden, deren Coefficienten symmetrische Functionen sind, und welche jene Werthe zu Wurzeln haben; aber es ist nicht möglich eine Gleichung von der nämlichen Form von niedrigerem Grade aufzustellen, welche einen oder mehrere jener Werthe zu Wurzeln hat.

§. IV.
Beweis der Unmöglichkeit der allgemeinen Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

Vermöge der oben gefundenen Sätze zusammengenommen läfst sich behaupten:

dafs es unmöglich ist, Gleichungen vom fünften Grade allgemein aufzulösen.

Nach (§. II.) nämlich können alle algebraische Functionen, aus welchen ein algebraischer Ausdruck der Wurzeln zusammengesetzt sein mag, durch rationale Functionen der Wurzeln der Gleichung ausgedrückt werden.

Da es nun unmöglich ist, die Wurzel einer Gleichung allgemein durch eine rationale Function der Coefficienten auszudrücken, so mufs

$$R^{\frac{1}{m}} = \varrho$$

sein, wo m eine Primzahl und R eine rationale Function der Coefficienten der gegebenen Gleichung, das heifst, eine symmetrische Function der Wurzeln ist; ϱ ist eine rationale Function der Wurzeln. Daraus folgt:

$$\varrho^m - R = 0$$

und da es zufolge (§. II.) unmöglich ist, den Grad dieser Gleichung zu erniedrigen, so wird die Function ϱ, zufolge des letzten Lehrsatzes im vorigen Paragraph, m verschiedene Werthe haben. Da nun m ein Divisor von $1 . 2 . 3 . 4 . 5$ sein mufs, so kann m gleich 2, 3 oder 5 sein. Nun existirt aber zufolge (§. III.) keine Function von fünf Gröfsen, welche 3 Werthe hat: es mufs also $m = 5$ oder $m = 2$ sein. Es sei $m = 5$: so erhält man, zufolge des vorigen Paragraphs,

$$\sqrt[5]{R} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4$$

und hieraus

$$x = s_0 + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}}.$$

Nach (§. II.) folgt daraus

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5,$$

wo $\alpha^5 = 1$. Diese Gleichung ist unmöglich, weil das zweite Glied 120 Werthe hat, und gleichwohl die Wurzel einer Gleichung vom fünften Grade $z^5 - s_1{}^5 R = 0$ ist.

Es mufs also $m = 2$ sein.

Alsdann ist nach (§. II.)

$$\sqrt{R} = p + qs,$$

wo p und q symmetrische Functionen sind, und

$$s = (x_1 - x_2) \ldots\ldots (x_4 - x_5)$$

ist. Also ist, wenn man x_1 mit x_2 vertauscht,

$$-\sqrt{R} = p - qs,$$

woraus $p = 0$ und $\sqrt{R} = qs$ folgt. Man sieht daraus, dafs alle algebraische Functionen vom ersten Grade, welche sich in dem Ausdruck der Wurzeln befinden, von der Form $\alpha + \beta . \sqrt{s^2} = \alpha + \beta s$ sein müssen, wo α und β symmetrische Functionen sind. Da es nun unmöglich ist, die Wurzeln durch eine Function von der Form $\alpha + \beta \sqrt{R}$ auszudrücken, so mufs eine Gleichung von der Form

$$\sqrt[m]{(\alpha + \beta \sqrt{s^2})} = v$$

Statt finden, wo α und β nicht gleich Null sind, m eine Primzahl ist, α und β symmetrische Functionen sind, und v eine rationale Function der Wurzeln ist. Dieses giebt

$$\sqrt[m]{(\alpha + \beta s)} = v_1 \text{ und } \sqrt[m]{(\alpha - \beta s)} = v_2,$$

wo v_1 und v_2 rationale Functionen sind. Multiplicirt man v_2 mit v_1 so erhält man $v_2 v_1 = \sqrt[m]{(\alpha^2 - \beta^2 s^2)}$.

Nun ist $\alpha^2 - \beta^2 s^2$ eine symmetrische Function. Wenn also $\sqrt[m]{(\alpha^2 - \beta^2 s^2)}$ nicht eine symmetrische Function wäre, so müfste, dem Obigen zufolge, $m = 2$ sein. Alsdann aber ist $v = \sqrt{(\alpha + \beta\sqrt{s^2})}$, und v hat folglich vier verschiedene Werthe; welches nicht möglich ist. Es mufs also $\sqrt[m]{(\alpha^2 - \beta^2 s^2)}$ eine symmetrische Function sein. Eine solche Function sei γ, so ist

$$v_2 v_1 = \gamma \text{ und } v_2 = \frac{\gamma}{v_1}.$$

Nun nehme man den Ausdruck

$$v_1 + v_2 = \sqrt[m]{(\alpha + \beta\sqrt{s^2})} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{(\alpha + \beta\sqrt{s^2}}} = p$$

$$= \sqrt[m]{R} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{R}} = R^{\frac{1}{m}} + \frac{\gamma}{R} R^{\frac{m-1}{m}}.$$

Man bezeichne die Werthe, welche p bekommen kann, wenn man $\alpha R^{\frac{1}{m}}$, $\alpha^2 R^{\frac{1}{m}}$, $\alpha^3 R^{\frac{1}{m}} \ldots\ldots\ldots \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}$ statt $R^{\frac{1}{m}}$ setzt, wo

$$\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} \ldots\ldots, \ldots + \alpha + 1 = 0$$

ist, durch $p_1, p_2 \ldots\ldots\ldots p_m$, und mache das Product

$$(p - p_1)(p - p_2) \ldots\ldots (p - p_m) = p^m - Ap^{m-1} + A_1 p^{m-2} \ldots\ldots = 0,$$

so ist leicht zu sehen, dafs A, A_1 etc. rationale Functionen der Coefficienten der gegebenen Gleichung, also symmetrische Functionen der Wurzeln sein werden. Diese Gleichung ist aber offenbar irreductibel. Also mufs p, zufolge des letzten Lehrsatzes im vorigen Paragraph, als Function der Wurzeln betrachtet, m verschiedene Werthe haben. Folglich ist $m = 5$. Alsdann aber ist p von der Form (a) im vorigen Paragraph. Also wird

$$\sqrt[5]{R} + \frac{y}{\sqrt[5]{R}} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 = p,$$

folglich $$x = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + s_3 p^3 + s_4 p^4,$$

das heifst, es wird, wenn man $R^{\frac{1}{5}} + \frac{y}{R} R^{\frac{4}{5}}$ statt p setzt,

$$x = t_0 + t_1 R^{\frac{1}{5}} + t_2 R^{\frac{2}{5}} + t_3 R^{\frac{3}{5}} + t_4 R^{\frac{4}{5}}$$

sein, wo t_0, t_1, t_2 etc. rationale Functionen von R und von den Coefficienten der gegebenen Gleichung sind. Daraus folgt, vermöge (§. II.)

$$t_1 R^{\frac{1}{5}} = x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5 = p,$$

wo $$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

ist. Aus $p = t_1 R^{\frac{1}{5}}$ folgt aber $p^5 = t_1{}^5 R$, und weil $t_1{}^5 R$ von der Form $u + u^1 \sqrt{s^2}$ ist, $p^5 = u + u^1 \sqrt{s^2}$, welches

$$(p^5 - u)^2 = u^{12} s^2$$

giebt. Diese Gleichung giebt, wie man sieht, p durch eine Gleichung vom 10ten Grade, deren Coefficienten sämmtlich symmetrische Functionen sind, welches aber, zufolge des letzten Lehrsatzes im vorigen Paragraph, nicht möglich ist; denn da

$$p = x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^4 x_4 + \alpha x_5$$

ist, so würde p, 120 verschiedene Werthe haben; welches ein Widerspruch ist.

Wir schliefsen aus diesem Allen:

dafs es unmöglich ist, Gleichungen vom fünften Grade allgemein algebraisch aufzulösen.

Daraus folgt unmittelbar weiter, dafs es ebenfalls unmöglich ist, Gleichungen von höheren als dem fünften Grade allgemein aufzulösen. Mithin sind die Gleichungen, welche sich algebraisch allgemein auflösen lassen, nur die von den vier ersten Graden.

9.

Ueber die Schwung-Pumpe.

(Vom Herausgeber.)

Es kommt häufig vor, dafs man das Wasser über seine Oberfläche auf gröfsere oder geringere Höhen empor zu heben wünscht, z. B. wenn man niedrige Marsch-Gegenden vom Wasser befreien will, wenn man unter Wasser bauen will, bei Wasserleitungen, denen es an Gefälle fehlt, bei Salinen, wenn die Soole gradirt werden soll, bei Brunnen, und in vielen andern Fällen. Die Werkzeuge, deren man sich dazu bedient, sind sehr mannichfach. Wo es an Raum fehlt, zieht man mit Recht die Pumpen vor, und wenn die Höhen ansehnlich sind, die Paternoster-Werke, die durch die Verbesserung des Herrn Leideritz in der That eine grofse Vervollkommenung erhalten haben. Wenn die Höhe gering ist, und viel Wasser gehoben werden soll, bedient man sich der Wurfschaufeln. Aber Pumpen, Paternosterwerke und dergleichen sind immer sehr zusammengesetzte Maschinen, und sie lassen, wie das Schaufelwerk, viel an Kraft verloren gehen. Es ist bekannt, dafs der Kraftverlust der Pumpen ein Drittheil bis zur Hälfte, ja bei schlechten hölzernen Pumpen, drei Viertheile bis fünf Sechstheile der angewendeten Kraft beträgt. Und jemehr bewegliche Theile eine Maschine hat, überhaupt je zusammengesetzter sie ist, je vergänglicher ist sie auch. Unterbrechungen der Wirkung aber sind gewöhnlich für den Zweck der Maschine besonders nachtheilig. Man glaubt wohl zuweilen, durch die Künstlichkeit einer Maschine noch einen Theil des nutzbaren Effects zu gewinnen, allein selten gelingt dieses, und wenn auch der Gewinn, so lange die Maschine im Gange ist, Statt findet, so geht wieder desto mehr durch mögliche Unterbrechungen verloren. Die besten Maschinen sind in den meisten Fällen die einfachsten. Ist den Dampfmaschinen, die in neuern Zeiten fast das Wunderbare leisten, noch etwas zu wünschen, so ist es eine gröfsere Einfachheit.

In vielen Fällen läfst sich nun mit grofsem Vortheil von jener Maschine Gebrauch machen, welche die Ueberschrift dieses Aufsatzes nennt, und welche wohl die einfachste von allen möglichen ist, weil sie gar keine gegen einander bewegliche Theile hat. Man kann sie Schwung-Pumpe nennen, weil ihre

Wirkung auf der Schwungkraft beruht. Man stelle sich eine Röhre *BMC* Fig. 10. vor, die unten und oben offen und an eine senkrechte Axe *AC* befestigt ist. Die Röhre sei um die Tiefe *HC* unter das Wasser *GH* getaucht. Wird nun das Werkzeug mit hinreichender Geschwindigkeit um die Axe *AC* herumgedreht, so wird das Wasser, welches sich in *GC* befindet, vermöge der Schwungkraft in die Röhre hinaufgetrieben, und es wird oben bei *B* ausfliefsen.

Die Idee dieses Werkzeuges ist zu einfach, als dafs sie neu sein könnte. Es kommt nur auf die beste Benutzung derselben an. Herr Langsdorf in Heidelberg hat schon vor längerer Zeit eine Maschine angegeben und in seinen Schriften beschrieben, die er Saug-Schwungmaschine nennt, und die auf der Benutzung der Schwungkraft beruht. Die dort umher geschwungenen Röhren tauchen aber nicht bis ins Wasser, sondern dasselbe mufs erst durch eine, den unteren Theil der Axe bildende senkrechte Röhre von dem Uebergewicht der Luft hinaufgedrückt, oder wie man sagt, aufgesogen werden, welches die Wirkung vermindert. In der Abhandlung über Maschinen von Hachette befindet sich die Zeichnung einer ähnlichen Maschine, deren Röhren auch in's Wasser tauchen. Die Röhren sind aber gradlinig, welches die Wirkung wiederum schwächt. In der Schrift von Lanz und Betancourt kommt, wie ich mich zu erinnern glaube, ebenfalls eine solche Maschine vor. Ferner erinnere ich mich, irgendwo gelesen zu haben, dafs eine solche Maschine in der Schweiz, von einem Landmanne, im Grofsen mit gutem Erfolge benutzt worden ist, um Wiesen zu entwässern. Auch glaube ich, vor mehreren Jahren im französischen Moniteur von der Ausführung einer solchen Maschine in Frankreich, nach der Angabe eines Hydraulikers, Namens Mannouri-Dectot, gelesen zu haben, des nemlichen, der dem Institut im Jahre 1813 mehrere von demselben beifällig beurtheilte, auf dem Heber der Hydreole und dem wogenartigen Schwanken des Wassers beruhenden Maschinen vorgelegt hat. Endlich befindet sich in der neuen Ausgabe der Hydraulik von Dubuat eine Abhandlung über diese Art von Maschinen, wo auch die richtige Gestalt des Weges, welchen man dem aufsteigenden Wasser vorzeichnen mufs, gefunden wird. Auch mag leicht noch an andern Orten von dieser Maschine die Rede gewesen sein. Bei dem Allen aber ist das Werkzeug wenig bekannt, und noch weniger davon bis jetzt ein allgemeinerer Gebrauch gemacht worden. Gleichwohl gehört es unstreitig zu den vollkommensten in seiner Art. Sein gröfster Vorzug besteht darin, dafs es, wie gesagt, ganz fest gebaut werden kann und am wenigsten vergänglich ist; denn es hat gar keine Klappen, Kolben oder andere beweglichen Theile. Ferner kann

damit sogar mit Sand und Schlamm angefülltes Wasser geschöpft werden, welches durch Pumpen oder andere Werkzeuge mit Klappen, nicht wohl angeht. Auch ist es nicht einmal nöthig, dafs die Maschine aus einzelnen Röhren, die schon von Metall sein müfsten, bestehe. Sie kann sogar ganz aus Holz gemacht werden, wenn man ihr z. B. die Form einer sphäroïdischen Schale giebt, die sich um ihre Axe dreht, und in dieser Schale, in verticalen, durch die Axe gehenden Ebenen einige Diaphragmen oder Scheidewände anbringt, so dafs das Ganze etwa die Gestalt eines senkrecht auf die lange Axe in der Mitte durchschnittenen Kürbis bekommt. Alsdann können sich selbst kaum mehr die Röhren verstopfen, und man kann mit dem Werkzeuge eben so wohl Sand und andere kleine Körper als Wasser in die Höhe treiben.

Wegen dieser bedeutenden Vorzüge ist es wohl nicht unnütz, auf das Werkzeug von Neuem aufmerksam zu machen. Wir wollen, weil hier von dem mathematischen Theile des Gegenstandes insbesondere die Rede sein mufs, die Gestalt untersuchen, die die Röhren der Schwung-Pumpe haben müssen, damit sie am meisten wirken, desgleichen die Kraft, die zu ihrer Bewegung nöthig ist, sammt dem Effect-Verlust. So wenig sonst häufig in der Ausübung den Theilen einer Maschine genau die Gestalt, welche eine mathematische Untersuchung findet, gegeben werden kann und auch gegeben werden darf, weil selten die Vordersätze der mathematischen Berechnung ganz sicher sind, so ist doch bei diesem Werkzeuge wirklich die Gestalt der Röhren wichtig. Denn giebt man denselben nicht grade die Form, welche sie haben müssen, damit das Wasser überall ein g l e i c h e s Bestreben hat, aufzusteigen, so wird entweder ein Theil dem anderen voreilen oder zurückbleiben, welches einen bedeutenden Kraftverlust nach sich ziehen, und ein Grund sein kann, weshalb sich das Werkzeug nicht so wirksam zeigt, als es wirklich sein kann.

Um aber nicht bei Feinheiten zu verweilen, die für die Ausübung doch keinen Nutzen haben, wollen wir den Widerstand an den Wänden der Röhre bei Seite setzen, die Röhre gleich weit annehmen und auch blofs auf das Gleichgewicht und den Beharrungsstand Rücksicht nehmen. Um aber zugleich für die mathematische M e t h o d e aus der Aufgabe einigen Nutzen zu ziehen, werde ich sie auf die Weise auflösen, über welche ich in einer kleinen Schrift: „Ueber die Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Gröfsen auf Geometrie und Mechanik, Berlin 1821, in der Maurerschen Buchhandlung" geredet habe, und auch an diesem Beispiele zeigen, dafs das Unendlich-Kleine nirgend nothwendig ist,

sondern dafs auch zu den Anwendungen der sogenannten Infinitesimal-Rechnung die blofse Algebra zureicht.

Es sei AC die Axe, BC die centrische Linie der Röhre, die sich um die Axe herumdrehen soll. Die Röhre sei mit Wasser gefüllt, so wird dieses Wasser durch den Schwung ein Bestreben bekommen, sich von der Axe zu entfernen, z. B. das Wasser in M wird sich bestreben, nach PM fortzugehen. Da aber die Festigkeit der Röhre diese Bewegung hindert, so wird das Wasser nach der Länge der Röhre ausweichen, und folglich nach ME hinaufgetrieben werden.

Ausser der Schwungkraft wirkt aber zugleich die Schwere auf das Wasser, und treibt z. B. das Wasser in M nach der senkrechten Richtung MF nach unten. Da dieser Bewegung wiederum die Festigkeit der Röhre entgegensteht, so wird das Wasser wiederum nach der Länge der Röhre ausweichen und folglich nach MG hinabgetrieben werden. Die Schwere treibt also das Wasser hinab, die Schwungkraft hinauf. Sind nun die beiden, aus der Schwere und der Schwungkraft entstehenden Kräfte gleich grofs, so wird das Wasser ruhen und in der Röhre durch den Schwung gleichsam schwerlos gemacht werden. Taucht man daher die untere Oeffnung C unter das Wasser, so wird das Wasser, wenn man die Röhre hinreichend schnell umdreht, bei B mit einer Geschwindigkeit ausfliefsen, die der Druckhöhe des Wassers über der untern Oeffnung bei C zukommt. Die Röhre mufs also, wenn die Bewegung in derselben ohne Hindernifs gleichförmig vor sich gehen soll, diejenige Gestalt haben, für welche der aus der Schwungkraft entstehende Trieb nach oben, und der Trieb nach unten, den die Schwere hervorbringt, überall gleich grofs sind. Diese Gestalt ist offenbar nicht geradlinig, weil zwar die Schwere überall gleich grofs ist, nicht aber die Schwungkraft, die vielmehr von der Geschwindigkeit abhängt, welche, weil die Winkel-Geschwindigkeit dieselbe ist, im Verhältnifs der verschiedenen Entfernungen der Röhre von der Axe verschieden ist.

Es sei

$$CP = x,\ PM = y;$$

die Geschwindigkeit des Punctes M gleich v.;

die Schwungkraft desselben nach der Richtung PM gleich u; die Schwere gleich 1:

so ist nach bekannten mechanischen Regeln

$$u = \frac{v^2}{2gy},$$

wo

wo $2g$ gleich $30\frac{1}{4}$ rheinländische Fuſse ist. Die aus dieser Kraft entstehende beschleunigende Kraft, nach der Richtung der Tangente MN, ist $u.\frac{ND}{MN}$, die aus der Schwere $=1$ entstehende beschleunigende Kraft, gleichfalls nach der Richtung der Tangente, aber der vorigen entgengesetzt, nach MG ist $1.\frac{DM}{MN}$. Also muſs überall $u.\frac{ND}{MN}=\frac{DM}{MN}$ sein, woraus

$$u=\frac{DM}{ND}$$

folgt. Da nun NM die Tangente an M ist, so ist, wie bekannt,

$$\frac{DM}{ND}=\frac{1}{dy}$$

wo dy die erste Ableitung (den sogenannten Differential-Coefficienten, nicht das Differential, nicht etwas Unendlich-Kleines) bedeutet. (Wenn man nämlich

$$y=fx \text{ und } x+k \text{ statt } x \text{ setzt, so ist}$$

$$y+\Delta y=y+k\,dy+\frac{k^2}{2}d^2y+\frac{k^3}{2.3}d^3y\ldots\ldots,$$

woraus die Bedeutung von dy zu ersehen). Es muſs also sein $u=\frac{1}{dy}$ oder

$$u\,dy=1.$$

Nun war $u=\frac{v^2}{2gy}$, also muſs sein:

$$v^2\,dy=2gy.$$

Die Umlaufszeit um die Axe ist für alle y gleich groſs. Sie sei τ Secunden, so ist

$$2\pi y=\tau v,$$

woraus $v^2=\frac{4\pi^2y^2}{\tau^2}$ folgt. Also muſs sein:

$$\frac{4\pi^2y^2}{\tau^2}\,dy=2gy, \text{ oder}$$

$$2y\,dy=g\frac{\tau^2}{\pi^2},$$

woraus $y^2=\frac{g\tau^2x}{\pi^2}+\text{Const.}$, oder da $y=0$ für $x=0$ sein soll, also Const. $=0$ ist,

$$y^2=\frac{\tau^2gx}{\pi^2}$$

folgt, welches die Gleichung der Röhren-Linie ist. Diese Gleichung kommt einer Parabel zweiter Ordnung zu; also muſs die centrische Linie der

Röhre eine solche Parabel sein. Ihr Scheitel liegt in C. Macht man statt der Röhre eine offene Schale, mit verticalen Scheidewänden, so muſs die Schale ein Sphäroïd sein, welches durch die Umdrehung der Parabel um die Axe entsteht.

Die Geschwindigkeit, mit welcher die Röhre umgedreht werden muſs, damit das Wasser durch den Schwung schwerlos wird, und die verlangte Wirkung erfolgt, ist, weil oben $2\pi y = r v$ war, $v = \frac{2\pi y}{r}$, und weil zufolge der Gleichung der Linie

$$y = \frac{r}{\pi}\sqrt{(gx)} \text{ oder } \frac{2\pi y}{r} = 2\sqrt{(gx)} \text{ ist,}$$

$$v = 2\sqrt{(gx)}.$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeit des obersten Punctes B durch c, und die Höhe AC durch a, so ist

$$c = 2\sqrt{(ga)}.$$

Diese Geschwindigkeit ist die des freien Falles von der Höhe a: also muſs die Ausfluſs-Oeffnung B mit der Geschwindigkeit umlaufen, die ein Körper durch den freien Fall von der Höhe AC, auf welche das Wasser gehoben werden soll, erlangen würde. Alsdann flieſst das Wasser bei B mit einer Geschwindigkeit aus, die ein Körper durch den freien Fall von der Höhe HC erlangen würde, die der Tiefe der Eintauchung gleich ist.

Die Kraft, welche nöthig ist, die Maschine zu bewegen und folglich das Wasser in die Höhe zu treiben, läſst sich, mit Beiseitsetzung der Reibung und anderer Hindernisse, wie folgt, finden:

Das Wasser flieſst, nachdem es in der Röhre durch den Schwung schwerlos geworden, in derselben mit einer Geschwindigkeit, die der Druckhöhe HC zukommt. Es sei

$$HC = h.$$

Zum Hinauftreiben des Wassers ist also, wenn man will, keine Kraft nöthig. Dagegen nimmt die Geschwindigkeit horizontal um die Axe von unten nach oben zu. Sie ist z. B. in M, für $MP = y$, gleich v, in E hingegen, für $EQ = y + \triangle y$, gleich $v + \triangle v$ und hat also von M bis E um $\triangle v$ zugenommen. Diese Vermehrung der Geschwindigkeit muſs durch die Kraft, welche die Maschine in Bewegung setzt, hervorgebracht werden.

Der Querschnitt der Röhre sei m;
der Bogen $CM = s$, also $EM = \triangle s$.

Das Wasser in der Röhre bewegt sich nach der Richtung ihrer centrischen Linie, vermöge der Druckhöhe $HC = h$, mit der Geschwindigkeit $2\sqrt{(gh)}$, welche b sein mag, so daſs

$$b = 2\sqrt{(gh)}$$

ist, gleichförmig. Also ist die Zeit, welche das Wasser braucht, um von M nach E zu gelangen, und welche $\triangle t$ sein mag,

$$\triangle t = \frac{ME}{b} = \frac{\triangle s}{b}.$$

Während nun das Wasser von M nach E gelangt, soll seine horizontale Geschwindigkeit v, die an sich im Beharrungsstande ist, um $\triangle v$ vermehrt werden, und zwar die Geschwindigkeit der Wassermasse, die in der Zeit $\triangle t$ durch die Röhre strömt, also der Masse

$$mb \triangle t = m \triangle s.$$

Also soll die Masse $m \triangle s$ in der Zeit $\triangle t = \frac{\triangle s}{b}$ die Geschwindigkeit $\triangle v$ erlangen. Dazu ist nach mechanischen Regeln eine bewegende Kraft

$$\frac{\triangle v}{2g\triangle t} m \triangle s = \frac{\triangle v}{2g\frac{\triangle s}{b}} m \triangle s = \frac{mb\triangle v}{2g}$$

nöthig. Wollte man diese Kraft mit der Geschwindigkeit v multipliciren, so würde das Moment, welches man findet, kleiner sein als das wirkliche Moment der Masse $M\triangle s$. Multiplicirte man sie mit der Geschwindigkeit $v + \triangle v$, so würde das Moment gröſser sein, weil die Geschwindigkeit von M nach E zunimmt. Also wird es irgend eine mittlere Geschwindigkeit v_1, zwischen v und $v + \triangle v$ geben, deren Product mit der Kraft $\frac{mb\triangle v}{2g}$ genau das Moment der Masse $m\triangle s$ giebt. Dieses Moment also läſst sich durch $\frac{mb\,v_1\triangle v}{2g}$ ausdrücken, und es ist, wenn man durch M das Moment dar ganzen Maschine bezeichnet,

$$\triangle M = \frac{mbv_1\triangle v}{2g}.$$

Da M und v beide nothwendig von x abhängen, so ist, wenn man

$$PQ = k$$

und in M und v, $x + k$ statt x setzt:

$$\triangle M = kdM + \frac{k^2}{2} d^2M \ldots\ldots\ldots$$

$$\triangle v = kdv + \frac{k^2}{2} d^2v \ldots\ldots\ldots$$

Die mittlere Geschwindigkeit v_1 liegt, wie gesagt, nothwendig zwischen v und $v + \triangle v$, und ist also irgend ein Werth von v, der zwischen denen liegt, die zu x und zu $x + k$ gehören. Bezeichnet man daher durch $\varkappa$ eine Gröfse, die zwischen 0 und k liegt, so läfst sich v_1 durch

$$v_1 = v + \varkappa dv + \frac{\varkappa^2}{2} d^2 v \ldots\ldots\ldots$$

ausdrücken.

Setzt man diese Ausdrücke von $\triangle M$, $\triangle v$ und v_1 in die obige Gleichung $\triangle M = \frac{m b v_1 \triangle v}{2g}$, so erhält man

$$k dM + \frac{k^2}{2} d^2 M \ldots. = \frac{mb}{2g} (v + \varkappa dv + \frac{\varkappa^2}{2} d^2 v \ldots.)(k dv + \frac{k^2}{2} d^2 v \ldots.),$$

oder wenn man mit k dividirt,

$$dM + \frac{k}{2} d^2 M \ldots. = \frac{mb}{2g} (v + \varkappa dv + \frac{\varkappa^2}{2} d^2 v \ldots.)(dv + \frac{k}{2} d^2 v \ldots.).$$

Da diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von k Statt findet, so findet sie auch Statt für $k = 0$. Dann aber ist auch $\varkappa = 0$, weil $\varkappa$ nothwendig zwischen 0 und k liegt; also giebt die Gleichung, wenn man $k = 0$ setzt,

$$dM = \frac{m b v dv}{2g},$$

woraus $M = \frac{m b v^2}{4g} + \text{Const.}$ folgt. Da das Moment M gleich Null ist, für $v = 0$, so ist Const. $= 0$, also blofs

$$M = \frac{m b v^2}{4g}.$$

Da $v = 2\sqrt{(gx)}$ sein mufste, so ist auch

$$M = \frac{m b . 4gx}{4g} = m b x.$$

Für die ganze Maschine ist $x = AC = a$, also das gesammte Moment

$$M = m b a.$$

Durch dieses Kraft-Moment wird das Wasser auf die Höhe $AH = a - h$ gehoben. Die Masse des in einer Secunde gehobenen Wassers ist, weil es sich mit der Geschwindigkeit b bewegt, mb. Also ist der nutzbare Effect gleich

$$mb(a - h).$$

Das Moment der angewendeten Kraft war mba. Also ist das Moment der Kraft, welche verloren geht, $mba - mb(a - h)$, gleich

$$mbh.$$

Der verloren gehende Effect mbh verhält sich also zu den übrig bleibenden Effect $mb(a-h)$, wie die Tiefe der Eintauchung der Röhre h zu der Höhe $a-h$, auf welche das Wasser gehoben wird. Dieser Verlust ist nur gering, denn eine unbedeutende Tiefe der Eintauchung giebt schon eine bedeutende Geschwindigkeit des Ausflusses b, weil b die Geschwindigkeit ist, die der Tiefe der Eintauchung, als Fallhöhe, entspricht. Z. B., wenn man die Röhre einen Fufs tief eintaucht, fliefst das Wasser oben schon mit $2\sqrt{(g\,.\,1)} = 2\sqrt{15\frac{5}{8}} =$ beinahe 8 Fufs Geschwindigkeit aus.

Man sieht, dafs bei dieser Rechnung nirgend eine Spur vom Unendlich-Kleinen vorkommt, sondern dafs sich alles durch die blofse Algebra finden läfst.

Die Form der Röhre richtet sich nach der Voraussetzung, dafs die Geschwindigkeit der Umdrehung des obersten Punctes B genau $c = 2\sqrt{(ga)}$ ist. Ist die Geschwindigkeit kleiner, so fliefst kein Wasser aus; ist sie gröfser, so sind die Schwere und die Schwungkraft nicht im Gleichgewicht, sondern die letztere übersteigt jene. Alsdann wird die Bewegung des Wassers nach oben beschleunigt, und die Biegung der Röhre mufs entweder eine andere sein, oder ihr Querschnitt mufs von unten nach oben abnehmen. Die Biegung der Röhre zu ändern, ist für die Ausübung nicht rathsam, weil man ihr in jedem Falle keine veränderliche Form geben kann, wie es für eine veränderliche Geschwindigkeit der Umdrehung nöthig sein würde. Da auch der Querschnitt nur unveränderlich sein kann, so mufs man die Röhre an der einen Seite durchlöchern, damit bei veränderlicher Geswindigkeit die Luft entweichen könne, oder man mufs die Röhre an der innern Seite ganz offen lassen, wie in dem Falle der sphäroïdischen Schale mit Scheidewänden.

Es lassen sich über diese Maschine, wenn man die Geschwindigkeit gröfser oder kleiner annimmt, als sie nach den obigen Voraussetzungen sein mufs, oder wenn man den Widerstand an den Wänden und andere Hindernisse in Betracht zieht, noch mehrere mechanische Rechnungen anstellen, die wir aber, um diesen Aufsatz nicht über die Gebühr zu verlängern, und da sie für die Ausübung keinen besondern Nutzen haben, übergehen.

Die Art, wie die Maschine in Bewegung gesetzt wird, richtet sich nach den Umständen. Man kann dazu, wie gewöhnlich, jede bewegende Kraft benutzen, als Wind, Wasser, Dampf, Thierkräfte u. s. w. Das Gerüst der Maschine mufs natürlich so grofs sein, dafs sich die Röhre, oder die sphäroïdische Schale darin frei umdrehen kann. Oben bei B mufs eine ringförmige Rinne umherlaufen, die das Wasser auffängt, und die Röhre mufs umgebogen sein,

damit kein Wasser verspritzt wird, ungefähr wie es in der Figur bei *B* angedeutet ist. Da die Axe senkrecht steht, so lassen sich vorzüglich zu Bewegung dieser Pumpe, wo es sonst den Umständen nach thunlich, horizontale Windflügel benutzen, was besonders da angehen wird, wo es auf Austrocknung niedriger, flacher Ländereien ankommt. Die Flügel können alsdann sogar unmittelbar an die Pumpen-Axe befestigt werden, in welchem Falle die Maschine, auch selbst bis zur bewegenden Kraft hin, gar keine Räder oder beweglichen Theile hat. Ueberhaupt ist die vorzüglichste Anwendung dieser Pumpe, wohl die in dem eben genannten Fall zur Abtrocknung von Ländereien, wo es nicht an Raum fehlt, die Förderungshöhe gewöhnlich nicht sehr groſs ist, und öfters schlammiges Wasser gehoben werden muſs. Beim Bauen unter Wasser, oder um Wasser aus Brunnen zu heben, ist sie weniger geschickt, jedoch nicht unanwendbar, weil der Parameter der Parabel, nach welcher die Röhre gekrümmt sein muſs, willkürlich ist, und die Linie auch sehr flach sein kann, indem es nur darauf ankommt, daſs der obere Punct der Röhre hinreichend geschwind umgedreht wird, und also nur die Winkelgeschwindigkeit hinreichend vergröſsert werden darf. Ist die Hubhöhe groſs, so muſs man das Wasser Absatzweise heben.

Das Werkzeug verdient in jedem Falle Aufmerksamkeit, wegen seiner Einfachheit, geringen Kostbarkeit, Festigkeit und Dauer. Selbst geringere Schäden machen es noch nicht ungangbar, wie Pumpen und andere zusammengesetztere Maschinen.

10.

Einige Nachrichten von Büchern.

Aus der neueren Deutschen mathematischen Literatur wollen wir diesesmal folgende zwei Werke nennen:

1. **Eytelwein** Grundlehren der höhern Analysis. Berlin bei Reimer. 2 Bände in Quarto, zusammen 1166 Seiten.

Dieses Werk verbreitet sich mit Klarheit über mehrere wichtige Gegenstände der Analysis, namentlich über die höheren Gleichungen, über die Facultäten, über die Reihen, sowohl im Allgemeinen, als über die rücklaufenden, über die Entwickelung der Reihen, über das Gesetz der Coefficienten, über die Convergenz, Verbindung, Verwandlung und Summirung der Reihen; ferner über die Kettenbrüche, über die Zerlegung der Brüche, über die Differenzen und arithmetischen Reihen höherer Ordnung, über die Differenz-Gleichungen und ihre Zurückleitung, über die inexplicabeln Functionen, über die Gröfsten und Kleinsten, über das Einschalten und über die combinatorische Methode. Es enthält eine reiche Sammlung von interessanten Resultaten, und unter denselben vieles Neue, oder neue Ansichten, Erläuterungen und Aufklärungen. Es hat für den gegenwärtigen Standpunct der Analysis ungefähr die nemlichen Zwecke, wie Eulers *introd. in anal. inf.* für den damaligen. Der der Combinatorik gewidmete Theil des Werkes wird ohne Zweifel dazu beitragen, diese Methode näher aufzuklären und ihr ihren richtigen Standpunct in der Analysis anzuweisen. Das Werk ist für die mathematische Literatur wichtig, und in jedem Betracht des Scharfsinns des hochverdienten Verfassers würdig.

2. **Dirksen** Variations-Rechnung. Berlin, bei Schlesinger. 1823. in Quarto.

In diesem Werke findet man diesen abstractesten Theil der Analysis in seinem ganzen Umfange mit grofsem analytischen Scharfsinn abgehandelt.

Aus Pflicht gegen seinen Herrn Verleger glaubt der Herausgeber seine eigenen neueren Arbeiten an diesem Orte nicht verschweigen zu dürfen.

Es ist im Anfange dieses Jahres in der Reimerschen Buchhandlung zu Berlin erschienen: Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, und so eben erschien die erste Abtheilung eines Lehrbuches der Geometrie, welche die Planimetrie, die ebene Trigonometrie und Polygonometrie enthält. Beide Lehrbücher sind sowohl für Diejenigen, welche sich der Mathematik ganz widmen wollen, als für Alle, die ihrer als Hülfswissenschaft bedürfen, vorzüglich aber zum Selbstunterricht bestimmt. In der Arithmetik und Algebra ist der Verfasser häufig von dem Gewöhnlichen abgewichen, und hat diesen Theil der Elemente in dasjenige System zu bringen gesucht, welches nach seiner Ueberzeugung der Natur des Gegenstandes angemessen ist. Obgleich der Umfang des Lehrbegriffs nur wenig den gewöhnlichen Umfang eines Elementarbuchs übersteigt, geht der Inhalt doch bei weitem über die ersten Elemente hinaus. Es enthält z. B. eine schon ausgedehnte Theorie der höheren Gleichungen, mehreres von den Reihen, und selbst Manches aus der sogenannten Differential- und Integral-Rechnung, die nach der Ueberzeugung des Verfassers blofse Algebra ist. Das Buch ist in dem Sinne entwickelt, welchen der Verfasser früher in seinem „Versuch über die analytischen Facultäten, Berlin bei Reimer, 1823," angedeutet hat, und in welchem er ferner die gesammte Analysis zu entwickeln gedenket. Er bereitet einen umfassenden Lehrbegriff der gesammten Analysis vor, dessen Verlag die hiesige Schlesingersche Buchhandlung übernommen hat. Da die gesammte Analysis im Zusammenhange noch nie von einem und demselben Verfasser systematisch

und nach gleichen Ansichten abgehandelt worden ist, so hofft der Unternehmer, dafs seine Arbeit auch schon deshalb nützlich sein werde.

Der Lehrbegriff der Geometrie, von welchem die erste Abtheilung erschien, enthält ebenfalls viel mehr, als die gewöhnlichen Lehrbücher, z. B. Näheres über die Vielecke, das Nöthigste über die Transversalen, die Anfänge der analytischen Untersuchung der Lage der Linien und Ebenen, das Nöthigste über die Puncte der mittlern und kleinsten Entfernung, eine etwas weitere Ausführung der Trigonometrie und eine in gewissem Betracht vollständige Ausführung der Polygonometrie. Dabei hat sich der Verfasser der gröfsten Strenge, so wie der gröfsten Einfachheit und überall einer systematischen Zusammenstellung befleifsigt. Der zweite Theil dieses Buches, welcher die Stereometrie und sphärische Trigonometrie enthalten soll, wird in Kurzem nachfolgen.

Von den neueren Producten der mathematischen Literatur in **anderen** Sprachen nennen wir diesesmal nur:

Poncelet *traité des proprietés projectives des figures, Paris, chez Bachelier.* 4. 1822.

weil dieses Werk mit einer Abhandlung in dem gegenwärtigen ersten Heft dieses Journals, nemlich mit der Abhandlung des Herrn Steiner S. 38 etc. in einer gewissen Verbindung steht. Der Inhalt des Werkes ist für die Geometrie von dem höchsten Interesse, denn es enthält des Neuen, sowohl in der Methode als an Gegenständen, viel. Unter Projection der Figuren wird ihr perspectivisches Bild verstanden, das heifst, die Figur, welche auf einer beliebigen Ebene oder auch auf einer Fläche entsteht, wenn man mit derselben die geraden Linien aus dem Auge nach den verschiedenen Puncten der gegebenen Figur schneidet. Und vermittelst der Eigenschaften des perspectivischen Bildes, welches häufig einfachere Gesetze hat, als die gegebene Figur, wird diese letzte untersucht. Wie fruchtbar diese Methode sein müsse, kann man aus folgendem einfachen Falle abnehmen. Man stelle sich zwei gerade Linien in einer Ebene vor, die in einen Punct zusammen laufen, und mehrere andere gerade Linien in der nemlichen Ebene, die ebenfalls alle in einen anderen Punct zusammen laufen und jene beiden schneiden. Die Durchschnitte der Linien werden eine Reihe aneinander liegender Vierecke bilden, die ganz unregelmäfsig sein können. Zieht man nun in jedem dieser Vierecke die beiden Diagonalen, so liegen die Durchschnittspuncte der Diagonalen in einer und derselben geraden Linie. Wenn man diesen Satz auf die gewöhnliche Weise durch Transversalen oder aus der Aehnlichkeit der Figuren in der Ebene beweiset, so ist der Beweis ziemlich weitläufig. Durch eine perspectivische Projection hingegen ist er ungemein leicht. Man lege nemlich eine andere Ebene gegen die gegebene so, dafs sowohl die geschnittenen zwei Linien, als die sie schneidenden unter einander parallel sind, welches allemal angeht, so sind die Bilder der schiefen Vierecke der gegebenen Figur auf der neuen Ebene offenbar lauter Rechtecke; und dafs die Durchschnittspuncte solche aneinander liegende Rechtecke in eine und dieselbe grade Linie fallen, ist fast an sich selbst klar. Das Werk des Herrn Poncelet entwickelt eine Menge interessanter und neuer Sätze, sowohl von der geraden Linie in der Ebene und den damit umschlossenen Figuren, als von den sogenannten Kegelschnitten. Mit der obigen Abhandlung steht das Werk deshalb in Beziehung, weil der Verfasser der Abhandlung, Herr Steiner, und Herr Poncelet, beide, ohne von einander zu wissen, an dem nemlichen Gegenstande gearbeitet und mehrere gleiche Resultate gefunden haben. Herr Poncelet hat, wie er in der Vorrede seines Buchs erzählt, seine Untersuchungen als Kriegsgefangener zu Saratow in Rufsland, entfernt von aller literarischer Gemeinschaft, angestellt, und Herr Steiner hat, wie der Herausgeber von ihm vernommen, ohne Herrn Poncelets Arbeiten zu kennen, mehrere Resultate desselben ebenfalls gefunden, ist aber zum Theil noch weiter gegangen. Herr Steiner ist im Begriff, seine Resultate zusammenzustellen, wovon ein gröfseres, interessantes Werk zu erwarten ist.

11.

Bemerkungen über die Form der Wurzeln algebraischer Gleichungen.

(Von Herrn *Louis Olivier.*)

1.

Die Wurzeln einer algebraischen Gleichung, z. B. der Gleichung

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + p_3 x^{n-3} \ldots\ldots + p_n = 0,$$

sind nothwendig Functionen der Coefficienten $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$, wie

$$x = f(p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n),$$

wo f ein Functionszeichen ist. Die Zahl der Wurzeln ist n.

Entwickelt man den Ausdruck von x nach den Potenzen und Producten der Gröfsen $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$, nemlich wie

$$\begin{aligned} x = \alpha + \beta p_1 &+ \delta p_1^2 \text{ etc.} \\ + \gamma p_2 &+ \varepsilon p_1 p_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &+ \tau p_2^2 \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

so sind die Coefficienten α, β, γ, δ etc. von $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$ unabhängig und nur aus absoluten Zahlen zusammengesetzt. Aber die Gröfsen $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$ haben sämmtlich nur einen Werth, während x, n verschiedene Werthe haben kann. Daraus folgt, dafs die Coefficienten α, β, γ, δ etc. Wurzel-Gröfsen enthalten können. Dergleichen Wurzel-Gröfsen können allemal auf die Wurzeln von Eins gebracht werden, und ihr Exponent kann nicht gröfser und nicht kleiner sein, als n: denn sonst würden, unabhängig von jeder besonderen Bedingung, mehr oder weniger als n verschiedene Werthe von x Statt finden können; welches nicht der Fall ist.

Es mufs also umgekehrt x nothwendig eine Function, nicht allein von den Coefficienten $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots\ldots p^n$ der gegebenen Gleichung, sondern auch

von der Wurzelgröſse $\sqrt[n]{1}$ sein. Der allgemeine Ausdruck der Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom n^{ten} Grade ist also:

$$x = f(p_1,\ p_2,\ p_3 \ldots\ldots\ldots p_n,\ \sqrt[n]{1}).$$

Dieser Ausdruck kann n verschiedene Werthe haben, weil $\sqrt[n]{1}$ so viele verschiedene Werthe hat; aber nicht mehrere.

2.

Entwickelt man diesen Ausdruck von x, statt nach den Potenzen und Producten der Coefficienten $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$, vielmehr in eine nach den Potenzen und Producten der Wurzelgröſse $\sqrt[n]{1}$ fortschreitende Reihe, so ist leicht zu sehen, daſs diese Reihe nie mehr als n Glieder haben kann, welchen von den n Werthen der Wurzelgröſse $\sqrt[n]{1}$ man derselben auch beilegen mag: denn alle Potenzen der verschiedenen Werthe von $\sqrt[n]{1}$, von höheren Exponenten als n, sind immer anderen Potenzen dieser Wurzelgröſse gleich, deren Exponenten kleiner sind als n. Die entwickelte Reihe wird also immer folgende Gestalt haben:

$$x = \varrho_1 \sqrt[n]{1} + \varrho_2 (\sqrt[n]{1})^2 + \varrho_3 (\sqrt[n]{1})^3 \ldots\ldots + \varrho_{n-1} (\sqrt[n]{1})^{n-1} + \varrho_n.$$

3.

Giebt man in diesem Ausdrucke von x der Wurzel-Gröſse $\sqrt[n]{1}$ der Reihe nach ihre n Werthe, die sich vermöge der bekannten Eigenschaften der Wurzeln der Einheit durch $1^{\frac{1}{n}}, 1^{\frac{2}{n}}, 1^{\frac{3}{n}} \ldots\ldots 1^{\frac{n-1}{n}}$, 1 ausdrücken lassen, so findet man folgenden Ausdruck der n Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$\begin{array}{lllllll}
x_1 & = \varrho_1 1^{\frac{1}{n}} & + \varrho_2 1^{\frac{2}{n}} & + \varrho_3 1^{\frac{3}{n}} \ldots\ldots\ldots & + \varrho_{n-1} 1^{\frac{n-1}{n}} & + \varrho_n \\
x_2 & = \varrho_1 1^{\frac{2}{n}} & + \varrho_2 1^{\frac{4}{n}} & + \varrho_3 1^{\frac{6}{n}} \ldots\ldots\ldots & + \varrho_{n-1} 1^{\frac{2n-2}{n}} & + \varrho_n \\
x_3 & = \varrho_1 1^{\frac{3}{n}} & + \varrho_2 1^{\frac{6}{n}} & + \varrho_3 1^{\frac{9}{n}} \ldots\ldots\ldots & + \varrho_{n-1} 1^{\frac{3n-3}{n}} & + \varrho_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_{n-1} & = \varrho_1 1^{\frac{n-1}{n}} & + \varrho_2 1^{\frac{2n-2}{n}} & + \varrho_3 1^{\frac{3n-3}{n}} \ldots\ldots & + \varrho_{n-1} 1^{\frac{(n-1)^2}{n}} & + \varrho_n \\
x_n & = \varrho_1 & + \varrho_2 & + \varrho_3 \ldots\ldots\ldots\ldots & + \varrho_{n-1} & + \varrho_n.
\end{array}$$

4.

Wenn n eine Primzahl ist, so werden die Coefficienten einer und derselben Gröſse ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 etc. in den Ausdrücken von x_1, x_2, $x_3 \ldots\ldots\ldots x_n$ immer unter einander verschieden sein. Ist n eine zusammengesetzte Zahl, so können die Coefficienten von ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 etc. in mehreren Werthen von x wie-

derkehren. In allen Fällen aber wird die Summe der Coefficienten jeder Gröſse ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 etc. gleich Null sein; denn diese Summe ist immer die Summe aller Wurzeln der Einheit, deren Exponent n oder ein Theiler von n ist.

Dieses giebt

$$x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots\ldots + x_n = n\varrho_n.$$

Nun kann man jede Gleichung in eine andere verwandeln, die kein zweites Glied hat, oder in welcher die Summe der Wurzeln Null ist. Also kann man immer machen, daſs

$$n\varrho_n = 0 \text{ oder } \varrho_n = 0$$

ist. Dadurch reduciren sich die obigen allgemeinen Ausdrücke der Wurzeln einer Gleichung vom n^{ten} Grade auf

$$\begin{array}{ll}
x_1 & = \varrho_1 1^{\frac{1}{n}} + \varrho_2 1^{\frac{2}{n}} + \varrho_3 1^{\frac{3}{n}} \ldots\ldots\ldots + \varrho_{n-1} 1^{\frac{n-1}{n}} \\
x_2 & = \varrho_1 1^{\frac{2}{n}} + \varrho_2 1^{\frac{4}{n}} + \varrho_3 1^{\frac{6}{n}} \ldots\ldots\ldots + \varrho_{n-1} 1^{\frac{2n-2}{n}} \\
x_3 & = \varrho_1 1^{\frac{3}{n}} + \varrho_2 1^{\frac{6}{n}} + \varrho_3 1^{\frac{9}{n}} \ldots\ldots\ldots + \varrho_{n-1} 1^{\frac{3n-3}{n}} \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} & = \varrho_1 1^{\frac{n-1}{n}} + \varrho_2 1^{\frac{2n-2}{n}} + \varrho_3 1^{\frac{3n-3}{n}} \ldots\ldots + \varrho_{n-1} 1^{\frac{(n-1)^2}{n}} \\
x_n & = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + \varrho_{n-1}.
\end{array}$$

Man sieht daraus, daſs die Ausdrücke der Wurzeln immer auf Summen von $n - 1$ integrirenden Theilen reducirt werden können.

5.

Die Gröſsen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ... ϱ_{n-1}, welche in den Ausdrücken von x vorkommen, sind in denselben der Reihe nach mit allen Wurzeln von 1 multiplicirt, deren Exponent n oder ein Theiler von n ist, und jede Gröſse ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 .... kann nur einen Werth haben, weil nur n verschiedene Werthe von x Statt finden. Daraus folgt, daſs ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 ...... ϱ_{n-1} nothwendig die Zahlenwerthe (ohne Rücksicht auf das Zeichen genommen) der Wurzeln, mit n oder einem Theiler von n zum Exponenten, von anderen Gröſsen u_1, u_2, u_3 ...... sein müssen, welche Functionen der Coefficienten der gegebenen Gleichung sind.

Also können die Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn n eine Primzahl ist, auch auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$x = \sqrt[n]{u_1} + \sqrt[n]{u_2} + \sqrt[n]{u_3} + \ldots\ldots\ldots + \sqrt[n]{u_{n-1}},$$

und wenn n z. B. m zum Theiler hat, durch

$$x = \sqrt[m]{u_1} + \sqrt[m]{u_2} + \sqrt[m]{u_3} \ldots\ldots\ldots + \sqrt[m]{u_{n-1}}.$$

Dieser allgemeine Ausdruck von x giebt die n verschiedenen Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn man die Zahlenwerthe der Wurzel-Gröfsen $\sqrt[n]{u_1}$, $\sqrt[n]{u_2}$ etc. und $\sqrt[m]{u_1}$, $\sqrt[m]{u_2}$ etc., den Ausdrücken von (§. 4.) gemäfs, der Reihe nach mit den Wurzeln von 1 multiplicirt.

6.

Da beliebige Gröfsen immer als Wurzeln einer algebraischen Gleichung betrachtet werden können, deren Exponent der Zahl der Gröfsen gleich ist, so kann man die $n-1$ Gröfsen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots\ldots \varrho_{n-1}$, oder auch die Gröfsen $u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots u_{n-1}$ als die Wurzeln einer Gleichung vom Grade $n-1$ ansehen, z. B. als die Wurzeln der Gleichung

$$u^{n-1} + q_1 u^{n-2} + q_2 u^{n-3} \ldots\ldots + q_{n-1} = 0.$$

Die $n-1$ Coefficienten $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots\ldots q_{n-1}$ dieser Gleichung sind nothwendig Functionen der $n-1$ Coefficienten der gegebenen Gleichung $p_2, p_3 \ldots \ldots p_{n-1}$ (p_1 ist gleich Null angenommen), weil die integrirenden Theile $u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots u_{n-1}$ der Wurzeln der gegebenen Gleichung, welche die Wurzeln der auflösenden Gleichung in u sind, nur von diesen Coefficienten abhängen.

Findet man also, dafs die integrirenden Theile $u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots u_{n-1}$ der Wurzeln der gegebenen Gleichung in den Ausdrücken dieser Wurzeln nach Belieben untereinander verwechselt werden können, so werden sie nothwendig die Form der Wurzeln einer Gleichung vom Grade $n-1$ haben.

Gelingt es, die Coefficienten $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_{n-1}$ der auflösenden Gleichung in u durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken, so läfst sich die gegebene Gleichung vom Grade n, vermittelst einer Gleichung vom Grade $n-1$ auflösen.

7.

Multiplicirt man in den Ausdrücken (§. 4.) x mit $1^{\frac{1}{n}}$, x_2 mit $1^{\frac{2}{n}}$, x_3 mit $1^{\frac{3}{n}}$ etc., so gehen die Coefficienten der Glieder, welche ϱ_1 enthalten, in diejenigen mit ϱ_2, die Coefficienten der Glieder, welche ϱ_2 enthalten, in diejenigen mit ϱ_3, u. s. w. über, die Coefficienten der letzten Glieder sind sämmtlich gleich 1.

Nimmt man also die Summe aller Producte, so findet man

$$x_1 1^{\frac{1}{n}} + x_2 1^{\frac{2}{n}} + x_3 1^{\frac{3}{n}} \ldots\ldots + x_m 1^{\frac{n}{n}} = n\varrho_{n-1}.$$

Multiplicirt man x_1 mit $1^{\frac{2}{n}}$, x_2 mit $1^{\frac{4}{n}}$, x_3 mit $1^{\frac{6}{n}}$ etc., so gehen die Coefficienten der Glieder, welche ϱ_1 enthalten, in diejenigen mit ϱ_3, diejenigen mit

ϱ_2 in diejenigen mit ϱ_4, u. s. w. über. Die Coefficienten der Glieder mit ϱ_{n-2} sind sämmtlich gleich 1. Die Summe aller Producte ist also alsdann

$$x_1 1^{\frac{2}{n}} + x_2 1^{\frac{4}{n}} + x_3 1^{\frac{6}{n}} \ldots\ldots\ldots x_n 1^{\frac{2n}{n}} = n\varrho_{n-2}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so findet man

$$x_1 1^{\frac{1}{n}} + x_2 1^{\frac{2}{n}} + x_3 1^{\frac{3}{n}} \ldots\ldots\ldots + x_n = n\varrho_{n-1}$$
$$x_1 1^{\frac{2}{n}} + x_2 1^{\frac{4}{n}} + x_3 1^{\frac{6}{n}} \ldots\ldots\ldots + x_n = n\varrho_{n-2}$$
$$x_1 1^{\frac{3}{n}} + x_2 1^{\frac{6}{n}} + x_3 1^{\frac{9}{n}} \ldots\ldots\ldots + x_n = n\varrho_{n-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 1^{\frac{n-1}{n}} + x_2 1^{\frac{2n-2}{n}} + x_3 1^{\frac{3n-3}{n}} \ldots\ldots + x_n = n\varrho_1.$$

Diese Ausdrücke stimmen mit denen überein, von welchen Lagrange in seinen Untersuchungen über die algebraischen Gleichungen ausgeht. (Man sehe Not. XIII. seines Werks: *Traité de la resolution des équations numériques.*) Die gegenwärtigen Gröſsen u_1, u_2, u_3 sind die nemlichen, welche Lagrange durch r^0, r', r'' etc. bezeichnet.

Die Voraussetzungen von Vandermonde in seinen Untersuchungen über die Auflösung der algebraischen Gleichungen stimmen ebenfalls mit unseren Ausdrücken. Vandermonde setzt im Wesentlichen:

$$x = \frac{1}{n} \left(x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_n\right)$$
$$+ \frac{1}{n} \sqrt[n]{\left(x_1 + 1^{\frac{1}{n}} x_2 + 1^{\frac{2}{n}} x_3 \ldots\ldots\ldots + x_n\right)}$$
$$+ \frac{1}{n} \sqrt[n]{\left(x_1 + 1^{\frac{2}{n}} x_2 + 1^{\frac{4}{n}} x_3 \ldots\ldots\ldots + x_n\right)}$$

etc. Das heiſst

$$x = \frac{1}{n} \left(u_n + \sqrt[n]{u_{n-1}} + \sqrt[n]{u_{n-2}} \ldots\ldots + \sqrt[n]{u_1}\right);$$

welches mit den obigen Ausdrücken (§. 5.) übereinstimmt.

8.

Da sich die Auflösung einer gegebenen Gleichung vom Grade n auf die Untersuchung einer auflösenden Gleichung vom Grade $n - 1$ zurückführen läſst (§. 6.), so kommt es darauf an, die Coefficienten der auflösenden Gleichung $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_{n-1}$ durch die $n - 1$ Coefficienten $p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$ der gegebenen Gleichung auszudrücken. Hierbei giebt es drei Fälle:

Erster Fall. Die Gröſsen $v_1, v_2, v_3 \ldots\ldots v_{n-1}$, welche in den Ausdrücken der Wurzeln der gegebenen Gleichung (§. 4.) vorkommen, können auf gleiche Weise mit den Wurzeln der Einheit, $1^{\frac{1}{n}}, 1^{\frac{2}{n}}, 1^{\frac{3}{n}} \ldots\ldots 1^{\frac{n-1}{n}}$ verbunden sein, so daſs sie sich untereinander nach Belieben vertauschen lassen, ohne daſs man andere Ausdrücke, als die von x, findet.

Setzt man in diesem Falle die obigen Ausdrücke von $x_1, x_2 \ldots\ldots$ in diejenigen der Coefficienten der gegebenen Gleichung $p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$, nemlich in

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 \ldots\ldots + x_2 x_3 \ldots\ldots\ldots = p_2$$
$$x_1 x_2 x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_2 x_3 x_4 \ldots\ldots = -p_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots\ldots x_n = \pm p_4,$$

oder auch in die Ausdrücke anderer beliebiger symmetrischer Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung, z. B. in die Ausdrücke der Summen der Potenzen der Wurzeln bis zur n^{ten}, welche sich bekanntlich rational durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen, so werden die Ausdrücke mit $v_1, v_2, v_3 \ldots\ldots v_{n-1}$, welche man findet, nothwendig die Gröſsen $v_1, v_2, v_3 \ldots\ldots v_{n-1}$ symmetrisch enthalten. Und weil umgekehrt beliebige symmetrische Functionen der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten der Gleichung selbst ausgedrückt werden können, so lassen sich die Cofficienten $q_1, q_1 \ldots\ldots q_{n-1}$ der auflösenden Gleichung finden. Die Gröſsen $v_1, v_2 \ldots\ldots v_{n-1}$ sind alsdann die n^{ten} Wurzeln ihrer Wurzeln $u_1, u_2 \ldots\ldots u_{n-1}$.

Man muſs übrigens die Coefficienten der Gleichung in u, und nicht diejenigen der Gleichung in v berechnen; denn der erste Coefficient dieser letztern würde $v_1 + v_2 + v_3 \ldots\ldots + v_{n-1}$, das heiſst, gleich einer der Wurzeln der gegebenen Gleichung selbst sein, und man würde nichts gewonnen haben, weil die Gleichung, aus welcher dieser Coefficient gefunden werden müſste, von dem nemlichen Grade sein würde, wie die gegebene Gleichung selbst.

Es ist leicht zu sehen, daſs die symmetrische Verbindung der $n-1$ integrirenden Theile $v_1, v_2 \ldots\ldots v_{n-1}$ der Wurzeln der gegebenen Gleichung mit den $n-1$ Wurzeln der Einheit, $1^{\frac{1}{n}}, 1^{\frac{2}{n}}, 1^{\frac{3}{n}} \ldots\ldots 1^{\frac{n-1}{n}}$ nur bei den Gleichungen vom zweiten und dritten Grade Statt findet. Denn die Zahl der Verbindungen der $n-1$ Gröſsen $v_1, v_2, v_3 \ldots\ldots v_{n-1}$ und der $n-1$ Wurzeln $1^{\frac{1}{n}}, 1^{\frac{2}{n}}, 1^{\frac{3}{n}} \ldots\ldots 1^{\frac{n-1}{n}}$ ist $(n-1)(n-2)(n-3) \ldots\ldots 1$. Die

gegebene Gleichung hat aber nur $n-1$ zusammengesetzte Wurzeln, denn die letzte ist blos $v_1 + v_2 + v_3 \ldots\ldots + v_{n-1}$. Also mufs

$$(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots 1 = n-1$$

sein, und dieses ist nur für $n=2$ und $n=3$ der Fall. Also findet der gegenwärtige erste Fall der Berechnung der Coefficienten der auflösenden Gleichung nur für die Gleichungen vom zweiten und dritten Grade Statt.

Zweiter Fall. Wenn die $n-1$ integrirenden Theile $v_1, v_2, v_3 \ldots \ldots v_{n-1}$ der Wurzeln der gegebenen Gleichung mit den $n-1$ Wurzeln der Einheit $1^{\frac{1}{n}}, 1^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots 1^{\frac{n-1}{n}}$ nicht symmetrisch verbunden sind, welches für höhere Grade als den dritten immer der Fall ist, so kann man andere symmetrische Ausdrücke der gesuchten Wurzeln willkürlich annehmen. Dieses ist immer erlaubt, weil die Form der allgemeinen Ausdrücke der Wurzeln der gegebenen Gleichung lineär ist.

Die Bedingungen, welche dergleichen, für die Wurzeln der gegebenen Gleichung willkürlich angenommene symmetrische Ausdrücke erfüllen müssen, bestehen blos darin, dafs sich die $n-1$ integrirenden Theile, aus welchen sie zusammengesetzt sind, nach Belieben müssen verwechseln lassen, ohne dafs man dadurch aus den Ausdrücken der n Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ hinausschreitet, und dafs die Summe der Ausdrücke der n Wurzeln immer gleich Null ist.

Es ist leicht zu sehen, dafs diese Bedingungen erfüllt werden, wenn man in den Ausdrücken der $n-1$ ersten Wurzeln, der Reihe nach, je einen der $n-1$ integrirenden Theile mit einem willkürlichen Zahlen-Coefficienten multiplicirt, die letzte n^{te} Wurzel aber der Summe der $n-1$ vorhergehenden, negativ genommen, gleich setzt, das heifst, wenn man setzt:

$$\begin{aligned}
x_1 &+ z_1 + z_2 + z_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + k z_{n-1} \\
x_2 &= z_1 + z_2 + z_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + k z_{n-2} + z_{n-1} \\
x_3 &= z_1 + z_2 \ldots\ldots\ldots + k z_{n-3} + z_{n-2} + z_{n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} &= k z_1 + z_2 + z_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + z_{n-1} \\
x_n &= -(k+n-2)(z_1 + z_2 + z_3 \ldots\ldots + z_{n-1}).
\end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken können die Gröfsen $z_1, z_2, z_3 \ldots\ldots z_{n-1}$, wie man sieht, untereinander nach Belieben vertauscht werden, ohne dafs man aus den Ausdrüchen der Wurzeln herauskömmt, und die Summe der Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ ist gleich Null. Den Coefficienten k kann man willkürlich anneh-

men, ausgenommen gleich 0 und 1, weil 0 und 1, $x_1 = x_2 = x_3 \ldots\ldots = x_{n-1}$ und $x_n = (n-1)\,x$, oder

$$x_1 = z_1 + z_2 + z_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z_{n-2}$$
$$x_2 = z_1 + z_2 + z_3 \ldots\ldots\ldots + z_{n-3} + z_{n-1}$$

etc. geben. Es ist auch leicht einzusehen, dafs **nur einer** der integrirenden Theile der Wurzeln mit einem willkürlichen Coefficienten multiplicirt werden kann. Denn verbände man mehrere Theile mit willkürlichen Coefficienten, so entständen **mehr als** n verschiedene Ausdrücke von x; wegen der möglichen Vertauschungen der Coefficienten und der Gröfsen, mit welchen sie multiplicirt sind.

Substituirt man nun diese Ausdrücke von x in beliebige symmetrische Functionen der Wurzeln x_1, x_2, $x_3 \ldots\ldots\ldots x_n$, deren Werthe aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung gefunden werden können, und es gelingt, aus diesen Functionen andere symmetrische Functionen von z_1^n, $z_2^n \ldots\ldots\ldots z_{n-1}^n$, aus welchen sich die Coefficienten einer auflösenden Gleichung

$$(z^n)^{n-1} + t_1(z^n)^{n-2} + t_2(z^n)^{n-3} \ldots\ldots + t_{n-1} = 0$$

abnehmen lassen, zu finden, so lassen sich die Werthe der für x angenommenen integrirenden Theile z_1, $z_2 \ldots\ldots z_n$ berechnen.

Uebrigens läfst sich dieses Verfahren auch auf die Gleichungen vom zweiten und dritten Grade anwenden.

Dritter Fall. Hat das Verfahren des zweiten Falles keinen Erfolg, weil man vielleicht, indem man die Coefficienten der **auflösenden** Gleichung sucht, auf Gleichungen von höheren Graden, als die gegebene Gleichung selbst, stöfst, so mufs man die Coefficienten der auflösenden Gleichung

$$-q_1 = u_1 + u_2 + u_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$$
$$+q_2 = u_1 u_2 \quad + u_1 u_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + u_2 u_3 \ldots\ldots\ldots$$
$$-q_3 = u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 \ldots\ldots\ldots + u_2 u_3 u_4 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\pm q_{n-1} = u_1 u_2 u_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_{n-1}$$

vermittelst der reciproken Ausdrücke von u durch x (§. 7.) berechnen. Diese Coefficienten werden aus symmetrischen Functionen von x_1, $x_2 \ldots\ldots x_n$ zusammengesetzt sein, und die Aufgabe ist: diese Functionen aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung zu finden. Dieses ist das Verfahren von **Lagrange**, am Schlusse von Note XIII. seiner oben erwähnten Abhandlung über die Gleichungen. (Man sehe Nr. 22. und 58. dieser Note.)

Auch

Auch kann man umgekehrt die Coefficienten der gegebenen Gleichung

$$+p_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 \dots\dots\dots + x_2 x_3 \dots\dots\dots$$
$$-p_3 = x_1 x_2 x_3 \dots\dots\dots\dots + x_2 x_3 x_4 \dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\pm p_n = x_1 x_2 x_3 \dots\dots\dots\dots\dots x_n$$

durch Substitution der allgemeinen Ausdrücke von $x_1, x_2 \dots x_n$ in $v_1, v_2 \dots \dots v_{n-1}$ (§. 4.) berechnen. Dieses giebt $n-1$ Gleichungen zwischen den $n-1$ Gröfsen $v_1, v_2 \dots\dots v_{n-1}$, aus welchen dann diese $n-1$ unbekannten Gröfsen entwickelt werden müssen.

9.

Wir wollen diese Bemerkungen auf die Gleichungen vom zweiten, dritten, vierten Grade u. s. w. anwenden.

I. Es sei die Gleichung vom zweiten Grade

$$x^2 + p_2 = 0$$

gegeben. Die Wurzeln dieser Gleichung werden nur $2-1=1$ Glieder haben, und, den allgemeinen Ausdrücken der Wurzeln (§. 4.) zu Folge, von der Form

$$x_1 = u_1^{\frac{1}{2}} . 1^{\frac{1}{2}} = -u_1^{\frac{1}{2}}$$
$$x_2 = u_1^{\frac{1}{2}} . 1 \;\; = +u_1^{\frac{1}{2}}$$

sein. Nun ist $x_1 . x_2 = p_2$, also ist $-u_1^{\frac{1}{2}} . + u_1^{\frac{1}{2}} = p_2$, woraus $-u_1 = p_2$, also $u_1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-p_2}$ folgt. Dieses giebt

$$x_1 = -\sqrt{-p_2} \text{ und}$$
$$x_2 = +\sqrt{-p_2};$$

welches bekannt ist.

II. Es sei die Gleichung vom dritten Grade

$$x^3 + p_2 x + p_3 = 0$$

gegeben. Die Wurzeln dieser Gleichung werden $3-1=2$ Glieder haben und von folgender Form sein:

$$x_1 = v_1 1^{\frac{1}{3}} + v_2 . 1^{\frac{2}{3}} = u_1^{\frac{1}{3}} . 1^{\frac{1}{3}} + u_2^{\frac{1}{3}} . 1^{\frac{2}{3}}$$
$$x_2 = v_1 1^{\frac{2}{3}} + v_2 . 1^{\frac{1}{3}} = u_1^{\frac{1}{3}} . 1^{\frac{2}{3}} + u_2^{\frac{1}{3}} . 1^{\frac{1}{3}}$$
$$x_3 = v_1 \quad + v_2 \quad = u_1^{\frac{1}{3}} + u_2^{\frac{1}{3}}.$$

A. Die Gleichung vom dritten Grade ist in dem ersten Falle (§. 8.); denn, wie man sieht, sind in den Ausdrücken von x_1, x_2, x_3 die Gröfsen v_1 und v_2, oder $u_1^{\frac{1}{3}}$ und $u_2^{\frac{1}{3}}$ auf jede mögliche Weise mit den Wurzeln von 1 verbunden.

Substituirt man die Ausdrücke von x_1, x_2, x_3 in diejenigen der Coefficienten der gegebenen Gleichung, nemlich in

$$+p_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \text{ und}$$
$$-p_3 = x_1 x_2 x_3,$$

so findet man, nachdem reducirt worden,

$$p_2 = -3 v_1 v_2$$
$$p_3 = -(v_1^3 + v_2^3), \text{ oder}$$
$$p_2^3 = -27 u_1 u_2$$
$$p_3 = -(u_1 + u_2).$$

Dieses giebt

$$p_3^2 = u_1^2 + 2u_1 u_2 + u_2^2 \text{ und } \tfrac{4}{27} p_2^3 = -4u_1 u_2,$$

also

$$\sqrt{\left(p_3^2 + \tfrac{4}{27} p_2^3\right)} = u_1 - u_2.$$

Daraus folgt

$$-p_3 + \sqrt{\left(p_3^2 + \tfrac{4}{27} p_2^3\right)} = 2u_1 \text{ und}$$

$$-p_3 - \sqrt{\left(p_3^2 + \tfrac{4}{27} p_2^3\right)} = 2u_2.$$

Die Gröfsen u_1 uud u_2 haben, wie man sieht, in der That die Form der Wurzeln einer Gleichung vom zweiten Grade; dem (§. 6.) gemäfs.

Substituirt man die Werthe von u_1, u_2 in die obigen Ausdrücke von x_1, x_2, x_3, so findet man

$$x_1 = 1^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}p_3 + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}p_3^2 + \tfrac{1}{27}p_2^3\right)}\right]} + 1^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}p_3 - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}p_3^2 + \tfrac{1}{27}p_2^3\right)}\right]}$$
$$x_2 = 1^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}p_3 + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}p_3^2 + \tfrac{1}{27}p_2^3\right)}\right]} + 1^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}p_3 - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}p_3^2 + \tfrac{1}{27}p_2^3\right)}\right]}$$
$$x_3 = \sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}p_3 + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}p_3^2 + \tfrac{1}{27}p_2^3\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}p_3 - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}p_3^2 + \tfrac{1}{27}p_2^3\right)}\right]}.$$

Dieses ist die Cardanische Regel.

B. Wenn man statt der Coefficienten der gegebenen Gleichung, z. B. die Summe beliebiger Potenzen ihrer Wurzeln berechnen will, so findet man nach der nöthigen Reduction:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6 v_1 v_2 = 6 u_1^{\frac{1}{3}} . u_2^{\frac{1}{3}}$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3(v_1^3 + v_2^3) = 3(u_1 + u_2).$$

Nun ist die Summe der Quadrate der Wurzeln, wie bekannt, gleich $-2p_2$, und die Summe ihrer Würfel gleich $-3p_3$, also ist

$$p_2 = -3 u_1^{\frac{1}{3}} u_2^{\frac{1}{3}},$$
$$p_3 = -(u_1 + u_2);$$ wie oben.

C. Wollte man auf die Gleichungen vom dritten Grade das Verfahren (Zweiter Fall §. 8.) anwenden, so müſste man

$$x_1 = z_1 + kz_2,$$
$$x_2 = kz_1 + z_2,$$
$$x_3 = -(k+1)(z_1 + z_2)$$

setzen. In diesen Ausdrücken lassen sich z_1 und z_2 nach Belieben unter einander vertauschen, ohne daſs man aus den Ausdrücken herauskommt. Sie geben

$$p_2 = -(k^2 + k + 1)(z_1^2 + z_2^2) - (k^2 + 4k + 1) z_1 z_2$$ und
$$p_3 = (k+1)\left[k(z_1^3 + z_2^3) + (k^2 + k + 1) z_1 z_2 (z_1 + z_2)\right].$$

Betrachtet man die beiden unbekannten Gröſsen z_1 und z_2 als die Wurzeln einer Gleichung vom zweiten Grade, so muſs man k einen solchen Werth geben, daſs die Glieder, welche $z_1 + z_2$ enthalten, verschwinden; denn weil $z_1 + z_2$, multiplicirt mit $-(k+1)$, einer von den Werthen von x selbst ist, so würde man, wenn man einen andern Werth von k annähme, bei der Berechnung der Coefficienten der auflösenden Gleichung vom zweiten Grade, auf eine Gleichung vom dritten Grade stoſsen. Man muſs also

$$k^2 + k + 1 = 0$$

setzen. Dieses giebt nach der nöthigen Reduction wieder die Cardanische Regel.

III. Es sei die Gleichung vom vierten Grade

$$x^4 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0$$

gegeben.

A. Die Wurzeln dieser Gleichung werden $4 - 1 = 3$ Glieder haben. Sie werden von der Form

$$x_1 = \rho_1 1^{\frac{1}{4}} + \rho_2 1^{\frac{1}{2}} + \rho_3 1^{\frac{3}{4}}$$
$$x_2 = \rho_1 1^{\frac{1}{2}} + \rho_2 1^{1} + \rho_3 1^{\frac{1}{2}}$$
$$x_3 = \rho_1 1^{\frac{3}{4}} + \rho_2 1^{\frac{1}{2}} + \rho_3 1^{\frac{1}{4}}$$
$$x_4 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$$

sein, oder weil $1^{\frac{1}{4}} = \mp\sqrt{-1}$, $1^{\frac{1}{2}} = -1$ und $1^{\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{-1}$ ist, von der Form

$$x_1 = +\sqrt{-1}\,.\,\rho_1 - \rho_2 - \sqrt{-1}\,.\,\rho_3$$
$$x_2 = -\rho_1 + \rho_2 - \rho_3$$
$$x_3 = -\sqrt{-1}\,.\,\rho_1 - \rho_2 + \sqrt{-1}\,.\,\rho_3$$
$$x_4 = +\rho_1 + \rho_2 + \rho_3.$$

B. Die Gleichung vom vierten Grade ist in dem Falle II (§. 8.). Denn die Gröſsen ρ_1, ρ_2, ρ_3, sind nicht symmetrisch mit den vierten Wurzeln von 1 verbunden, indem diese Wurzeln zweiten Wurzeln von 1 gleich sind. Um daher symmetrische Ausdrücke der Wurzeln zu bekommen, setze man

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + z_2 + kz_3 \\ x_2 &= z_1 + kz_2 + z_3 \\ x_3 &= kz_1 + z_2 + z_3 \\ x_4 &= -(k+2)(z_1 + z_2 + z_3). \end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken lassen sich z_1, z_2 und z_3 nach Belieben verwechseln, ohne aus den Ausdrücken herauszugehen.

Setzt man die Ausdrücke in diejenigen der Coefficienten der gegebenen Gleichung, nemlich in

$$\begin{aligned} +p_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 \\ -p_3 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \\ +p_4 &= x_1 x_2 x_3 x_4, \end{aligned}$$

so findet man

$$\begin{aligned} p_2 =& -\left[(k+1)^2 + 2\right]\left[z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right] \\ & -(k+1)\left[k+1+4\right]\left[z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3\right]; \\ p_3 =& \;\; 2(k+1)^2 (z_1^3 + z_2^3 + z_3^3) \\ & +(k+1)\left[(k+1)^2 + 2(k+1) + 4\right]\left[z_1^2 z_2 + z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_2^2 z_3 + z_3^2 z_1 + z_3^2 z_2\right] \\ & +2\left[(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 4\right] z_1 z_2 z_3, \\ p_4 =& -(k+2)\,k\left[z_1^4 + z_2^4 + z_3^4\right] \\ & -(k+2)(k+1)^2\left[z_1^3 z_2 + z_1^3 z_3 + z_2^3 z_1 + z_2^3 z_3 + z_3^3 z_1 + z_3^3 z_2\right] \\ & -(k+2)(k+1)\Big((k+1)^2 - (k+1) + 4\Big)\left[z_1^2 z_2 z_3 + z_2^2 z_1 z_3 + z_3^2 z_1 z_2\right] \\ & -2\Big((k+1)^2 - k\Big)\left[z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_3^2\right], \end{aligned}$$

wo man den Coefficienten k nach Gefallen annehmen kann.

Setzt man $k + 1 = 0$ oder

$$k = -1,$$

so reduciren sich die Werthe von p_2, p_3 und p_4 auf

$$\begin{aligned} p_2 &= -2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \\ p_3 &= +8 z_1 z_2 z_3 \\ p_4 &= z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 - 2(z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_3^2), \end{aligned}$$

und die Ausdrücke von x_1, x_2, x_3, x_4 auf

$$x_1 = + z_1 + z_2 - z_3$$
$$x_2 = + z_1 - z_2 + z_3$$
$$x_3 = - z_1 + z_2 + z_3$$
$$x_4 = - z_1 - z_2 - z_3.$$

Daraus lassen sich z_1, z_2 und z_3 finden. Denn die obigen Ausdrücke von p_2, p_3 und p_4 geben jetzt

$$\tfrac{1}{2} p_2 = -(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$$
$$-\tfrac{1}{64} p_3 = - z_1^2 z_2^2 z_3^2 \text{ und}$$
$$\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}p_2^2 - p_4) = z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_3^2,$$

und z_1^2, z_2^2 und z_3^2 lassen sich als die drei Wurzeln der Gleichung vom dritten Grade

$$(z^2)^3 + \tfrac{1}{2}p_2 (z^2)^2 + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}p_2^2 - p_4)(z^2)^1 - \tfrac{1}{64}p_3^2 = 0$$

betrachten.

Diese Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade kommt, wie man sieht, mit der Eulerschen überein.

C. Wollte man die Ausdrücke (A) von x_1, x_2, x_3 und x_4 beibehalten, so würde

$$p_2 = -2(\varrho_2^2 + 2\varrho_1 \varrho_3)$$
$$p_3 = -4\varrho_2(\varrho_1^2 + \varrho_3^2)$$
$$p_4 = -(\varrho_1^2 - \varrho_3)^2 + \varrho_2^2(\varrho_2^2 - 4\varrho_1 \varrho_3)$$

sein.

Die unbekannten Gröfsen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 kommen in diesen Ausdrücken nicht symmetrisch vor. Aber wenn man daraus durch Elimination ϱ_2 nimmt, so findet man genau die nemliche Gleichung vom dritten Grade, welche oben z^2 gab. In der That kommen die Gröfsen z_2 und z_3 in den Ausdrücken von x_1, x_2, x_3 und x_4 (A und B) gleichförmig vor.

Man könnte auch beliebige andere symmetrische Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung, z. B. die Summen ihrer Potenzen berechnen. Aber das Resultat würde nothwendig das nemliche sein.

IV. Es sei die Gleichung vom fünften Grade

$$x^5 + p_2 x^3 + p_3 x^2 + p_4 x + p_5 = 0$$

gegeben.

A. Die Wurzeln dieser Gleichung werden $5 - 1 = 4$ Glieder haben. Sie werden von der Form

$$x_1 = \varrho_1\, 1^{\frac{1}{5}} + \varrho_2\, 1^{\frac{2}{5}} + \varrho_3\, 1^{\frac{3}{5}} + \varrho_4\, 1^{\frac{4}{5}}$$
$$x_2 = \varrho_1\, 1^{\frac{2}{5}} + \varrho_2\, 1^{\frac{4}{5}} + \varrho_3\, 1^{\frac{1}{5}} + \varrho_4\, 1^{\frac{3}{5}}$$
$$x_3 = \varrho_1\, 1^{\frac{3}{5}} + \varrho_2\, 1^{\frac{1}{5}} + \varrho_3\, 1^{\frac{4}{5}} + \varrho_4\, 1^{\frac{2}{5}}$$
$$x_4 = \varrho_1\, 1^{\frac{4}{5}} + \varrho_2\, 1^{\frac{3}{5}} + \varrho_3\, 1^{\frac{2}{5}} + \varrho_4\, 1^{\frac{1}{5}}$$
$$x_5 = \varrho_1 \quad + \varrho_2 \quad + \varrho_3 \quad + \varrho_4 \quad \text{sein.}$$

B. Die Gleichungen vom fünften Grade sind in dem Falle II. (§. 8.). Die Gröfsen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 sind mit den fünften Wurzeln von 1 nicht symmetrisch verbunden. Man mufs also, um symmetrische Ausdrücke zu bekommen,

$$x_1 = \quad + z_1 + z_2 + z_3 + kz_4$$
$$x_2 = \quad + z_1 + z_2 + kz_3 + z_4$$
$$x_3 = \quad + z_1 + kz_2 + z_3 + z_4$$
$$x_4 = \quad + kz_1 + z_2 + z_3 + z_4$$
$$x_5 = -(k+3)(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) \quad \text{setzen.}$$

C. Wenn man diese Ausdrücke in diejenigen der Coefficienten der gegebenen Gleichung setzt, so findet man nothwendig Ausdrücke, die nach z symmetrisch sind.

Wir wollen der Kürze wegen die Summe von Gröfsen, wie z_1^2, z_2^2 etc. durch $s_2 z$, die Summe von Gröfsen wie $z_1^2.z_2$, $z_1^2.z_3 \ldots\ldots z_2^2.z_3 \ldots\ldots$ durch $s_{2,1} z$ u. s. w. bezeichnen, so dafs die Coefficienten der gegebenen Gleichung

$$+p_2 = s_{1,1}x$$
$$-p_3 = s_{1,1,1}x$$
$$+p_4 = s_{1,1,1,1}x$$
$$-p_5 = s_{1,1,1,1,1}x$$

sind, so findet man, nach den nöthigen Reductionen,

$$p_2 = -(k^2 + 3k + 6)\, s_2 z$$
$$\quad -(k^2 + 8k + 11)\, s_{1,1} z$$
$$p_3 = +(3k^2 + 9k + 8)\, s_3 z$$
$$\quad +(k^3 + 8k^2 + 26k + 25)\, s_{2,1} z$$
$$\quad +2(k^3 + 9k^2 + 24k + 26)\, s_{1,1,1} z$$
$$p_4 = -3(k^2 + 3k + 1)\, s_4 z$$
$$\quad -(2k^3 + 13k^2 + 28k + 17)\, s_{3,1} z$$
$$\quad -(k^4 + 9k^3 + 38k^2 + 73k + 59)\, s_{2,1,1} z$$
$$\quad -(4k^3 + 20k^2 + 38k + 28)\, s_{2,2} z$$
$$\quad -(3k^4 + 24k^3 + 66k^2 + 144k + 123)\, s_{1,1,1,1} z$$

$$\begin{aligned}
p_5 = &+ k(k+3)\, s_5 z \\
&+ (k+3)(k^2+3k+1)\, s_{4,1} z \\
&+ (k+3)(k^3+4k_2+9k+6)\, s_{3,1,1} z \\
&+ (k+3)(3k^2+4k+3)\, s_{3,2} z \\
&+ 2(k+3)(k^3+3k^2+6k+5)\, s_{2,2,1} z \\
&+ (k+3)(k^4+3k^3+12k^2+23k+21)\, s_{2,1,1,1} z.
\end{aligned}$$

Nachdem man der willkürlichen Gröfse k irgend einen Werth gegeben hat, würde man aus diesen vier Gleichungen die Coefficienten der auflösenden Gleichung in z entwickeln müssen. Aber diese Entwickelung führt auf Gleichungen von höheren Graden als den der gegebenen.

D. Aus den Ausdrücken (B) lassen sich auch leicht die Ausdrücke der Summen der Potenzen von z_1, z_2, z_3, z_4 finden; aber die Anwendung derselben auf die auflösende Gleichung hat die nemlichen Schwierigkeiten.

E. Setzt man die ersten Ausdrücke der Wurzeln der gegebenen Gleichung (A) in die Coefficienten dieser Gleichung, so findet man:

$$\begin{aligned}
p_2 &= -5(\rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3) \\
p_3 &= -5(\rho_1^2\rho_3 + \rho_2^2\rho_1 + \rho_3^2\rho_4 + \rho_4^2\rho_2) \\
p_4 &= -5(\rho_1^3\rho_2 + \rho_2^3\rho_4 + \rho_3^3\rho_1 + \rho_4^3\rho_3) \\
&\quad + 5(\rho_1^2\rho_4^2 + \rho_2^2\rho_3^2) \\
&\quad - 5\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 \\
p_5 &= -(\rho_1^5 + \rho_2^5 + \rho_3^5 + \rho_4^5) \\
&\quad + 5(\rho_1^3\rho_3\rho_4 + \rho_2^3\rho_1\rho_3 + \rho_3^3\rho_2\rho_4 + \rho_4^3\rho_1\rho_2) \\
&\quad - 5(\rho_1^2\rho_2^2\rho_4 + \rho_1^2\rho_3^2\rho_2 + \rho_3^2\rho_4^2\rho_1 + \rho_2^2\rho_4^2\rho_3).
\end{aligned}$$

F. Diese Ausdrücke lassen sich auch in folgende verwandeln:

$$\begin{aligned}
p_2 &= -5(\rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3) \\
p_3 &= -5(\rho_1^2\rho_3 + \rho_2^2\rho_1 + \rho_3^2\rho_4 + \rho_4^2\rho_2) \\
p_4 - \tfrac{1}{5}p_2^2 &= -5(\rho_1^3\rho_2 + \rho_2^3\rho_4 + \rho_3^3\rho_1 + \rho_4^3\rho_3 + 3\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4) \\
p_5 - \tfrac{1}{5}p_2 p_3 &= -(\rho_1^5 + \rho_2^5 + \rho_3^5 + \rho_4^5) \\
&\quad - 10(\rho_1^2\rho_2^2\rho_4 + \rho_1^2\rho_3^2\rho_2 + \rho_3^2\rho_4^2\rho_1 + \rho_2^2\rho_4^2\rho_3)
\end{aligned}$$

G. Wir wollen noch die Ausdrücke der zweiten, dritten, vierten und fünften Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung hersetzen, deren Werthe man durch die Coefficienten p_2, p_3, p_4 und p_5 berechnen kann. Sie sind folgende:

$$s_2\, x = 10(\rho_1\, \rho_4 + \rho_2\, \rho_3)$$
$$s_3\, x = 15(\rho_1^2\, \rho_3 + \rho_2^2\, \rho_1 + \rho_3^2\, \rho_4 + \rho_4^2\, \rho_2)$$
$$s_4\, x = 20(\rho_1^3\, \rho_2 + \rho_2^3\, \rho_4 + \rho_3^3\, \rho_1 + \rho_4^3\, \rho_3)$$
$$+ 30(\rho_1^2\, \rho_4^2 + \rho_2^2\, \rho_3^2)$$
$$+ 120\, \rho_1\, \rho_2\, \rho_3\, \rho_4$$
$$s_5\, x = 5(\rho_1^5 + \rho_2^5 + \rho_3^5 + \rho_4^5)$$
$$+ 100(\rho_1^3\, \rho_3\, \rho_4 + \rho_2^3\, \rho_1\, \rho_3 + \rho_3^3\, \rho_2\, \rho_4 + \rho_4^3\, \rho_1\, \rho_2)$$
$$+ 150(\rho_1^2\, \rho_2^2\, \rho_4 + \rho_1^2\, \rho_3^2\, \rho_2 + \rho_3^2\, \rho_4^2\, \rho_1 + \rho_2^2\, \rho_4^2\, \rho_3).$$

H. Zufolge (§. 6.) müssen die Gröfsen ρ_1, ρ_2, ρ_3 und ρ_4 nothwendig die Form der Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade haben. Man kann solches für den gegenwärtigen Fall, mit Hülfe der Ausdrücke (A), noch besonders nachweisen.

In diesen Ausdrücken können die Gröfsen ρ_1, ρ_4 und ρ_2, ρ_3 (nicht ρ_1, ρ_2 und ρ_1, ρ_3) beliebig verwechselt werden, ohne dafs man aus den Ausdrücken der fünf Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 herauskäme. Also können ρ_1, ρ_4 und ρ_2, ρ_3 als die Wurzeln zweier Gleichungen vom zweiten Grade, die zugleich Statt finden, betrachtet werden. Folglich werden ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 die Wurzeln des Products dieser beiden Gleichungen, also die Wurzeln einer Gleichung von der Form

$$(\rho^2 + A\rho + B)(\rho^2 + C\rho + D) = 0$$

sein, wo

$$A = -(\rho_1 + \rho_4)$$
$$B = +\rho_1\, \rho_4$$
$$C = -(\rho_2 + \rho_3)$$
$$D = +\rho_2\, \rho_3$$

ist.

Aber die Gleichung $(\rho^2 + A\rho + B)(\rho^2 + C\rho + D) = 0$ ist so viel als

$$\rho^4 + (A+C)\,\rho^3 + (B+D+AC)\,\rho^2 + (AD+BC)\,\rho + BD = 0,$$

und man findet, wenn man die Coefficienten dieser Gleichung durch K, L, M, N bezeichnet, und die obigen Ausdrücke von A, B, C, D substituirt,

$$K = -(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4)$$
$$L = +(\rho_1\, \rho_2 + \rho_1\, \rho_3 + \rho_1\, \rho_4 + \rho_2\, \rho_3 + \rho_2\, \rho_4 + \rho_3\, \rho_4$$
$$M = -(\rho_1\, \rho_2\, \rho_3 + \rho_1\, \rho_2\, \rho_4 + \rho_1\, \rho_3\, \rho_4 + \rho_2\, \rho_3\, \rho_4)$$
$$N = +\rho_1\, \rho_2\, \rho_3\, \rho_4,$$

woraus folgt, dafs die Coefficienten der Gleichung $(\rho^2+A\rho+B)(\rho^2+C\rho+D)=0$ genau die nemlichen symmetrischen Functionen sind, wie die Coefficienten einer

Glei-

Gleichung vom vierten Grade, deren Wurzeln v_1, v_2, v_3, v_4 waren. Also sind die vier Gröfsen v_1, v_2, v_3, v_4 nothwendig die Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade, obgleich sich in den allgemeinen Ausdrücken der Wurzeln der gegebenen Gleichung nur v_1, v_4 und v_2, v_3 verwechseln lassen.

F. Es kommt darauf an, die vier Gröfsen v_1, v_2, v_3, v_4 oder z_1, z_2, z_3, z_4 zu finden. Sie müssen aus den obigen Ausdrücken (*C*, *D*, *E*, *F* oder *G*) entwickelt werden. Will man die Elimination vermeiden, so kann man die Coefficienten der auflösenden Gleichung

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$
$$u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_1 u_4 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_4$$
$$u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_4$$
$$u_1 u_2 u_3 u_4,$$

mit Hülfe der reciproken Ausdrücke von v_1, v_2 etc. durch x_1, x_2 etc. suchen. Diese Coefficienten werden aus symmetrischen Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung x_1, x_2 etc. zusammengesetzt sein. Sie werden also Fuctionen der bekannten Coefficienten der gegebenen Gleichung sein. Man stöfst aber bei dieser Rechnung auf Gleichungen vom sechsten Grade, welche sich noch weniger als die vom fünften Grade auflösen lassen. (Man sehe Lagrange *traité de la resolution des équations numériques*, Note XIII. Nr. 22 u. 38.)

10.

Wir wollen die Anwendung der allgemeinen Ausdrücke der Wurzeln algebraischer Gleichungen nicht weiter auf Gleichungen vom sechsten und von höheren Graden fortsetzen. Der Gang der Rechnung würde immer der nemliche sein, aber auch die Schwierigkeiten der Entwickelung der integrirenden Theile der Wurzeln würde bleiben und immerfort zunehmen.

Auch wollen wir nicht neue Versuche machen, diese Schwierigkeiten zu heben, weil unser Zweck nicht die Auflösung der Gleichungen selbst war, sondern nur eine Untersuchung der allgemeinen Form der Wurzeln.

Wir wollen mit einigen Bemerkungen etc. über die Möglichkeit der Auflösung algebraischer Gleichungen überhaupt, schliefsen.

11.

Bekanntlich haben die Analysten Beweise der Unmöglichkeit der Auflösung der Gleichungen gegeben, deren Grad den vierten übersteigt. (Man sehe unter andern die Abhandlungen von Ruffini.) In der That findet man dafs die Coefficienten der auflösenden Gleichung, welche für eine gegebene Gleichung vom n^{ten} Grade, vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade ist, von Gleichungen des $(n-2)$ $(n-3)$ . . . . . . 1ten

Grades abhängen, (man sehe Lagrange am angeführten Orte), und das Product $(n-2)(n-3)\ldots\ldots 1$ ist immer gröfser als n, wenn n gröfser als 4 ist. Allein hier ist Folgendes zu bemerken:

Die Coefficienten der wirklichen auflösenden Gleichung können keine anderen als rationale und einzige Werthe haben, weil die Coefficienten einer Gleichung immer reelle und rationale Functionen der Wurzeln sind. Wenn also die Gleichungen, welche die Coefficienten der auflösenden Gleichung zu Wurzeln haben, mehrere Werthe für diese Coefficienten geben, so mufs nothwendig die wahre auflösende Gleichung, welche man die allgemeine nennen könnte, das Product aller jener auflösenden Gleichungen sein, die jene verschiedenen Wurzeln zu Coefficienten haben. Die Gleichungen vom vierten Grade geben ein Beispiel. Obgleich ihre Wurzeln nur aus drei integrirenden Theilen zusammengesetzt sind, ist dennoch ihre auflösende Gleichung nicht vom dritten, sondern vom sechsten Grade. Welches nun aber auch der Grad der allgemeinen auflösenden Gleichung sein mag, nie kann diese Gleichung mehr als $n-1$ von einander verschiedene Wurzeln haben, weil nur $n-1$ integrirende Theile der Wurzeln der gegebenen Gleichung existiren, und die auflösende Gleichung einzig und allein von der gegebenen Gleichung abhängt. Die allgemeine auflösende Gleichung mufs also gleiche Wurzeln haben. Nun aber kann man allezeit die gleichen Wurzeln einer Gleichung von einem beliebigen Grade finden. Also kann man diese gleichen Wurzeln der allgemeinen auflösenden Gleichung aus derselben absondern, und die Gleichung, welche übrig bleibt, mufs nothwendig vom $n-1$ten Grade sein, und die $n-1$ integrirenden Theile der Wurzeln der gegebenen Gleichung zu Wurzeln haben, welche Gleichung sich alsdann auflösen läfst.

Vielleicht gelangt man zu einem solchen Resultat, wenn man einfacher Weise $n-2$ Gröfsen zwischen den $n-1$ Gleichungen, die zwischen den $n-1$ integrirenden Theilen der Wurzeln der gegebenen Gleichung Statt finden, eliminirt, und gehörig die Factoren, welche die Elimination herbeiführen kann, wegschafft; zum Beispiel, wenn man in dem Falle von Gleichungen des fünften Grades, drei von den vier Gröfsen v_1, v_2, v_3, v_4 oder u_1, u_2, u_3, u_4 zwischen den vier Gleichungen (9. *IV. F.*) zu eliminiren sucht.

12.

Gelingt aber wirklich keine Auflösung von Gleichungen von höheren Graden, oder läfst sich die Unmöglichkeit einer solchen Auflösung a priori beweisen, so mufs man auf dieselbe freilich auf diesem Wege verzichten. Aber auch

selbst dann darf man noch keinesweges an der Auflösung der Gleichungen von höheren Graden überhaupt verzweifeln; denn man ist alsdann noch von nichts weiter überzeugt worden, als dafs der Ausdruck der Wurzeln von höheren Gleichungen, als denen des vierten Grades, durch Wurzelgröfsen unmöglich sei, keinesweges überhaupt. Im Allgemeinen heifst eine Gleichung auflösen, offenbar nichts anderes, als endliche Ausdrücke der Wurzeln durch beliebige Functionen angeben, deren Eigenschaften und Gesetze man kennt, und es ist keinesweges unmöglich, dafs dergleichen Functionen existiren, und dafs man sie nicht sollte finden können.

Im Gegentheil müssen solche Functionen nothwendig existiren, weil die Wurzeln einer Gleichung unter allen Umständen wirklich Functionen ihrer Coefficienten sind, und es nur darauf ankommt, sie zu suchen. Die Gleichungen vom dritten und vierten Grade deuten schon an, dafs Wurzelgröfsen keinesweges in allen Fällen geeignet sind, die Wurzeln algebraischer Gleichungen auszudrücken; denn in dem Falle, welchen man den irreductibeln nennt, geben die Wurzelgröfsen nur noch blos das Bild der Wurzeln, nicht mehr ihren Werth. Man kommt in diesem Falle bekanntlich auf trigonometrische Functionen. Es sei z. B. die Gleichung vom dritten Grade

$$x^3 + p_2 x + p_3 = 0$$

gegeben, so darf man nur

$$x = y \cos\varphi$$

setzen. Dieses giebt

$$y^3 \cos\varphi^3 + p_2 y \cos\varphi + p_3 = 0 \text{ oder}$$

$$4\cos\varphi^3 + \frac{4p_2}{y^2}\cos\varphi + \frac{4p_3}{y^3} = 0.$$

Nun ist

$$\cos 3\varphi = 4\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi.$$

Setzt man also

$$\frac{4p_2}{y^2} = -3 \text{ oder } y = 2\sqrt{-\frac{p_2}{3}},$$

so findet man

$$\cos 3\varphi + \frac{4p_3}{y^3} = 0 \text{ oder}$$

$$\cos 3\varphi = -\frac{4p_3}{y^3} = \frac{3p_3\sqrt{3}}{2p_2\sqrt{-p_2}}.$$

Daraus kann man $\cos\varphi$ berechnen, und weil

$$\cos 3\varphi = \cos(3\varphi + 2\pi) = \cos(3\varphi + 4\pi),$$

so findet man

$$x_1 = \qquad 2\cos\varphi\sqrt{-\frac{p_2}{3}}$$

$$x_2 = 2\cos(\varphi + \tfrac{1}{3}\pi)\sqrt{-\frac{p_2}{3}}$$

$$x_3 = 2\cos(\varphi + \tfrac{2}{3}\pi)\sqrt{-\frac{p_2}{3}}.$$

Diese Ausdrücke geben die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung in allen Fällen, wenn man unmögliche Bogen zu Hülfe nimmt. Die Wurzeln der Gleichungen vom vierten Grade beziehen sich auf die vom dritten.

Auch die trigonometrischen Functionen reichen zwar für Gleichungen vom fünften und höheren Graden nicht zu; denn wollte man z. B. für den fünften Grad $x = y \cos\varphi$ setzen, so würde man nur zwei willkürliche Gröfsen y und φ haben, während die aufzulösende Gleichung deren $n - 1 = 4$ hat, nämlich vier verschiedene Coefficienten. Aber die trigonometrischen Functionen sind auch im Grunde noch nichts anderes als Wurzelgröfsen, unter einer anderen Form. Potenzen, Logarithmen und trigonometrische Functionen kommen von einer und derselben Art von Gröfsen her und sind ähnlichen Gesetzen unterworfen.

Die Auflösung der Gleichungen höherer Grade erfordert also Functionen mit mehreren willkürlichen Gröfsen. Functionen dieser Art sind in der That noch wenig untersucht, aber ohne Zweifel existiren dergleichen. Factoriellen mit beliebigen Exponenten und ellyptische Functionen, die sich die einen auf die anderen beziehen, sind Beispiele davon. Vielleicht gelingt die allgemeine Auflösung der algebraischen Gleichungen, wenn man Functionen von höheren Graden als die Potenzen, welche man Functionen vom zweiten Grade nennen könnte, näher untersucht haben wird. Alle endlichen Functionen der Analysis reduciren sich im Grunde bis jetzt auf die Potenzen.

Uebrigens würde ein Beweis der Unmöglichkeit der Auflösung höherer algebraischer Gleichungen durch Wurzelgröfsen, wenn ein solcher gelänge, keinesweges den Resultaten der obigen Untersuchungen über die Form der Wurzeln, deren Allgemeinheit behauptet wurde, widersprechen. Denn wir gingen bei diesen Untersuchungen von der Voraussetzung aus, dafs sich die Vielfachheit der Wurzeln einer Gleichung durch Wurzelgröfsen ausdrücken lasse. Findet diese Voraussetzung in diesem oder jenem Falle nicht Statt, so fallen auch die Entwickelungen weg, welche darauf gegründet sind. Aber sie gelten, so lange die Voraussetzung Statt findet.

12.

Bemerkungen über die Abhandlung Nr. 4, Seite 37. im ersten Heft dieses Journals.

(1. Von Herrn *N. H. Abel.*)

Der Zweck der Abhandlung ist, die Wirkung einer Kraft auf drei gegebene Puncte zu finden. Die Resultate des Verfassers sind vollkommen richtig, so lange die drei Puncte nicht in einer und derselben geraden Linie liegen; sonst aber nicht.

Die drei Gleichungen nemlich, aus welchen die drei unbekannten Gröſsen Q, Q', Q'' gefunden werden, sind

$$1.\ \begin{cases} P = Q + Q' + Q'' \\ Q'b \sin\alpha = + Q''c \sin\beta \\ Qa \sin\alpha = - Q''c \sin(\alpha+\beta). \end{cases}$$

Dieselben finden für beliebige Werthe von P, a, b, c und α und β Statt. Allgemein geben sie, wie auch der Verfasser findet,

$$Q = \frac{-bc\sin(\alpha+\beta)}{r}.P$$

$$Q' = \frac{ac\sin\beta}{r}.P$$

$$Q'' = \frac{ab\sin\alpha}{r}.P,$$

wo

$$r = ab\sin\alpha + ac\sin\beta - bc\sin(\alpha+\beta).$$

Aber die Gleichungen hören auf bestimmt zu sein, sobald der Ausdruck einer oder der anderen von den Gröſsen Q, Q', Q'' die Gestalt $\frac{0}{0}$ bekommt, welches wie leicht zu sehen, für

$$\alpha = \beta = 180^\circ$$

geschieht. In diesem Falle muſs man auf die Grund-Gleichungen (1) zurückgehen. Dieselben geben alsdann

$$P = Q + Q' + Q''$$
$$Q'b \sin 180^\circ = + Q''c \sin 180^\circ$$
$$Qa \sin 180^\circ = - Q''c \sin 360^\circ.$$

Die beiden letzteren Gleichungen sind aber identisch, weil

$$\sin 180^\circ = \sin 360^\circ = 0 \text{ ist.}$$

Also findet in dem Fall

$$\alpha = \beta = 180^\circ$$

nur eine Gleichung

$$P = Q + Q' + Q''$$

Statt, und folglich lassen sich alsdann aus den von dem Verfasser aufgestellten Gleichungen die Werthe von Q, Q', Q'' nicht finden.

N. H. Abel.

(2. Vom Herausgeber.)

1.

Dafs der Druck, welchen eine Kraft P, z. B. ein Gewicht P (Taf. 2. Fig. 1.), welches auf eine gerade, unbiegsame Linie ABC wirkt, in drei beliebigen Puncten derselben, A, B, C hervorbringt, in den einzelnen Puncten keine bestimmte Gröfse hat, sondern unendlich verschieden sein kann: davon kann man sich, wie folgt, überzeugen.

Es sei

$$AP = a, \; BP = b, \; CP = c.$$

Die Linie ABC sei erst in A und C allein unterstützt, so wird

$$1. \begin{cases} \text{der Punct } A \text{ mit einer Kraft } Q = P \cdot \dfrac{c}{a+c}, \\ \text{der Punct } C \text{ mit einer Kraft } Q'' = P \cdot \dfrac{a}{a+c} \end{cases}$$

gedrückt. Die Linie sei ferner in A und B allein unterstützt, so wird

$$2. \begin{cases} \text{der Punct } A \text{ mit einer Kraft } Q = P \cdot \dfrac{b}{a+b}, \\ \text{der Punct } B \text{ mit einer Kraft } Q' = P \cdot \dfrac{a}{a+b} \end{cases}$$

gedrückt.

Nun stelle man sich vor, in der ersten Voraussetzung (1.) fange in B eine Kraft Q' senkrecht von unten nach oben zu wirken an, so mufs für das Gleichgewicht, was auch Q' sein mag,

$$3. \quad Qa = Q'b + Q''c$$

sein.

Aufserdem ist immer

$$4.\quad Q + Q' + Q'' = P.$$

Es kann also, wenn Q' nicht Null ist, nicht mehr, wie in (1.), $Q = P\frac{c}{a+c}$ und $Q'' = P.\frac{a}{a+c}$ sein. Von der Gleichung (3.) nebst (4.) hängen vielmehr, wenn man Q' willkürlich annimmt, die beiden anderen Kräfte Q und Q'' ab.

Man findet, wenn man in (3.) $P - Q - Q'$ statt Q'' und $P - Q' - Q''$ statt Q setzt,

$$Q\,a = Q'b + (P - Q - Q')\,c, \text{ und}$$
$$(P - Q' - Q'')\,a = Q'b + Q''c,$$

woraus

$$5.\quad Q = \frac{Pc - Q'(c-b)}{a+c} \text{ und}$$
$$6.\quad Q'' = \frac{Pa - Q'(a+b)}{a+c}$$

folgt.

Die Kräfte Q, Q', Q'' hängen also von einander ab, haben aber keine einzelnen bestimmten Werthe, sondern zwei werden gefunden, wenn man die dritte willkürlich annimmt. Es giebt nur die zwei bestimmten Gleichungen (3.) und (4.), aus welchen sich die drei Gröfsen Q, Q', Q'' nicht unbedingt finden lassen.

Die Kräfte Q, Q' und Q'' sind übrigens zwischen Grenzen eingeschlossen, nemlich

7. Q zwischen den Grenzen $\frac{Pc}{a+c}$ und $\frac{Pb}{a+b}$,

8. Q' zwischen den Grenzen 0 und $\frac{Pa}{a+b}$,

9. Q'' zwischen den Grenzen $\frac{Pa}{a+c}$ und 0;

denn da $c > b$: so ist z. B. Q am gröfsesten, wenn die Linie ABC blos in A und C unterstützt wird, oder wenn $Q' = 0$ und $Q'' = \frac{Pa}{a+c}$. Alsdann ist $Q = \frac{Pc}{a+c}$ (1.). Es ist am kleinsten, wenn die Linie ABC blos in A und B unterstützt wird, oder wenn $Q' = \frac{Pb}{a+b}$ (2.) und $Q'' = 0$; welches zugleich die Grenzen für die beiden andern Kräfte giebt.

Auch auf folgende Weise kann man sich noch sinnlicher überzeugen, dafs es sich, wie eben gesagt, verhält. Man stelle sich vor, an der geraden unbiegsa-

men Linie ABC (Fig. 2., Taf. 2.) hänge ein Gewicht P, und in den Entfernungen $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$ vom Aufhängepunct wären Seile befestiget, die über Rollen gingen, an deren anderen Ende Schalen befestiget wären, um Gewichte Q, Q', Q'' darauf zu legen. Die Reibung, die Steifigkeit der Seile und das Gewicht der Schalen wird natürlich bei Seite gesetzt. Alsdann ist es klar, daſs das Ganze im Gleichgewicht sein wird, wenn

$$10. \quad Q + Q' + Q'' = P \text{ und}$$

$$11. \quad Qa = Q'b + Q''c.$$

Es wird also z. B. eben sowohl ein Gleichgewicht Statt finden, wenn $Q' = 0$, und folglich blos

$$Q + Q'' = P \text{ und } Qa = Q''c,$$

also $Q = \frac{Pc}{a+c}$, $Q'' = \frac{Pa}{a+c}$, oder wenn $Q'' = 0$ und folglich

$$Q + Q' = P \text{ und } Qa = Q'b,$$

mithin $Q = \frac{Pb}{a+b}$, $Q' = \frac{Pa}{a+b}$ ist; oder auch, wenn Q' irgend ein anderes Gewicht ist, welches zwischen 0 und $\frac{Pa}{a+b}$ fällt. Man wird die Gewichte theilweise aus der einen Wagschale wegnehmen und in die andere legen können, wenn man sie nur so vertheilt, daſs die Gleichungen (10. und 11.) Statt finden. Die Gewichte Q, Q' und Q'' haben also keine einzelne bestimmte Gröſse, sondern können sein, was man will, in sofern sie nur zwischen den obigen Grenzen (7. 8. 9.) bleiben, und gegen einander in demjenigen Verhältnisse stehen, welches die beiden Gleichungen (10. und 11.) oder (4. und 3.) bestimmen.

Die Beantwortung der Frage, wie groſs die Drucke sind, die ein Gewicht P (Fig. 1. Taf. 2.), das auf eine unbiegsame gerade Linie wirkt, auf drei Unterstützungspuncte A, B, C hervorbringt, ist also folgende:

Die Gröſse der Drucke ist zwischen den Grenzen (7. 8. 9.) eingeschlossen, und wenn man die Gröſse des einen Druckes, z. B. die Gröſse von Q', willkürlich angenommen hat, so werden die beiden anderen durch die Gleichungen (5. und 6.) bestimmt.

2.

Es wäre nun zuförderst die Frage, ob die Werthe von Q, Q', Q'', welche im ersten Hefte (S. 37.) gefunden wurden, unter den verschiedenen Gröſsen, welche Q, Q', Q'' haben können, mit begriffen sind.

Man setze

$$12.\quad b = ma,\ c = na,$$

so sind die Grenzen (7. 8. 9.)

$$13.\quad \text{für } Q \text{ gleich } P.\frac{n}{1+n} \text{ und } P.\frac{m}{1+m} \quad (7.)$$

$$14.\quad \text{für } Q' \text{ gleich } \quad 0 \quad \text{ und } P.\frac{1}{1+m} \quad (8.)$$

$$15.\quad \text{für } Q'' \text{ gleich } P.\frac{1}{1+n} \text{ und } \quad 0 \quad (9.);$$

desgleichen sind die (Seite 37.) gefundenen Ausdrücke von Q, Q', Q'' folgende:

$$16.\quad Q = P.\frac{2mn}{2mn+m+n},$$

$$17.\quad Q' = P.\frac{n}{2mn+m+n},$$

$$18.\quad Q'' = P.\frac{m}{2mn+m+n}.$$

Sind nun (16. 17. 18.) zwischen den Grenzen (13. 14. 15.) eingeschlossen, so müssen die Differenzen

$$P.\frac{n}{1+n} - P.\frac{2mn}{2mn+m+n} \text{ und } P.\frac{2mn}{2mn+m+n} - P.\frac{m}{1+m},$$

$$P.\frac{n}{2mn+m+n} - 0 \quad \text{ und } P.\frac{1}{1+m} - P.\frac{n}{2mn+m+n},$$

$$P.\frac{1}{1+n} - P.\frac{m}{2mn+m+n} \text{ und } P.\frac{m}{2mn+m+n} - 0$$

gleiche Zeichen haben. Die Differenzen sind, wenn man reducirt, folgende:

$$\begin{cases} P.\dfrac{2mn^2+mn+n^2-2mn-2mn^2}{(1+n)(2mn+m+n)} = P.\dfrac{n(n-m)}{(1+n)(2mn+m+n)} \text{ und} \\ P.\dfrac{2mn+2m^2n-2m^2n-m^2-mn}{(1+m)(2mn+m+n)} = P.\dfrac{m(n-m)}{(1+m)(2mn+m+n)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P.\dfrac{n}{2mn+m+n} = P.\dfrac{(1+m)n}{(1+m)(2mn+m+n)} \text{ und} \\ P.\dfrac{2mn+m+n-n-mn}{(1+m)(2mn+m+n)} = P.\dfrac{(1+n)m}{(1+m)(2mn+m+n)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P.\dfrac{2mn+m+n-m-mn}{(1+n)(2mn+m+n)} = P.\dfrac{(1+m)n}{(1+n)(2mn+m+n)} \text{ und} \\ P.\dfrac{m}{2mn+m+n} = P.\dfrac{(1+n)m}{(1+n)(2mn+m+n)}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke haben wirklich einerlei Zeichen, weil m und n gleiche Zei-

chen haben. Die Werthe von Q, Q', Q'' (S. 37.) sind also in den Grenzen von Q, Q', Q'' eingeschlossen, und folglich, obgleich sie nicht die einzigen sind, und es noch unzählige andere giebt, allerdings richtig.

3.

Warum durch das Verfahren (S. 37.) die Ausdrücke von Q, Q', Q'' nicht vollständig gefunden werden, hat schon hier oben Herr Abel angedeutet. Es bleibt aber noch die Frage, wie auf dem Wege (S. 37.) die vollständigen Ausdrücke gefunden werden können. Dieses ist zu beantworten nöthig, weil gegen das Verfahren (S. 37.) an sich selbst nichts einzuwenden ist, und also, wenn durch dasselbe der Ausdruck nicht gefunden würde, auch hier der Irrthum entstehen könnte, dafs die Schuld an der Analysis liege.

Man kann die Ausdrücke von Q, Q', Q'' auf dem Wege (S. 37.), wie folgt, finden:

I. Man bezeichne

19. α durch $2\varrho - \varkappa$ und
β durch $2\varrho - \lambda$,

wo ϱ einen rechten Winkel bedeutet, so sind die allgemeinen Ausdrücke von Q, Q', Q'' (S. 37.), nemlich diejenigen für beliebige α und β, welche ohne allen Zweifel richtig sind, folgende:

$$20.\quad Q = \frac{bc \sin(\varkappa + \lambda)}{bc \sin(\varkappa + \lambda) + ab \sin\varkappa + ac \sin\lambda} \cdot P,$$

$$21.\quad Q' = \frac{ac \,.\, \sin\lambda}{bc \sin(\varkappa + \lambda) + ab \sin\varkappa + ac \sin\lambda} \cdot P,$$

$$22.\quad Q'' = \frac{ab \,.\, \sin\varkappa}{bc \sin(\varkappa + \lambda) + ab \sin\varkappa + ac \sin\lambda} \cdot P.$$

II. Man setze

23. $\lambda = \mu . \varkappa$,

wo μ eine beliebige ganze oder gebrochene, positive Zahl bedeutet, und dividire die Ausdrücke (20. 21. 22.) zugleich oben und unten durch $\sin\varkappa$: so verwandeln sich dieselben in folgende:

$$23.\quad Q = \frac{bc\,\frac{\sin(1+\mu)\varkappa}{\sin\varkappa}}{bc\,\frac{\sin(1+\mu)\varkappa}{\sin\varkappa} + ab + ac\,\frac{\sin\mu\varkappa}{\sin\varkappa}} \cdot P,$$

$$24.\quad Q' = \frac{ac\,\frac{\sin\mu\varkappa}{\sin\varkappa}}{bc\,\frac{\sin(1+\mu)\varkappa}{\sin\varkappa} + ab + ac\,\frac{\sin\mu\varkappa}{\sin\varkappa}}\,.\,P,$$

$$25.\quad Q'' = \frac{ab}{bc\,\frac{\sin(1+\mu)\varkappa}{\sin\varkappa} + ab + ac\,\frac{\sin\mu\varkappa}{\sin\varkappa}}\,.\,P.$$

Desgleichen setze man $\frac{1}{\mu}\lambda$ statt $\varkappa$, und dividire oben und unten durch $\sin\varkappa$: so findet man

$$26.\quad Q = \frac{bc\,\frac{\sin(\frac{1}{\mu}+1)\lambda}{\sin\lambda}}{bc\,.\,\frac{\sin(\frac{1}{\mu}+1)\lambda}{\sin\lambda} + ab\,\frac{\sin\frac{1}{\mu}\lambda}{\sin\lambda} + ac}\,.\,P,$$

$$27.\quad Q' = \frac{ac}{bc\,\frac{\sin(\frac{1}{\mu}+1)\lambda}{\sin\lambda} + ab\,\frac{\sin\frac{1}{\mu}\lambda}{\sin\lambda} + ac}\,.\,P,$$

$$28.\quad Q'' = \frac{ab\,\frac{\sin\frac{1}{\mu}\lambda}{\sin\lambda}}{bc\,\frac{\sin(\frac{1}{\mu}+1)\lambda}{\sin\lambda} + ab\,\frac{\sin\frac{1}{\mu}\lambda}{\sin\lambda} + ac}\,.\,P.$$

III. Nun fallen die Puncte A, B, C (Fig. 11. Taf. 1.) offenbar in eine und dieselbe gerade Linie, sobald

$$\varkappa = 0 \text{ und } \lambda = 0.$$

Setzt man in den Ausdrücken (23. 24. 25.) $\varkappa = 0$: so ist in denselben zugleich λ oder $\mu\varkappa$ gleich Null, für jeden beliebigen Werth von μ, Null eingeschlossen, Unendlich ausgenommen. Setzt man in den Ausdrücken (26. 27. 28.) $\lambda = 0$: so ist in denselben zugleich $\varkappa$ oder $\frac{1}{\mu}\lambda$ gleich Null, für jeden beliebigen Werth von μ, Unendlich eingeschlossen, Null aber ausgenommen. Es kommt also nur auf die Werthe von Q, Q', Q'' in (23. 24. 25.) für $\varkappa = 0$ und in (26. 27. 28.) für $\lambda = 0$ an. Man findet auf die bekannte Weise, durch Ableitungen:

$$\frac{\sin(1+\mu)\varkappa}{\sin\varkappa} = \frac{d.\sin(1+\mu)\varkappa}{d.\sin\varkappa} = \frac{(1+\mu)\cos(1+\mu)\varkappa}{\cos\varkappa} = 1+\mu, \text{ für } \varkappa = 0,$$

$$\frac{\sin\mu\varkappa}{\sin\varkappa} = \frac{d.\sin\mu\varkappa}{d.\sin\varkappa} = \frac{\mu\cos\mu\varkappa}{\cos\varkappa} = \mu, \text{ für } \varkappa = 0;$$

$$\frac{\sin(\frac{1}{\mu}+1)\lambda}{\sin\lambda} = \frac{d.\sin(\frac{1}{\mu}+1)\lambda}{d\sin\lambda} = \frac{(\frac{1}{\mu}+1)\cos(\frac{1}{\mu}+1)\lambda}{\cos\lambda} = \frac{1}{\mu}+1, \text{ für } \lambda = 0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{\mu}\varkappa}{\sin\lambda} = \frac{d.\sin\frac{1}{\mu}\lambda}{d.\sin\lambda} = \frac{\frac{1}{\mu}\cos\frac{1}{\mu}\lambda}{\cos\lambda} = \frac{1}{\mu}, \text{ für } \lambda = 0;$$

folglich geben die Ausdrücke (23. 24. 25.) für $\varkappa = 0$,

$$29.\quad Q = \frac{(1+\mu)bc}{(1+\mu)bc + ab + \mu ac}.P,$$

$$30.\quad Q' = \frac{\mu ac}{(1+\mu)bc + ab + \mu ac}.P,$$

$$31.\quad Q'' = \frac{ab}{(1+\mu)bc + ab + \mu ac}.P,$$

und die Ausdrücke (26. 27. 28.) für $\lambda = 0$,

$$32.\quad Q = \frac{(\frac{1}{\mu}+1)bc}{(\frac{1}{\mu}+1)bc + \frac{1}{\mu}ab + ac}.P,$$

$$33.\quad Q' = \frac{ac}{(\frac{1}{\mu}+1)bc + \frac{1}{\mu}ab + ac}.P,$$

$$34.\quad Q'' = \frac{\frac{1}{\mu}ab}{(\frac{1}{\mu}+1)bc + \frac{1}{\mu}ab + ac}.P;$$

wo μ ganz willkürlich ist.

IV. Für verschiedene Werthe von μ haben, wie man sieht, Q, Q', Q'' verschiedene Werthe. Die gröfsten oder die kleinsten unter ihnen, oder die Grenzen von Q, Q', Q'' findet man, wie folgt:

Man setze erstlich in den Ausdruck von Q (29.) $\mu + \tau$ statt μ, wo τ irgend eine positive, ganze oder gebrochene Zahl ist, und ziehe von dem auf diese Weise entstehenden Werth $Q + \triangle Q$ von Q, für $\mu + \tau$, den ursprünglichen Werth Q, für μ, wieder ab, so findet man nach der nöthigen Reduction:

$$\triangle Q = \frac{\tau abc(b-c)}{\left[(1+\mu+\tau)bc + ab + (\mu+\tau)ac\right]\left[(1+\mu)bc + ab + \mu ac\right]}.$$

Diese Gröfse ist nothwendig negativ für jedes beliebige μ und τ, weil b kleiner vorausgesetzt wird, als c. Also nimmt Q immerfort ab, wenn μ wächst, und ist folglich am gröfsten, wenn $\mu = 0$ ist, denn kleiner kann μ nicht werden. Also ist der gröfste Werth von Q für $\mu = 0$, aus (29.)

$$35.\quad Q = \frac{bc}{bc + ab}.P = \frac{Pc}{a+c}.$$

Dafs zweitens Q' (30.) mit μ zugleich immerfort wächst, ist leicht unmittelbar zu sehen, wenn man den Ausdruck (30.), wie folgt, schreibt:

$$Q' = \frac{ac}{(1+\frac{1}{\mu})bc + \frac{ab}{\mu} + ac} \cdot P;$$

denn der Zähler dieses Bruches bleibt unverändert, der Nenner nimmt ab, wenn μ wächst; also wächst der Bruch mit μ zugleich. Das kleinste Q' findet daher für das kleinste μ Statt. Das kleinste μ ist aber Null, und für $\mu = 0$ ist $Q' = 0$, wie aus (30.) zu sehen. Also ist der kleinste Werth von Q':

$$36. \quad Q' = 0.$$

Drittens wächst die Gröfse Q'', wenn μ abnimmt, wie aus (31.) zu sehen, denn der Zähler des Ausdrucks (31.) bleibt unverändert, der Nenner wächst mit μ zugleich. Also findet der gröfste Werth von Q'' für $\mu = 0$ Statt, und ist folglich:

$$37. \quad Q'' = \frac{ab}{bc + ab} \cdot P = \frac{Pa}{a+c}.$$

V. Dieses sind die Grenzen der drei Gröfsen Q, Q', Q'' auf der einen Seite ihres Umfanges. Sie fanden sämmtlich für $\mu = 0$ Statt. Da die Gröfsen regelmäfsig mit μ zugleich entweder wachsen oder abnehmen: so folgt, dafs die Grenzen auf der andern Seite für $\mu = \infty$ Statt finden. Es darf oben in den Ausdrücken (29. 30. 31.) nicht mit Sicherheit $\mu = \infty$ gesetzt werden, weil für $\mu = \infty$, wenn $\lambda = \mu\varkappa$ (23.), nicht unbezweifelt λ mit $\varkappa$ zugleich Null ist, weshalb dann auch die Ausdrücke (29. 30. 31.) nur für jeden beliebigen Werth von μ, Unendlich ausgeschlossen, gelten (III.).

Die Ausdrücke (32. 33. 34.) hingegen gelten für jeden Werth von μ, Unendlich eingeschlossen und Null ausgeschlossen (III.). Man kann also in denselben mit Sicherheit $\mu = \infty$ setzen. Und da nun die Ausdrücke (32. 33. 34.), wie leicht aus der Vergleichung zu sehen, identisch dieselben sind, wie (29. 30. 31.), indem die letzteren blos oben und unten mit μ dividirt sind: so folgt, dafs man die andere Grenze von Q, Q', Q'' findet, wenn man in (32. 33. 34.) $\mu = \infty$ setzt. Q ist daher am kleinsten für

$$38. \quad Q = \frac{bc}{bc + ac} \cdot P = \frac{Pb}{a+b} \ (32.)$$

Q' ist am gröfsten für

$$39. \quad Q' = \frac{ac}{bc + ac} \cdot P = \frac{Pa}{a+b} \ (33.)$$

Q'' ist am kleinsten für

$$40.\quad Q'' = 0.\quad (34.)$$

VI. Da μ willkürlich ist, so kann man statt dessen in den allgemeinen Ausdrücken von Q, Q', Q'' (29. 30. 31.) oder, was das Nemliche ist, in (32. 33. 34.) eine von den drei Gröfsen Q, Q', Q'' willkürlich annehmen. Es sei z. B. Q' willkürlich, so darf man nur μ zwischen (30. und 29.) und (30. und 31.) eliminiren, das heifst, das willkürliche Q' statt des willkürlichen μ einführen. Man findet, wenn man (29. und 31.) durch (30.) dividirt:

$$41.\quad \frac{Q}{Q'} = \frac{(1+\mu)b}{\mu a} \text{ und } \frac{Q''}{Q'} = \frac{b}{\mu c}.$$

Nun giebt (30.)

$$(1+\mu)\,bcQ' + abQ' + \mu acQ' = \mu acP, \text{ oder}$$

$$42.\quad \mu = \frac{b\,(a+c)\,Q'}{acP - acQ' - bcQ'} \text{ und}$$

$$1+\mu = \frac{acP - acQ' - bcQ' + abQ' + bcQ'}{acP - acQ' - bcQ'} \text{ oder}$$

$$43.\quad 1+\mu = \frac{acP - acQ' + abQ'}{acP - acQ' - bcQ'}.$$

Setzt man dieses in (41.): so findet man

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{acP - acQ' + abQ'}{abQ + bcQ'} \cdot \frac{b}{a} = \frac{Pc - (c-b)\,Q'}{(a+c)\,Q'}, \text{ oder}$$

$$44.\quad Q = \frac{Pc - Q'(c-b)}{a+c} \text{ und}$$

$$\frac{Q''}{Q'} = \frac{acP - acQ' - bcQ'}{b(a+c)\,Q'} \cdot \frac{b}{c} = \frac{aP - (a+b)\,Q'}{(a+c)\,Q'}, \text{ oder}$$

$$45.\quad Q'' = \frac{P.a - Q'(a+b)}{a+c},$$

welches die Ausdrücke von Q und Q'' durch Q' sind.

VII. Die Resultate sind also zusammengenommen folgende:

1) Die allgemeinen Ausdrücke von Q, Q', Q'' sind:

$$46.\quad Q = \frac{(1+\mu)\,bc}{(1+\mu)\,bc + ab + \mu ac} . P \;(29.\ 32.)$$

$$47.\quad Q' = \frac{\mu . ac}{(1+\mu)\,bc + ab + \mu ac} . P \;(30.\ 33.)$$

$$48.\quad Q'' = \frac{ab}{(1+\mu)\,bc + ab + \mu ac} . P. \;(31.\ 34.),$$

wo μ jede beliebige, ganze oder gebrochene Zahl sein kann, Null und Unendlich mit eingeschlossen.

2) Will man eine der drei Kräfte Q, Q', Q'' statt μ willkürlich annehmen, so ist:

$$49. \quad Q = \frac{Pc - Q'(c-b)}{a+c} \; (44.)$$

$$50. \quad Q'' = \frac{Pa - Q'(a+b)}{a+c} \; (45.),$$

3) Die Grenzen von Q, Q', Q'' sind folgende:

51. Q liegt zwischen den Grenzen $\frac{Pc}{a+c}$ und $\frac{Pb}{a+b}$ (35. 38.),

52. Q' liegt zwischen den Grenzen 0 und $\frac{Pa}{a+b}$ (36. 39.),

53. Q'' liegt zwischen den Grenzen $\frac{Pa}{a+c}$ und 0 (37. 40.).

VIII. Diese Resultate stimmen mit den obigen, auf anderem Wege gefundenen (§. 1.) genau überein; nemlich (49. 50.) mit (5. 6.) und (51. 52. 53.) mit (7. 8. 9.), so dafs sich also die Aufgabe allerdings auch auf dem Wege (S. 37.) vollständig und genau auflösen läfst.

4.

Es ist jetzt leicht zu sehen, warum durch die Rechnung (S. 37.) die Ausdrücke von Q, Q', Q'' nicht vollständig gefunden wurden. Die vollständigen Ausdrücke (46. 47. 48.) gehen nemlich in diejenigen (S. 37.) über, wenn man

$$\mu = 1$$

setzt, weshalb auch die (S. 37.) gefundenen einzelnen Werthe von Q, Q', Q'', wie (§. 2.) besonders gezeigt, richtig, und unter den unendlich vielen Werthen, welche Q, Q', Q'' haben können, mitbegriffen sind. In der That ist (S. 37.) $\alpha = \beta$, das heifst $2\varrho - \varkappa = 2\varrho - \lambda$ oder $\lambda = \varkappa$ anstatt $\lambda = \mu\varkappa$, also $\mu = 1$ gesetzt worden. Nun kann aber μ nicht allein gleich 1, sondern jede andere, beliebige, positive, ganze oder gebrochene Zahl sein. Also sind in (S. 37.) die Werthe von Q, Q', Q'' deshalb nicht vollständig gefunden worden, weil im Voraus nur auf einen einzelnen besonderen Fall gerechnet wurde, statt auf alle mögliche Fälle zugleich.

5.

Ungeachtet die Aufgabe nunmehr auf zwei verschiedenen Wegen (§. 1. und 3.)

gelöset worden, scheinen die Resultate doch immer noch paradox. Es scheint, man könne eine bestimmte Antwort verlangen, wenn man fragt: wie stark werden von dem Gewicht P die drei Puncte A, B, C (Fig. 1. Tafel 2.) gedrückt? und zwar um so mehr, weil Q, Q', Q'' wirklich immer nur einen einzigen Werth haben, wenn die drei Stützpuncte A, B, C nicht in gerader Linie liegen, so wenig ihre Lage auch davon verschieden sein mag. Es müfste also hier eine Unterbrechung der Stetigkeit Statt finden; denn so wie A, B, C in eine gerade Linie fallen, hört die Einheit der Werthe von Q, Q', Q'' plötzlich auf, und Q, Q', Q'' können nun unzählig viele Werthe haben. Eine solche Unterbrechung der Stetigkeit findet aber wirklich Statt. Die Abhängigkeit der Gröfsen Q, Q', Q'' von a, b, c, α, β und P ist wirklich discontinuirlich. Dergleichen ist nicht paradox und kommt öfter vor. Bei einer Pyramide oder einem Kegel z. B. liegt der Schwerpunct bekanntlich, um $\frac{3}{4}$ der Höhe des Körpers von der Spitze entfernt, in der Axe. Er bleibt immer an derselben Stelle, wenn die Höhe des Körpers bleibt, und die Grundfläche abnimmt, so klein dieselbe auch werden mag. Sobald aber die Grundfläche Null ist, so geht der Körper in eine gerade Linie über, und sein Schwerpunct liegt nun plötzlich nicht mehr auf $\frac{3}{4}$, sondern auf die Hälfte der Länge von dem einen Endpunct. Da man aber auch die Linie als eine Pyramide oder als einen Kegel betrachten kann, dessen Grundfläche Null ist, so kann der Schwerpunct der Linie auch auf $\frac{3}{4}$ der Länge vom Ende liegen. Die Abhängigkeit zwischen der Entfernung des Schwerpuncts vom Ende und den Abmessungen des Körpers ist also nicht allein discontinuirlich, sondern es giebt auch für die Lage des Schwerpuncts einer geraden Linie keine bestimmte Antwort. Es sei, um ein anderes Beispiel zu geben, das Dreieck ABC (Taf. 2. Fig. 3.) gegeben, so bestimmen bekanntlich die beiden Winkel α und β die Lage des Punctes D in einer durch A, B, C gehenden Ebene gegen A, B, C, so lange $\alpha + \beta + \gamma$ nicht gleich zweien rechten Winkeln ist. Es giebt immer nur eine einzige Lage von D gegen A, B, C, was auch α, β und γ sein mögen, und so nahe auch die Summe von α, β und γ zweien Rechten kommen mag. Sobald aber $\alpha + \beta + \gamma$ gleich 2ϱ ist, kann D plötzlich, wo man will, in dem Umfange eines durch A, B und C gehenden Kreises liegen. Die Abhängigkeit der die Lage von D bestimmenden Linien und Winkel von den gegebenen Seiten und Winkeln des Dreiecks ABC ist also discontinuirlich, und wenn man fragt, wo D liegt, für $\alpha + \beta + \gamma = 2\varrho$, so giebt es keine bestimmte Antwort, obgleich sie für jeden beliebigen anderen Werth von $\alpha + \beta + \gamma$ Statt findet. Die unstetigen

Gröfsen

Gröfsen kommen in der Analysis und Geometrie häufig vor. Selbst Tangenten, Cotangenten, Secanten und Cosecanten sind schon unstetige Gröfsen, weil sie durch das Unendliche plötzlich vom Positiven zum Negativen, und umgekehrt, übergehen. Dergleichen Gröfsen sind Gegenstände, die wohl noch zu wenig untersucht sind, und eine eigene sorgfältige Erforschung verdienten. Die Unstetigkeit ist für die Theorie der Reihen besonders wichtig. Sie hängt mit der Convergenz und Divergenz derselben zusammen, und die nähere Untersuchung müfste eine Menge scheinbarer Paradoxen bei den Reihen mehr ins Klare bringen.

Findet man etwa bei der gegenwärtigen Aufgabe darin eine Schwierigkeit, dafs wenn man sich eine unbiegsame Linie ABC (Fig. 1. Taf. 2.) wirklich auf drei Puncten A, B, C ruhend vorstellt, die Drucke auf A, B, C doch nothwendig irgend eine bestimmte Gröfse haben müssen, und in einem und demselben Augenblick nur eine Gröfse haben können, nach der also gefragt werden kann, so dafs die Antwort: die Drucke können, innerhalb der obigen Grenzen, sein, was man will, nicht passend zu sein scheint: so ist zu erwägen, dafs die Voraussetzung bei der Frage nicht richtig ist. Es giebt nemlich in der Wirklichkeit gar keine völlig unbiegsame Linie, und daher kann auch nach dem Druck einer solchen auf drei Puncte nicht gefragt werden. Alles, was man als Linie betrachten könnte, ist mehr oder weniger biegsam oder elastisch, und bringt man Biegsamkeit und Elasticität in Anschlag, so kann auch der Druck auf die drei Puncte gefunden werden. (Man sehe Eytelwein, Statik, §. 341. und Anhang, siebenter Abschnitt). Die unbiegsame mathematische Linie ist nichts als ein Gegenstand der Einbildungskraft, der nirgend existirt, so wenig als hier oben eine gerade, schwere Linie, die zugleich als Prisma und zugleich als Pyramide betrachtet werden könnte, und von welcher in solchem Falle die Lage des Schwerpuncts zweifelhaft sein würde. In der gegenwärtigen idealen Aufgabe von der unbiegsamen, mit einem Gewichte P belasteten geraden Linie fehlen Bestimmungsstücke, und darum ist die Aufgabe unbestimmt. Thut man irgend ein Bestimmungsstück, z. B. die Biegsamkeit oder Elasticität hinzu, so hört die Unbestimmtheit auf, und man kann auch die bestimmte Gröfse der Drucke auf die Unterstützungspuncte finden.

Es giebt zwar freilich auch z. B. keine unbiegsame mathematische Ebene, und dennoch kann man den Druck eines, auf einer solchen ruhenden Gewichts auf drei beliebige, nicht in einer geraden Linie liegende Puncte finden. Allein in diesem Fall ist die Zahl der Bestimmungsstücke zureichend, und wenn die Ebene aufserdem noch biegsam oder elastisch ist, kommt die Biegsamkeit oder Elasti-

cität nur als Nebenumstand in Betracht. Bei der Linie ist sie bestimmend, oder entscheidend.

6.

Es hat auch keine Schwierigkeit, den Druck eines Gewichts auf mehrere Unterstützungspuncte einer unbiegsamen Ebene zu finden, die Puncte mögen nicht in gerader Linie liegen, oder zum Theil, oder alle in gerader Richtung sich befinden.

Man könnte ganz auf die Weise wie (S. 37.) im ersten Hefte verfahren, nemlich die Lage der Unterstützungspuncte durch Ordinaten aus einem Puncte ausdrücken. Die Rechnung ist aber fast noch einfacher, wenn man sich statt solcher Ordinaten der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten bedient.

I. Es drücke ein Gewicht P (Fig. 4. Taf. 2.) auf eine unbiegsame Ebene, welche durch das Papier vorgestellt wird. Die Ebene sei durch beliebige feste Puncte A_1, A_2, A_3 .... A_n unterstützt.

Der Druck auf A_1 sei $= \mathfrak{A}_1$,
der Druck auf A_2 sei $= \mathfrak{A}_2$,
....
der Druck auf A_n sei $= \mathfrak{A}_n$.

XPX_1 und YPY_1 sind zwei geradlinige, auf einander senkrechte Axen, die sich in dem Puncte P, wo das Gewicht P auf der Ebene ruhet, schneiden; A_1B_1, A_2B_2 .... A_nB_n sind Perpendikel aus den Unterstützungspuncten A_1, A_2, ... A_n auf die Axe YPY_1, und A_1C_1, A_2C_2, ... A_nC_n Perpendikel aus den Unterstützungspuncten A_1, A_2, A_3 .... A_n auf die Axe XPX_1. Diese Perpendikel zusammengenommen sind also die rechtwinkligen Coordinaten der Unterstützungspuncte A_1, A_2 .... A_n, auf die Axen XPX_1 und YPY_1. Es sei

$$PC_1 = a_1, \quad PB_1 = \alpha_1$$
$$PC_2 = a_2, \quad PB_2 = \alpha_2$$
....
$$PC_n = a_n, \quad PB_n = \alpha_n.$$

Werden diejenigen Abscissen, welche rechter Hand der Axe Y_1PY, und diejenigen Ordinaten, welche über die Axe XPX_1 fallen, als positiv betrachtet, so sind die Abcissen linker Hand der Axe Y_1PY, und die Ordinaten unter der Axe XPX_1 negativ.

II. Wenn man nun die Drucke $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots A_n$ als Kräfte betrachtet, welche der Kraft P in parallelen Richtungen entgegenwirken, so ist bekanntlich für den Fall, daſs alle Kräfte im Gleichgewicht sind,

54. $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots\ldots\ldots + A_n = P,$

55. $A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + A_4 a_4 + \ldots\ldots\ldots + A_n a_n = 0,$

56. $A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3 + A_4 \alpha_4 + \ldots\ldots\ldots + A_n \alpha_n = 0,$

Mehr Gleichungen oder Bedingungen für das Gleichgewicht finden nicht Statt; denn wollte man etwa mehr Axen annehmen, die sich in P schneiden: so würden die Coordinaten für diese Axen durch die Coordinaten $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ und $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ ausgedrückt werden können, und folglich die Gleichungen für die neuen Axen in den drei obigen schon mit enthalten sein.

III. Da sich aus den drei Gleichungen (54. 55. 56.) nur drei unbekannte Gröſsen, z. B. A_1, A_2, A_3 finden lassen, so folgt, daſs die übrigen unbekannten Gröſsen willkürlich sind, jedoch werden sie, weil sie vermöge der Gleichungen von jenen dreien abhängen, zwischen gewissen Grenzen eingeschlossen sein. Man kann also setzen:

$$57.\quad \begin{cases} A_4 = \varkappa_4 A_1 + \mu_4 A_2 + \varrho_4 A_3, \\ A_5 = \varkappa_5 A_1 + \mu_5 A_2 + \varrho_5 A_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n = \varkappa_n A_1 + \mu_n A_2 + \varrho_n A_3, \end{cases}$$

wo die sämmtlichen Coefficienten $\varkappa_4, \varkappa_5 \ldots\ldots\ldots \varkappa_n, \mu_4, \mu_5 \ldots\ldots\ldots \mu_n, \varrho_4, \varrho_5 \ldots\ldots\ldots \varrho_n$ willkürlich sind. Mit dieser Bezeichnung lassen sich alle Fälle ausdrücken. Es können nemlich die drei Kräfte A_1, A_2, A_3 zum Theil, und wenn sechs und mehr Unterstützungspuncte vorhanden sind, alle drei Null sein; es kann an ihre Stelle die Unterstützung durch andere Puncte treten, weil eine Ebene schon von drei Puncten vollständig gestützt wird. In solchem Falle darf man nur die Coefficienten derjenigen Kräfte A_1, A_2, A_3, welche Null sind, gleich ∞ setzen. Die durch A_1, A_2, A_3 ausgedrückten Kräfte $A_4, A_5 \ldots\ldots\ldots A_n$ sind alsdann nicht nothwendig Null, und werden also durch die Bezeichnung noch immer ausgedrückt. Gesetzt, es sei A_1 und A_3 Null, so muſs man $\varkappa_4, \varkappa_5 \ldots\ldots\ldots \varkappa_n$ und $\varrho_4, \varrho_5 \ldots\ldots\ldots \varrho_n$ unendlich groſs setzen. Wären dagegen einige von den Kräften $A_4, A_5 \ldots\ldots\ldots A_n$ Null, so setzt man diejenigen unbestimmten Coefficienten, welche in dem Ausdruck der verschiedenen Kräfte durch A_1, A_2, A_3, vorkommen, Null. Z. B. wenn $A_4 = 0$ wäre: so setzt man $\varkappa_4 = 0$, $\mu_4 = 0$ und $\varrho_4 = 0$. Es können auf diese Weise

alle unbestimmten Coefficienten Null sein, nemlich in dem Falle, wenn nur die drei Unterstützungspuncte A_1, A_2, A_3 vorhanden sind.

IV. Substituirt man nun die Ausdrücke (57.) in die Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts (54. 55. 56.), so verwandeln sich dieselben in:

$$58.\quad \begin{aligned} A_1(1+\varkappa_4+\varkappa_5 \ldots\ldots +\varkappa_n)+A_2(1+\mu_4+\mu_5 \ldots\ldots +\mu_n)& \\ +A_3(1+\varrho_4+\varrho_5 \ldots\ldots +\varrho_n)& \end{aligned} = P,$$

$$59.\quad \begin{aligned} A_1(a_1+\varkappa_4 a_4+\varkappa_5 a_5 \ldots\ldots +\varkappa_n \alpha_n)+A_2(a_2+\mu_4 a_4+\mu_5 a_5 \ldots\ldots +\mu_n a_n)& \\ +A_3(a_3+\varrho_4 a_4+\varrho_5 a_5 \ldots\ldots +\varrho_n a_n)& \end{aligned} = 0,$$

$$60.\quad \begin{aligned} A_1(\alpha_1+\varkappa_4\alpha_4+\varkappa_5\alpha_5 \ldots\ldots +\varkappa_n\alpha_n)+A_2(\alpha_2+\mu_4\alpha_4+\mu_5\alpha_5 \ldots\ldots +\mu_n\alpha_n)& \\ +A_3(\alpha_3+\varrho_4\alpha_4+\varrho_5\alpha_5 \ldots\ldots +\varrho_n\alpha_n)& \end{aligned} = 0,$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$61.\quad \begin{cases} 1+\varkappa_n+\varkappa_5 \ldots\ldots\ldots\ldots +\varkappa_n = K, \\ a_1+\varkappa_4 a_4+\varkappa_5 a_5 \ldots\ldots\ldots\ldots +\varkappa_n a_n = K_a, \\ \alpha_1+\varkappa_4\alpha_4+\varkappa_5\alpha_5 \ldots\ldots\ldots\ldots +\varkappa_n\alpha_n = K_\alpha, \\ 1+\mu_4+\mu_5 \ldots\ldots\ldots\ldots +\mu_n = M, \\ a_2+\mu_4 a_4+\mu_5 a_5 \ldots\ldots\ldots\ldots +\mu_n a_n = M_a, \\ \alpha_2+\mu_4\alpha_4+\mu_5\alpha_5 \ldots\ldots\ldots\ldots +\mu_n\alpha_n = M_\alpha, \\ 1+\varrho_4+\varrho_5 \ldots\ldots\ldots\ldots +\varrho_n = N, \\ a_3+\varrho_4 a_4+\varrho_5 a_5 \ldots\ldots\ldots\ldots +\varrho_n a_n = N_a, \\ \alpha_3+\varrho_4\alpha_4+\varrho_5\alpha_5 \ldots\ldots\ldots\ldots +\varrho_n\alpha_n = N_\alpha, \end{cases}$$

setzt, in:

$$62.\quad A_1 K + A_2 M + A_3 N = P,$$

$$63.\quad A_1 K_a + A_2 M_a + A_3 N_a = 0,$$

$$64.\quad A_1 K_\alpha + A_2 M_\alpha + A_3 N_\alpha = 0.$$

V. Daraus folgt, wenn man auf die gewöhnliche Weise eliminirt:

$$65.\quad A_1 = \frac{M_\alpha N_a - M_a N_\alpha}{(M_\alpha N_a - M_a N_\alpha)K + (M N_\alpha - M_\alpha N)K_a + (M_a N - M N_a)K_\alpha}\cdot P,$$

$$66.\quad A_2 = \frac{N_\alpha K_a - N_a K_\alpha}{(N_\alpha K_a - N_a K_\alpha)M + (N K_\alpha - N_\alpha K)M_a + (N_a K - N K_a)M_\alpha}\cdot P,$$

$$67.\quad A_3 = \frac{K_\alpha M_a - K_a M_\alpha}{(K_\alpha M_a - K_a M_\alpha)N + (K M_\alpha - K_\alpha M)N_a + (K_a M - K M_a)N_\alpha}\cdot P.$$

Dieses sind die allgemeinen Ausdrücke der Drucke in den drei Stützpuncten A_1, A_2, A_3 für jeden beliebigen Fall. Der Nenner ist in allen drei Ausdrücken der nemliche. Sind A_1, A_2, A_3 gefunden, so geben die Ausdrücke (57.) die Drucke in den übrigen Puncten A_4, A_5, ..., ... A_n.

VI. Wenn man in (65.) oben und unten mit M_α, in (66.) oben und unten mit N_α, und in (67.) oben und unten mit K_α dividirt, so findet man:

$$68. \begin{cases} A_1 = \dfrac{N_a - M_a . \dfrac{N_\alpha}{M_\alpha}}{\left(N_a - M_a . \dfrac{N_\alpha}{M_\alpha}\right) K + \left(M . \dfrac{N_\alpha}{M_\alpha} - N\right) K_a + \left(M_a N - M N_a\right) \dfrac{K_\alpha}{M_\alpha}} . P, \\[2ex] A_2 = \dfrac{K_a - N_a . \dfrac{K_\alpha}{N_\alpha}}{\left(K_a - N_a . \dfrac{K_\alpha}{N_\alpha}\right) M + \left(N . \dfrac{K_\alpha}{N_\alpha} - K\right) M_a + \left(N_a K - N K_a\right) \dfrac{M_\alpha}{N_\alpha}} . P, \\[2ex] A_3 = \dfrac{M_a - K_a . \dfrac{M_\alpha}{K_\alpha}}{\left(M_a - K_a . \dfrac{M_\alpha}{K_\alpha}\right) N + \left(K . \dfrac{M_\alpha}{K_\alpha} - M\right) N_a + \left(K_a M - K M_a\right) \dfrac{N_\alpha}{K_\alpha}} . P. \end{cases}$$

Man setze

$$69. \quad \frac{K_\alpha}{M_\alpha} = \varepsilon \text{ und } \frac{M_\alpha}{N_\alpha} = \tau,$$

so ist

$$70. \quad \frac{N_\alpha}{K_\alpha} = \frac{1}{\varepsilon\tau},$$

und folglich in (68.)

$$A_1 = \frac{N_a - M_a . \frac{1}{\tau}}{\left(N_a - M_a . \frac{1}{\tau}\right) K + \left(M \frac{1}{\tau} - N\right) K_a + \left(M_a N - M N_a\right) \varepsilon} . P,$$

$$A_2 = \frac{K_a - N_a \varepsilon\tau}{\left(K_a - N_a . \varepsilon\tau\right) M + \left(N . \varepsilon\tau - K\right) M_a + \left(N_a K - N K_a\right) \tau} . P,$$

$$A_3 = \frac{M_a - K_a . \frac{1}{\varepsilon}}{\left(M_a - K_a . \frac{1}{\varepsilon}\right) N + \left(K \frac{1}{\varepsilon} - M\right) N_a + \left(K_a M - K M_a\right) \frac{1}{\varepsilon\tau}} . P,$$

oder

$$71.\quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{N_a . \tau - M_a}{(N_a \tau - M_a)K + (M - N\tau)K_a + (M_a N - MN_a)\varepsilon\tau} . P, \\ A_2 = \dfrac{K_a - N_a . \varepsilon\tau}{(K_a - N_a . \varepsilon\tau)M + (N . \varepsilon\tau - K)M_a + (N_a K - NK_a)\tau} . P, \\ A_3 = \dfrac{M_a . \varepsilon\tau - K_a . \tau}{(M_a \varepsilon\tau - K_a \tau)N + (K . \tau - M . \varepsilon\tau)N_a + K_a M - KM_a} . P, \end{cases}$$

welches ebenfalls die allgemeinen Ausdrücke der Drucke in den drei Stützpuncten A_1, A_2, A_3 für jeden beliebigen Fall sind.

VII. Sind nur drei Stützpuncte vorhanden, so sind alle unbestimmten Coefficienten κ, μ, ν Null (III.). In diesem Falle also ist in (61.);

$$72.\quad \begin{cases} K = 1, & K_a = a_1, & K_\alpha = \alpha_1, \\ M = 1, & M_a = a_2, & M_\alpha = \alpha_2, \\ N = 1, & N_a = a_3, & N_\alpha = \alpha_3, \end{cases}$$

folglich ist in (65. 66. 67.) der Nenner gleich

$$\begin{aligned} &\alpha_2 a_3 - \alpha_3 a_2 + (\alpha_3 - \alpha_2)\, a_1 + (a_2 - a_3)\, \alpha_1 \\ &= \alpha_2 a_3 - \alpha_3 a_2 + \alpha_3 a_1 - \alpha_2 a_1 + a_2 \alpha_1 - a_3 \alpha_1 \\ &= (a_2 - a_3)\, \alpha_1 + (a_3 - a_1)\, \alpha_2 + (a_1 - a_2)\, \alpha_3 \end{aligned}$$

und

$$73.\quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{a_3 \alpha_2 - a_2 \alpha_3}{(a_2 - a_3)\alpha_1 + (a_3 - a_1)\alpha_2 + (a_1 - a_2)\alpha_3} . P, \\ A_2 = \dfrac{a_1 \alpha_3 - a_3 \alpha_1}{(a_2 - a_3)\alpha_1 + (a_3 - a_1)\alpha_2 + (a_1 - a_2)\alpha_3} . P, \\ A_3 = \dfrac{a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2}{(a_2 - a_3)\alpha_1 + (a_3 - a_1)\alpha_2 + (a_1 - a_2)\alpha_3} . P. \end{cases}$$

Legt man die Axen, deren Lage willkürlich ist, so, daſs die Axe XPX_1 durch den Punct A_1 gehet, so ist $\alpha_1 = 0$. Also reduciren sich alsdann die Ausdrücke (73.) auf

$$74.\quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{a_3 \alpha_2 - a_2 \alpha_3}{(a_3 - a_1)\alpha_2 + (a_1 - a_2)\alpha_3} . P, \\ A_2 = \dfrac{a_1 \alpha_3}{(a_3 - a_1)\alpha_2 + (a_1 - a_2)\alpha_3} . P, \\ A_3 = \dfrac{-a_1 \alpha_2}{(a_3 - a_1)\alpha_2 + (a_1 - a_2)\alpha_3} . P. \end{cases}$$

Die gegenwärtige Bezeichnung mit der, (S. 37.) verglichen, ist

$$75.\quad \begin{cases} a_1 = -a, & a_2 = -b \cos\alpha, & a_3 = -c \cos\beta \\ \alpha_1 = 0, & \alpha_2 = +b \sin\alpha, & \alpha_3 = -c \sin\beta. \end{cases}$$

Setzt man dieses in (74.), so findet man:

$$76.\quad\left\{\begin{aligned}
A_1 &= \frac{-c\cos\beta\,.\,b\sin\alpha - b\cos\alpha\,.\,c\sin\beta}{(-c\cos\beta + \mathrm{a})\,b\sin\alpha + (-\mathrm{a} + b\cos\alpha)\,.\,-c\sin\beta}\,.\,P = \\
&\qquad \frac{-bc\,.\,\sin(\alpha+\beta)}{-bc\sin(\alpha+\beta) + \mathrm{ac}\sin\beta + \mathrm{ab}\sin\alpha}\,.\,P, \\
A_2 &= \frac{\mathrm{ac}\sin\beta}{-bc\sin(\alpha+\beta) + \mathrm{ac}\sin\beta + \mathrm{ab}\sin\alpha}\,.\,P, \\
A_3 &= \frac{\mathrm{ab}\sin\alpha}{-bc\sin(\alpha+\beta) + \mathrm{ac}\sin\beta + \mathrm{ab}\sin\alpha}\,.\,P,
\end{aligned}\right.$$

welches mit den Resultaten (S. 37.) übereinstimmt.

VIII. Will man die Ausdrücke von A_1, A_2, A_3 (71.) auf den Fall dreier Stützpuncte anwenden, so ist, zufolge (73.) und (69. 70.):

$$77.\quad \varepsilon = \frac{\alpha_1}{\alpha_2},\ \tau = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \text{ und } \varepsilon\tau = \frac{\alpha_1}{\alpha_3},$$

also, wenn man die Axe durch den Punct A_1 legt, so daſs $\alpha_1 = 0$ ist:

$$78.\quad \varepsilon = 0,\ \tau = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \text{ und } \varepsilon\tau = 0.$$

Dieses giebt in (71.), wenn man zugleich (75.) substituirt:

$$79.\quad\left\{\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\mathrm{a}_3\frac{\alpha_2}{\alpha_3} - \mathrm{a}_2}{\left(\mathrm{a}_3\frac{\alpha_2}{\alpha_3} - \mathrm{a}_2\right) + \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right)\mathrm{a}_1}\,.\,P, \\
A_2 &= \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2 + (\mathrm{a}_3 - \mathrm{a}_1)\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}\,.\,P, \\
A_3 &= \frac{-\mathrm{a}_1\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}{-\mathrm{a}_1\frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \mathrm{a}_3\frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2}\,.\,P,
\end{aligned}\right.$$

oder

$$80.\quad\left\{\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\mathrm{a}_3\alpha_2 - \mathrm{a}_2\alpha_3}{\mathrm{a}_3\alpha_2 - \mathrm{a}_2\alpha_3 + \mathrm{a}_1\alpha_3 - \mathrm{a}_1\alpha_2}\,.\,P, \\
A_2 &= \frac{\mathrm{a}_1\alpha_3}{\mathrm{a}_1\alpha_3 - \mathrm{a}_2\alpha_3 + \mathrm{a}_3\alpha_2 - \mathrm{a}_1\alpha_2}\,.\,P, \\
A_3 &= \frac{-\mathrm{a}_1\alpha_2}{-\mathrm{a}_1\alpha_2 + \mathrm{a}_3\alpha_2 + \mathrm{a}_1\alpha_3 - \mathrm{a}_2\alpha_3}\,.\,P,
\end{aligned}\right.$$

welches mit (74.) übereinstimmt.

IX. Ist eine beliebige Zahl von Stützpuncten vorhanden, die aber alle in eine und dieselbe gerade Linie, z. B. in die Axe $X_1 P X$, fallen, so ist:

$$81.\quad \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0, \ldots\ldots\ldots, \alpha_n = 0,$$

folglich ist in (61.):

$$82.\quad K\alpha = 0,\ M\alpha = 0 \text{ und } N\alpha = 0,$$

mithin, zufolge (69. und 70.):

$$\varepsilon = \tfrac{0}{0},\ \tau = \tfrac{0}{0} \text{ und } \varepsilon\tau = \tfrac{0}{0}.$$

Also sind alsdann in den Ausdrücken (71.) die Coefficienten ε und τ unbestimmt und willkürlich. Auf diese Weise geben die Ausdrücke (71.) die Drucke auf die drei Puncte A_1, A_2 und A_3, und, vermöge (57.), die Drucke auf die übrigen Puncte A_4, $A_5 \ldots\ldots\ldots A_n$ für den Fall, wenn sämmtliche Puncte in einer und derselben geraden Linie liegen.

X. Sind blos drei Stützpuncte vorhanden, und man setzt, wie in (19.), $\alpha = 2\varrho - \varkappa$, $\beta = 2\varrho - \lambda$, so ist, zufolge (75.):

$$83.\quad \begin{cases} \mathrm{a}_1 = -\mathrm{a},\ \mathrm{a}_2 = b\cos\varkappa,\ \mathrm{a}_3 = c\cos\lambda, \\ \alpha_1 = 0\ \ ,\ \alpha_2 = b\sin\varkappa,\ \alpha_3 = -c\sin\lambda, \end{cases}$$

also in (79.):

$$84.\quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{-c\cos\lambda\,.\,\frac{b}{c}\,.\,\frac{\sin\varkappa}{\sin\lambda} - b\cos\varkappa}{-c\cos\lambda\,.\,\frac{b}{c}\,.\,\frac{\sin\varkappa}{\sin\lambda} - b\cos\varkappa - \mathrm{a} - \mathrm{a}\,.\,\frac{b}{c}\,.\,\frac{\sin\varkappa}{\sin\lambda}}\,.\,P, \\[2ex] A_2 = \dfrac{-\mathrm{a}}{-c\cos\lambda\,.\,\frac{b}{c}\,.\,\frac{\sin\varkappa}{\sin\lambda} - b\cos\varkappa - \mathrm{a} - \mathrm{a}\,.\,\frac{b}{c}\,.\,\frac{\sin\varkappa}{\sin\lambda}}\,.\,P, \\[2ex] A_3 = \dfrac{\mathrm{a}\,.\,\frac{b}{c}\,.\,\frac{\sin\varkappa}{\sin\lambda}}{-c\cos\lambda\,.\,\frac{b}{c}\,.\,\frac{\sin\varkappa}{\sin\lambda} - b\cos\varkappa - \mathrm{a} - \mathrm{a}\,.\,\frac{b}{c}\,.\,\frac{\sin\varkappa}{\sin\lambda}}\,.\,P. \end{cases}$$

Fallen nun die drei Stützpuncte in eine und dieselbe gerade Linie, so dafs $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$, und man hat, wie (23.), $\lambda = \mu\varkappa$ gesetzt, so ist $\cos\varkappa = 1$, $\cos\lambda = 1$ und $\dfrac{\sin\varkappa}{\sin\lambda} = \dfrac{1}{\mu}$, also in (84.):

$$85. \begin{cases} A_1 = \dfrac{\frac{b}{\mu} + b}{\frac{b}{\mu} + b + a + \frac{ab}{\mu c}} . P = \dfrac{(1+\mu)\, bc}{(1+\mu)\, bc + ab + \mu ac} . P, \\ A_2 = \dfrac{a}{\frac{b}{\mu} + b + a + \frac{ab}{\mu c}} . P = \dfrac{\mu ac}{(1+\mu)\, bc + ab + \mu ac} . P, \\ A_3 = \dfrac{\frac{ab}{\mu c}}{\frac{b}{\mu} + b + a + \frac{ab}{\mu c}} . P = \dfrac{ab}{(1+\mu)\, bc + ab + \mu ac} . P, \end{cases}$$

welches mit (46. 47. 48.) übereinstimmt.

XI. Wenn n Stützpuncte A_1, A_2, A_3 .... A_n vorhanden sind, die entweder zum Theil oder alle in gerader Linie liegen oder nicht, so ist nur noch übrig, die Grenzen zu finden, zwischen welchen die Drucke A_1, A_2, A_3 .... A_n auf die Stützpuncte liegen, welches sich auch, ungefähr wie weiter oben bei drei Puncten, thun lassen wird.

Berlin, im Februar 1826.

13.

Versuch über die Integration der Differential-Gleichungen.

(Vom Herrn Prof. *Schmidten.*)

(Auszug einer von dem Verfasser, in der Königlich-Dänischen Academie der Wissenschaften zu Copenhagen, in Dänischer Sprache, vorgelesenen Abhandlung.)

Um eine deutliche Vorstellung von Functionen zu haben, die durch Differential-Gleichungen gegeben sind, müssen die Functionen nicht allein entwickelt sein, sondern ihr Werth muſs auch für beliebige Werthe der unabhängig veränderlichen Gröſsen angegeben werden können. Der zweite Theil der Aufgabe in's Besondere, ist noch so wenig vorgerückt, daſs fast alle Gleichungen, welche man gewöhnlich in der ersten Beziehung als integrirt betrachtet, nur wenig befriedigend sind, sobald es auf bestimmte Werthe ankommt.

Allgemeine Verfahren scheinen hier fast nicht möglich, weil man immer wieder ein anderes Verfahren für jeden besonderen Werth der unabhängig-veränderlichen Gröfse haben müfste, deren die gegebene Function öfter mehrere enthalten kann. So ist zuweilen in der Astronomie ein Ausdruck sehr nützlich, der keine Anwendung mehr findet, sobald eine einzeine Gröfse nur ein wenig ihren Werth verändert, und Aufgaben, die man auf Quadraturen gebracht hat, und die also als aufgelöset betrachtet werden, finden dennoch unübersteigliche Schwierigkeiten. Es scheint also, dafs die Verfahren, bestimmte Werthe der Integrale zu finden (*les methodes d'évaluation*), etwas Eigenthümliches haben, und dafs man bei denselben auf die besonderen Bedingungen der Aufgabe Rücksicht nehmen mufs. In jedem Falle kann man sie gröfstentheils aus den Regeln für die allgemeine Form der Function ableiten, wenn man diejenigen nimmt, welche den Umständen am besten entsprechen.

Für die hierzu dienenden Sätze ist in der Analysis noch wenig geschehen. Es giebt einige dergleichen, aber sie sind sehr auf einzelne Fälle beschränkt. Man könnte leicht durch Differentiation eine unendliche Menge von integrablen Gleichungen aufstellen, aber sie würden immer nur Ausnahmen von denen sein, welche sich auf dem nemlichen Wege nicht integriren lassen.

Auch verlangt man häufig Unmögliches, wenn man den endlichen Ausdruck eines Integrals sucht, das heifst, ein Integral, welches aus bekannten Functionen, durch eine begrenzte Menge von Operationen zusammengesetzt ist. Denn da die bekannten Functionen nur wenig zahlreich und nur nach Willkür in die analytische Sprache aufgenommen sind: so ist die Aufgabe, die unendliche Menge unbekannter Functionen, welche durch Differential-Gleichungen ausgedrückt werden, auf bekannte Functionen zu bringen, fast der von der Quadratur des Kreises gleich zu achten. Sucht man also durch die Integration von Differential-Gleichungen allgemeine Ausdrücke, so mufs man nothwendig unendliche Reihen zu Hülfe nehmen, und mit ihrer Hülfe die natürliche Form der Functionen, das heifst diejenige zu entdecken suchen, welche ihre Eigenschaften auf die einfachste Weise ausdrückt. Man darf sich aus diesem Grunde auch nicht auf die gewöhnlichen Reihen, nemlich auf solche, welche Summen von Gliedern sind, wie z. B. die Taylor'sche, beschränken; denn besonders, wenn die Gleichungen nicht lineär sind, würde man bald finden, dafs dergleichen Reihen nur einen entstellten Ausdruck geben, in welchem das Gesetz der Aufeinanderfolge der Glieder nicht gut sichtbar ist. Die Schwierigkeit, Reihen zu summiren (*d'évaluer*), ist kein Grund, sie zu verwerfen; denn sonst würden nur wenige, selbst gewöhn-

liche, brauchbare Reihen existiren, und sogar die Lagrangische, für Umkehrung der Gleichungen, in welcher das Gesetz der Glieder so elegant ausgedrückt ist, würde nur geringen Werth haben.

Ich glaube also, es sei nothwendig, die Form der Integrale selbst dann zu untersuchen, wenn sie sich nicht darstellen lassen. Die Aufgabe bestehet alsdann darin, eine Regel aufzustellen, nach welcher sich einfach und klar die entwickelte Form der durch eine beliebige Differential-Gleichung gegebenen Function finden läfst.

Eine solche Regel mufs natürlich auf die bekannten Resultate passen. Es kann für besondere Fälle indirecte Methoden geben, die leichter und kürzer zum Ziele führen. Sind blofs einzelne Aufgaben aufzulösen, so können solche einzelne Verfahren oft den Vorzug haben. Kommt es aber auf Methode überhaupt an, so sind einzelne Resultate nicht hinreichend, sondern man mufs auch ihre Stelle im System und die Ursache der Vereinfachung in den einzelnen Fällen kennen.

Wenn diese Betrachtungen einigermafsen gegründet sind, so werden die Untersuchungen, welche ich hier mittheilen will, vielleicht nicht ganz ohne Interesse sein. Ich werde kürzlich die oben erwähnte Regel abhandeln, sie aber nicht weiter entwickeln, als zu ihrer Verständlichkeit, und um daraus die nöthigen Folgerungen zu ziehen, erforderlich ist. Nachdem die allgemeine Regel für alle Differential-Gleichungen gegeben worden, werde ich mich mit den linearen und nicht-linearen Gleichungen vom ersten Grade in's Besondere beschäftigen, und dann die Anwendung auf Gleichungen mit mehreren veränderlichen Gröfsen andeuten. Auch wird sich zeigen, dafs die Ausdehnung auf Gleichungen mit endlichen und vermischten Differenzen keine Schwierigkeit hat.

1.

Es sei irgend eine Gleichung zwischen x, zwischen irgend einer Function y von x und ihren n Differential-Coefficienten, z. B. die Gleichung

$$F\left(x, y, y', y'' \ldots\ldots\ldots y^{(n)}\right) = 0$$

gegeben. Dieselbe wird integrirt sein, wenn man eine andere Gleichung von niedrigerer Ordnung, wie

$$f\left(x, y', y'' \ldots\ldots\ldots y^{(n-1)}\right) = c$$

aufstellen kann. Eine solche läfst sich aber nur selten finden. Die gegebene Gleichung läfst sich indessen vermittelst der kleinen Zahl von Functionen, welche in die analytische Sprache aufgenommen sind, auf vielerlei Art in zwei Theile

theilen, so, dafs derjenige, welcher den Differential-Coëfficienten von der höchsten Ordnung enthält, integrabel ist. Dieses ist z. B. der Fall, wenn man den Differential-Coefficienten $y^{(n)}$ allein auf eine Seite bringt.

Man setze daher, aus der gegebenen Gleichung sei auf irgend eine Weise eine andere von der Form

$$f_1(x, y, y' \ldots\ldots y^{(n-1)}) = \varphi(x, y, y' \ldots\ldots y^{(n)})$$

gefunden, deren erster Theil ein vollständiges Differential ist, der aber, rechter Hand, die Differential-Coefficienten von y alle, oder zum Theil, enthalten kann. Alsdann findet man, wenn man integrirt:

$$f_1(x, y, y' \ldots\ldots y^{(n-1)} = c_1 + \int dx(\varphi(x, y \ldots\ldots y)^{(n)})),$$

wo c_1 eine willkürliche Constante ist. Betrachtet man nun das zweite Glied als bekannt, so kann man wieder mit der gefundenen Gleichung, wie mit einer Gleichung von der Ordnung $n-1$, und wie vorhin, verfahren. Man kann sie auf die Weise theilen, dafs ihr erstes Glied ein vollständiges Differential ist, und sie durch eine Function von der $n-2^{\text{ten}}$ Ordnung vervollständigen, u. s. w. Wiederholt man das Verfahren, so wird man, nachdem man n mal integrirt, und n willkürliche Constanten eingeführt hat, zu einem Resultate von der Form

$$f_n(x, y) = c_n + \psi y,$$

gelangen, in welchem das erste Glied gar keinen Differential-Coefficienten, bis zum n^{ten}, unter dem n mal wiederholten Integrations-Zeichen enthalten kann. Durch Umkehrung findet man

$$y = P(x, c_n + \psi y),$$

wo P ein auf x und $c_n + \psi y$ sich beziehendes Functions-Zeichen ist. Substituirt man, so findet man:

$$y = P\Big(x, c_n + \psi\big(P(x, c_n + \psi(\ldots\ldots \psi y \ldots\ldots)))\big)\Big),$$

und fährt man auf diese Weise ohne Ende fort, so kann man y aus dem zweiten Theile der Gleichung ganz wegschaffen, und also einen entwickelten Ausdruck von y finden. Dieser Ausdruck wird das vollständige Integral der gegebenen Gleichung sein; denn er enthält n willkürliche Constanten. Das Verfahren erfordert aber in seiner ganzen Allgemeinheit Operationen, die bei weitem die Kräfte der Analysis übersteigen. Ich will mich also nur mit einigen einzelnen Fällen beschäftigen, welche merkwürdige Vereinfachungen darbieten, und dazu dienen werden, das Obige zu erläutern.

2.

Wir wollen zuerst die linearen Gleichungen untersuchen.

Es sei die allgemeine lineare Gleichung von der n^{ten} Ordnung:

$$Py^{(n)} + Qy^{(n-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots + Sy = T$$

gegeben, wo sich die $n+2$ Functionen ($P, Q \ldots\ldots\ldots S, T$) von x, durch die Division mit P, auf $n+1$ solcher Functionen bringen lassen. Eine Gleichung von der Ordnung $n-1$ würde aber nur n Functionen enthalten. Es wird also allezeit möglich sein, eine Gleichung von der $n-1^{ten}$ Ordnung zu finden, von welcher die gegebene, bis auf ein Glied, das vollständige Differential ist, das heifst, man wird derselben die Form

$$(P_1 y^{(n-1)} + Q_1 y^{(n-2)} \ldots\ldots\ldots + S_1 y)' = T_1 + Vy$$

geben können, woraus, wenn man integrirt,

$$P_1 y^{(n-1)} + Q_1 y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots + S_1 y = \int T_1 dx + \int Vy\, dx$$

folgt. Könnte man also diese Gleichung von der $n-1^{ten}$ Ordnung integriren, oder y durch eine Function des zweiten Gliedes ausdrücken, so würde man, wie oben, den entwickelten Werth von y durch wiederholte Substitution finden. Man kann auf diese Weise das allgemeine Integral einer linearen Gleichung von der n^{ten} Ordnung, in Vergleich mit demjenigen einer Gleichung von niedrigerer Ordnung, als eine transcendente Function betrachten. Dieses aber hindert nicht, dafs nicht die Function, welche eine Gleichung höherer Ordnung integrirt, in einzelnen Fällen von Integralen niedrigerer Ordnung, in endlicher Functionsform, abhängig gemacht werden könnte, auf dieselbe Weise, wie etwa die Sinus, die sich in einzelnen Fällen blofs auf irrationale Gröfsen reduciren lassen.

Man würde nun, nach dieser Methode, das Integral einer Gleichung zu finden, der Reihe nach, alle niedrigeren Ordnungen, von der gegebenen Gleichung an, durchgehen müssen, welches sehr beschwerlich sein kann. Wir wollen also unter den unendlich vielen Arten, die gegebene Gleichung zu integriren, oder, was das Nemliche ist, sie auf die obige Weise zu zertheilen, einige nehmen, deren Resultate weniger verwickelt sind.

Man bringe z. B. die Gleichung auf die Form

$$X_n\Big(X_{n-1}\big(\ldots\ldots\ldots(x_1 y)'\ldots\ldots\ldots\big)'\Big)' = T + \varphi y,$$

wo X_1, X_2 u. s. w. bekannte Functionen von x sind, und φy Differential-Coëfficienten von y enthalten kann. Man integrire n mal, so wird man einen Ausdruck wie:

$$y = W + \frac{1}{X_1}\int \frac{1}{X_2}\int \ldots\ldots \frac{1}{X_n}\int \varphi y\, dx^n$$

finden, wo W unter n Integrations-Zeichen die Function T nebst n willkürlichen Constanten enthält und $n+1$ Glieder hat. Substituirt man wiederholt y in das zweite Glied, so findet man, weil φy eine lineäre Function ist:

$$y' = W + \frac{1}{X}\int \frac{1}{X_2}\int \ldots\ldots \frac{1}{X_n}\int \varphi (W)\, dx^n$$

$$+ \frac{1}{X_1}\int \ldots \frac{1}{X_n}\int \varphi \left(\frac{1}{X_1}\int \ldots \frac{1}{X_n}\int \varphi (W)\, dx^n\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und wenn man den Werth von W substituirt, $n+1$ Reihen, von welchen n, jede mit einer willkürlichen Constante multiplicirt sind.

Man könnte auch die gegebene Gleichung so zertheilen, dafs das erste Glied nicht den Differential-Coefficienten von der höchsten Ordnung enthielte. In diesem Falle würden durch die Integration nicht n willkürliche Constanten eingeführt werden, und das Integral würde nur particulair sein. Der einfachste Fall würde der ganz ohne Integration sein. Es wäre der Fall, wenn man y auf einer Seite allein liefse, welches

$$y = \frac{T}{S} - \frac{1}{S}\left(Py^{(n)} + Qy^{(n-1)} \ldots\ldots\right)$$

giebt. Man würde daraus den entwickelten Ausdruck von y finden, wenn man y in das zweite Glied setzte, u. s. w. Ist das zweite Glied ein vollständiges Differential, so vereinfacht sich noch der entwickelte Werth von y bedeutend. Man hat also auf diese Weise zwei Extreme der Integration, das eine ganz ohne, das andere mit allen willkürlichen Constanten. Man kann zwischen ihnen mehr oder weniger allgemeine Ausdrücke aufstellen, je nachdem sie mehr oder weniger den Bedingungen der Aufgabe angemessen sind.

3.

Man sieht, dafs selbst die lineären Gleichungen Operationen erfordern, welche bei weitem die Kräfte der Analysis übersteigen. Man mufs sich also auf besondere, Vereinfachungen gewährende Fälle beschränken. Ehe ich indessen die Integration der Gleichungen für besondere Formen der Coëfficienten untersuche, will ich noch einige Bemerkungen über die allgemeinen Gleichungen von der ersten und zweiten Ordnung machen.

Man verwandele Gleichungen von der ersten Ordnung, von der Form

$$y' + Py = Q,$$

so, daſs das erste Glied ein vollständiges Differential ist. Man setze also

$$(X_1 y)' = X_1 Q,$$

welches $X_1' y + X_1 y' = X_1 Q_1$, also wenn man $Q = y' + Py$ substituirt, $X_1' y + X_1 y' = X_1 y' + X_1 P y$, oder $X_1' - P . X_1 = 0$ giebt. Diese Gleichung ist der gegebenen ähnlich, wenn man in jener das zweite Glied gleich Null setzt. Vermittelst der Exponential-Gröſsen, deren Eigenschaften untersucht sind, kann man nun unmittelbar X_1 durch x ausdrücken. Wäre aber dieses Symbol nicht in die Sprache der Rechnung eingeführt, so würde sich der entwickelte Ausdruck von X_1 nicht anders, als durch das obige Verfahren finden lassen. Man würde also

$$X_1 = c - \int P X_1 \, dx = c \left[1 - \int P dx + \int P \int P dx^2 - \ldots\ldots \right]$$

haben, welche Reihe sich bekanntlich auf

$$c \left[1 - \int P dx + \frac{(\int P dx)^2}{1 . 2} - \frac{(\int P dx)^3}{1 . 2 . 3} + \ldots\ldots\ldots \right]$$

reduciren läſst. Alsdann ist

$$y = \frac{c_1}{X_1} + \frac{1}{X_1} \int X_1 Q dx,$$

wo c eine willkürliche Constante bedeutet.

Um das obige Verfahren noch weiter zu erläutern, will ich auch das Integral der allgemeinen Gleichungen zweiter Ordnung entwickeln. Es sei also

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = R.$$

Wollte man das erste Glied dadurch in ein vollständiges Differential verwandeln, daſs man setzte

$$\frac{1}{X_2} \left(\frac{X_2}{X_1} (X_1 y)' \right)' = R:$$

so würde dieses zwar nicht gelingen, aber man würde, um X_1 oder X_2 zu finden, auf eine von den beiden Gleichungen

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{P dz}{dx} + \left(Q - \frac{dP}{dx} \right) z = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{P dz}{dx} + Qz = 0$$

kommen, woraus man siehet, daſs sich die Integration auf die einer ähnlichen Gleichung ohne zweites Glied reducirt. Es ist leicht zu zeigen, daſs die linearen Gleichungen allgemein diese Eigenschaft haben. Um den entwickelten Werth

von y zu finden, muſs man sich hier begnügen, blos einen Theil des ersten Gliedes in ein vollständiges Differential zu verwandeln. Ich setze also

$$\frac{1}{X_1}\left(X_1\frac{dy}{dx}\right)' = R - Qy,$$

wo X_1 vermittelst einer Gleichung der ersten Ordnung gefunden wird, und, nach der angenommenen Bezeichnung,

$$X_1 = e^{\int P dx}$$

ist. Man findet nun

$$y = c_1 + c_2\int\frac{dx}{X_1} + \int\frac{1}{X_1}\int X_1 R dx^2 - \int\frac{1}{X_1}\int X_1 Qy dx^2, \text{ oder}$$

$$y = c_1\left(1 - \int\frac{1}{X_1}\int X_1 Q dx^2 + \int\frac{1}{X_1}\int X_1 Q\int\frac{1}{X_1}\int X Q dx^4 \ldots\ldots\right)$$
$$+ c_2\left(\int\frac{dx}{X_1} - \int\frac{1}{X_1}\int X_1 Q\int\frac{dx^3}{X_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$
$$+ \int\frac{1}{X_1}\int X_1 R dx^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

welche Ausdrücke sich nur dann in endlicher Form darstellen lassen werden, wenn man ein neues Symbol eingeführt hat, welches das Integral der Gleichungen zweiter Ordnung bezeichnet.

Wir wollen jetzt die merkwürdigsten einzelnen Fälle betrachten, in welchen sich das Integral durch bekannte Functionen von Potenzen und Exponential-Gröſsen vereinfachen läſst.

4.

Ein sehr ausgedehnter Fall ist, wenn man in der Gleichung

$$\left(\ldots\ldots\left((1+ax)^{n_m}\ldots\ldots\left((1+ax)\right)^{n_2}\left((1+ax)^{n_1}y\right)'\right)'\ldots\ldots\right)' = T_1,$$

wo $n_1, n_2 \ldots\ldots\ldots n_m$ beliebige Constanten sind, die darin angedeuteten Differentiationen verrichtet. Man findet:

$$y^{(m)} + \frac{a}{1+ax}\cdot y^{(m-1)} + \frac{\beta}{(1+ax)^2}\cdot y^{(m-2)} \ldots\ldots \frac{\mu}{(1+ax)^m}\cdot y = V,$$

wo $V = (1+ax)^{(n_1+n_2\ldots\ldots n_m)}\,.\,T$ ist, und α, $\beta \ldots\ldots \mu$ Constanten sind, die von n_1, n_2, $\ldots\ldots n_m$ und a abhängen. Das Integral der gegebenen Differential-Gleichung von der m^{ten} Ordnung ist

$$y = A_1(1+ax)^{-n_1} + A_2(1+ax)^{-n-n_2+1} \ldots\ldots + A_m(1+ax)^{-n_1\ldots-n_m+m+1}$$
$$+ (1+ax)^{-n_1}\int(1+ax)^{-n_2}\int\ldots\ldots\ldots\int T dx^m,$$

wo A_1, A_2, $\ldots\ldots\ldots A_m$ willkürliche Constanten sind.

Man

Man findet daraus leicht das Integral der Gleichung mit unveränderlichen Coefficienten. Da nemlich a in den Gröſsen α, β, ... etc. die nemlichen Abmessungen hat, wie das Product von n_1, n_2, etc. so kann man

$$a = \frac{1}{p}, \quad n_1 = r_1 p, \quad n_2 = r_2 p \text{ etc.}$$

setzen, und wenn man nun

$$p = \infty$$

setzt, so ist die Differential-Gleichung:

$$y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_1 y = V,$$

wo $a_1, \beta_1, \ldots \mu_1$ von den Constanten r_1, r_2 etc. abhängen, und das Integral ist

$$y = A_1 e^{-r_1 x} + A_2 e^{-(r_2+r_1)x} \ldots\ldots + e^{-r_1 x} \int e^{-r_2 x} \int \ldots \int e^{(r_1 + \ldots + r_m)x} V dx^m.$$

Der Ausdruck geht in Kreis-Functionen über, wenn r_1, r_2 etc. imaginär sind.

Wir wollen ferner eine Art von Gleichungen untersuchen, deren Integral, obgleich es sich nicht durch bekannte Functionen vorstellig machen läſst, durch Reihen ausgedrückt werden kann, deren Gesetz sehr einfach ist. Es sei

$$(\alpha + \beta(1+ax)^{\gamma}) y^{(m)} + \frac{\alpha_1 + \beta_1 (1+ax)^{\gamma}}{1+ax} \cdot y^{(m-1)} \ldots + \frac{\alpha_m + \beta_m (1+ax)^{\gamma}}{(1+ax)^m} y = C(1+ax)^{\delta},$$

wo α, α_1, α_2 ... β, β_1, β_2 ... γ, δ und C beliebige Constanten sind. Den gegebenen Ausdruck läſst sich leicht auf die Form

$$\left(\ldots\ldots(1+ax)^{n_m}\left((1+ax)^{n_{m-1}} \ldots\ldots \left((1+ax)^{n_1} y\right)' \ldots\ldots\right)'\right)'$$

$$= A(1+ax)^b + B(1+ax)^c \left((1+ax)^{\gamma_m}\left((1+ax)^{\gamma_{m-1}} \ldots \left((1+ax)^{\gamma_1} y\right)' \ldots\right)'\right)'$$

bringen, wo $n_m, n_{m-1} \ldots\ldots\ldots, \gamma_m, \gamma_{m-1} \ldots\ldots\ldots, A, B, b, c$ Constanten sind, die von denen in der gegebenen Gleichung abhängen. Integrirt man m mal, so wird man y durch eine Function von sich selbst und von den willkürlichen Constanten ausgedrückt finden, und wenn man wiederholt substituirt, so wird man $m+1$ Reihen finden, welche das entwickelte und vollständige Integral der gegebenen Gleichung enthalten. Es ist leicht zu sehen, daſs in diesen Reihen jedes Glied aus dem vorigen so folgt, daſs jedesmal dem vorigen m Factoren im Zähler und m Factoren im Nenner hinzugefügt werden. Auf ähnliche Art kann man auch leicht zu dem Fall übergehen, wenn das Binomium sich in eine Exponential-Gröſse verwandelt.

Ich übergehe den Fall, wo die Reihen vermittelst bestimmter Integrale (*integrales définies*) eine endliche Form erhalten. Ich habe mich damit an einem anderen Orte beschäftiget, und gedenke darauf zurückzukommen.

Die Reihen, welche hier entstehen, sind als Resultate eines weniger directen Verfahrens schon bekannt. Man kann auch, wenn man sich des obigen Verfahrens bedient, bei einem beliebigen Gliede stehen bleiben und den Rest angeben. Dieses geschiehet in Folge der allgemeinen Regel, und ein Beispiel an einem einzelnen Falle wird zur Erläuterung hinreichen. Es sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} = cx^n y,$$

so ist

$$y = A_1\left(1 + \frac{cx^n}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots + \frac{c^m x^{n+2m}}{(n+1)\ldots\ldots(n+2m)}\right)$$
$$+ A_2\left(x + \frac{cx^{n+1}}{(n+2)(n+3)} + \ldots\ldots + \frac{c^m x^{n+2m+1}}{(n+2)\ldots.(n+2m+1)}\right)$$
$$+ c^{m+1}\int^{2m+2} x^n y\, dx^{2m+2}.$$

Um näherungsweise den Werth von y zu finden, mufs man aus den Umständen der Aufgabe den gröfsten und kleinsten Werth von y, zwischen gewissen Grenzen von x, kennen.

5.

Ungefähr auf dieselbe Weise kann man auch die Grenzen der Taylorschen Reihe finden, wenn man sie als das Integral einer partiellen Differential-Gleichung betrachtet.

Es sei

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy},$$

so ist: $u = \varphi y + \int \frac{du}{dy} dx$ oder

$$u = \varphi y + x\varphi' y + \frac{x^2}{1.2}\varphi'' y + \ldots\ldots\ldots + \int^n \frac{d^n u}{dy^n} dx^n.$$

Man siehet leicht, dafs sich alle partiellen Differential-Gleichungen auf ähnliche Weise integriren lassen, was ich auch an einem andern Ort, in den *Annales des mathématiques* von Gergonne auseinandergesetzt habe. Man nehme z. B. folgende zwei allgemeine Ausdrücke, auf welche sich die Gleichungen zweiter Ordnung, zwischen zwei unabhängig veränderlichen Gröfsen, bringen lassen, nemlich

$$\frac{d^2 z}{dxdy} + p\frac{dz}{dx} + q\frac{dz}{dy} + rz = s, \text{ und}$$
$$\frac{d^2 z}{dx^2} + p\frac{dz}{dx} + q\frac{dz}{dy} + rz = s,$$

wo p, q, r beliebige Functionen von x und y sind: so kann man der ersten Gleichung, wenn man

$$e^{\int p dy} = n,\ e^{\int q dy} = mn \text{ und } pq + \frac{dp}{dx} - r = v$$

setzt, die Form:

$$\frac{d\left(m \frac{d(nz)}{dy}\right)}{dx} = mns + mnvz$$

geben, und wenn φ und ψ willkürliche Functionen von x und y bezeichnen, und man setzt

$$\frac{\psi}{n} + \frac{1}{n}\int \frac{\varphi}{m}\, dy + \frac{1}{n}\int \frac{dy}{m} \int mnsdx = T,$$

so findet man

$$z = T + \frac{1}{n}\int \frac{dy}{m} \int mnvzdx,$$

und wenn man wiederholt substituirt:

$$z = T + \frac{1}{n}\int \frac{dy}{m} \int mnvTdx + \frac{1}{n}\int \frac{dy}{m} \int mvdx \int \frac{dy}{n} \int mnvTdx \ldots\ldots$$

Auch kann man für z leicht mehrere andere Ausdrücke finden.

Um den zweiten von den beiden obigen allgemeinen Ausdrücken zu integriren, kann man

$$n = e^{-\int p dx};\ m = e^{\int \frac{1}{p} dy},\ U = \frac{\varphi}{m} + \frac{1}{m}\int smdy$$

setzen, wo φ eine willkürliche Function von x bedeutet. Dieses giebt

$$\frac{1}{m}\frac{d.(mz)}{dy} = s - n\frac{d\left(\frac{1}{n}\frac{dz}{dx}\right)}{dx},$$

woraus

$$z = U - \frac{1}{m}\int \frac{mn}{q}\left(\frac{1}{n}U'\right)' dy + \frac{1}{m}\int \frac{mn}{q}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}\int \frac{mn}{q}\left(\frac{1}{n}U'\right)'\right)'\right)' dy^2 \ldots\ldots$$

folgt. Die Ableitungs-Zeichen beziehen sich auf x. Diese Reihe, obgleich sie nur eine willkürliche Function enthält, ist, wie bekannt, nicht weniger allgemein, als eine Reihe mit zwei willkürlichen Functionen, die sich ebenfalls leicht finden läfst. In der oben erwähnten Abhandlung findet man mehrere Entwickelungen und Untersuchungen über einzelne besondere Fälle, in welchen sich die Reihen vereinfachen und sogar zuweilen auf bekannte Functionen reduciren lassen.

In allen diesen Fällen wird man finden, dafs die Entwicklung der Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von einer Gleichung abhängt, die der gegebenen ähnlich ist, von welcher aber ein particulaires Integral hinreichend ist. Im letzten Falle z. B. hängt β von der Gleichung

$$\beta' = p + q\beta + r\beta^2 + s\beta^3$$

ab. In dem besonderen Falle $p = 0$ wird dieser Gleichung durch $\beta = 0$ genug gethan, und α, γ und δ werden leicht gefunden. Das entwickelte Integral ist also

$$y = \frac{\alpha}{\int dx \left(\gamma + \frac{\delta\alpha}{\int dx \left(\gamma + \frac{\delta\alpha}{\int dx\,(\ldots\ldots\ldots)}\right)}\right)}.$$

Als einzelnes Beispiel sei die Gleichung

$$y' + \frac{a}{x}y + bx^m y^2 + cx^n y^3 = 0$$

gegeben. Man findet

$$\alpha = x^{-a},\ \int\gamma\,dx = h + \frac{bx^{m-a+1}}{m-a+1},\ \delta = cx^{n-a},$$

wo h eine willkürliche Constante ist. Der Kürze wegen sei

$$\frac{b}{m-a+1} = e,$$

so findet man

$$y = \frac{x^{-a}}{h + ex^{m-a+1} + \int \frac{cx^{n-2a}\,dx}{h + ex^{m-a+1} + \int \frac{cx^{n-2a}\,dx}{h + ex^{m-a+1} + \int \ldots\ldots\ldots}}}$$

Das Vorstehende wird zureichen, um die Anwendung der Grundregel auf verwickeltere Gleichungen zu zeigen, deren Integrale ebenfalls verwickelter sind, und unter welchen man diejenigen besonders untersuchen mufs, welche sich vereinfachen lassen.

Man kann sich der obigen Methode auch bedienen, um den Ausdruck einer Function, die man schon anders woher kennt, zu verwandeln. So z. B. läfst sich die Gleichung

$$y' + ay + by^2 + cy^3 = 0$$

leicht durch logarithmische Functionen integriren. Man findet aber auch

$$y = \frac{e^{-ax}}{h - \frac{b}{a}e^{-ax} + c\int \frac{e^{-2ax}\,dx}{h - \frac{b}{a}e^{-ax} + c\int \frac{e^{-2ax}\,dx}{h - \ldots\ldots\ldots}}},$$

wo h eine willkürliche Constante ist. Setzt man dieselbe gleich Null, so findet man das particuläre Integral:

$$y = \cfrac{-a}{b - \cfrac{ca}{b - \cfrac{ca}{b \ldots\ldots}}},$$

welches der algebraischen Gleichung

$$ay + by^2 + cy^3 = 0$$

entspricht. Eben so würde die Gleichung

$$e^{ay} = c + a\int y\,dx,$$

oder die Gleichung

$$y = \frac{1}{a} \log \left(c + a\int y\,dx\right)$$

auf die Umkehrung der Function

$$x = \int \frac{e^{ay}}{y}\,dy$$

führen, u. s. w.

14.

Ueber den Eilften Grundsatz in Euclid's Elementen der Geometrie.

(Von Herrn *Louis Olivier*.)

Dieser Eilfte Grundsatz heifst:

„Zwei gerade Linien *GB* und *HD* (Fig. 7. Taf. 2.), die von einer dritten „*EF* so geschnitten werden, dafs die beiden inneren, an einerlei Seite liegenden Winkel *BAC* um *DCA* zusammen kleiner als zwei rechte sind, „treffen, genug verlängert, an eben der Seite zusammen." (Nach Lorenz deutscher Ausgabe des Euclides ausgedrückt. D. H.)

Da dieser Satz nicht gut von selbst einleuchtet, und also nicht sowohl ein Grundsatz, als vielmehr ein Lehrsatz zu sein scheint, der des Beweises bedarf, so hat man sehr oft versucht, den Satz auf Euclidische Art zu beweisen. Alle diese Versuche sind mifslungen, und es ist also nicht sehr wahrscheinlich, dafs man den Beweis finden werde. Verschiedene Raisonnements und Beweise mit allerlei

Hülfs-Vorstellungen (z. B. mit der Vorstellung vom Verschieben eines unveränderlichen Winkels, von Winkelraum-Gröſsen u. s. w. D. H.), so wie der Umstand, daſs alle Sätze, die auf das Axiom gebaut sind, einander nicht widersprechen, müssen die Stelle eines Euclidischen Beweises vertreten. Man kann deshalb dergleichen Stellvertreter des Beweises nicht genug haben. Vielleicht findet das folgende Raisonnement hier eine Stelle.

Die gerade Linie KC schneide die AB, so wird strenge bewiesen, daſs der Winkel KCF gröſser ist, als der Winkel KAF (Euclid's Elemente. 1. Buch. 16 Satz.), und es ist an und für sich klar, daſs alle durch C gehende gerade Linien, wie LC, die mit CF einen noch gröſseren Winkel machen, als KCF, oder die zwischen KC und AC liegen, die AB ebenfalls schneiden.

Der Winkel ICF sei gleich dem Winkel BAF, so schneidet die IC die AB nothwendig nicht; denn schnitte IC die AB, so wäre nach dem oben benannten Satze des Euclides ICF gröſser als BAF, welches der Voraussetzung entgegen ist.

Gesetzt nun, es gäbe noch andere, durch C gehende gerade Linien, wie DC, welche zwischen CI und CA liegend, also so, daſs DCF gröſser als ICF ist, die AB ebenfalls nicht schnitten, so ist wiederum an und für sich klar, daſs auch alle andere gerade Linien zwischen DC und IC, z. B. NC, die AB ebenfalls nicht schneiden werden, denn schnitte z. B. NC die AB, so schnitte auch DC, der Voraussetzung entgegen, die AB nothwendig, eben wie vorhin KC nothwendig die AB schnitt, wenn AB von KC getroffen wurde.

Das Geschnittenwerden und Nichtgeschnittenwerden der Linie AB von geraden Linien, die durch C gehen, kann also, wenn die Winkel, die sie mit CF machen, von zwei rechten an, allmälig abnehmen, nicht abwechseln.

Nun giebt es auſser Geschnittenwerden und Nichtgeschnittenwerden für die Linie AB kein Drittes. Also muſs es nothwendig eine letzte gerade Linie, welche durch C geht, geben, welche AC schneidet, und zugleich mit CF einen Winkel macht, der gröſser ist als $ICF = BAF$. Diese Linie sei KC.

Aber AK kann ohne Ende verlängert werden, und es ist, wie weit auch K von A liegen mag, immer noch ein Punct M in AB möglich, der von A noch weiter entfernt ist, und also immer noch eine gerade Linie MC, die ebenfalls noch AB schneidet und, wie Euclid beweiset, mit CF einen Winkel MCF macht, der gröſser ist als $ICF = BAF$.

Folglich giebt es keine letzte gerade Linie, die AB schnitte, und die zugleich mit CF einen gröſseren Winkel machte, als $ICF = BAF$; und folg-

lich

lich eben so wenig eine **erste** gerade Linie, die sie nicht schnitte, und die mit CF einen Winkel machte, der größer ist, als $ICF = BAF$.

Folglich schneiden **alle** durch C gehende gerade Linien, die mit CF einen größeren Winkel machen, als $ICF = BAF$ die AB nothwendig; das heißt: jede zwei gerade Linien AB und CD, die von der EF so geschnitten werden, daß die beiden inneren, an einerlei Seite liegenden Winkel BAC und DCA zusammen kleiner als zwei rechte sind, treffen, genugsam verlängert, nothwendig an eben der Seite zusammen; welches der Euclidische Grundsatz ist.

Ich gebe das Raisonement, wie ich schon erklärt, nicht für einen Beweis, sondern theile es nur als eine Zusammensetzung von Schlüssen mit. Es wird dem Leser vielleicht Vergnügen machen, dem Raisonement einen **Beweis** der Unzulänglichkeit entgegen zu setzen.

15.

Auflösung einer mechanischen Aufgabe.

(Von Herrn *N. H. Abel.*)

Es sei $BDMA$ (Fig. 5. Taf. 2.) eine beliebige Curve. BC sei horizontal, CA vertical. Ein Punct bewege sich, von der Schwerkraft getrieben, die Curve $BDMA$ entlang, und habe seine Bewegung von einem beliebigen Puncte D angefangen. Die Zeit, in welcher er von D nach dem gegebenen Puncte A gelangt, sei τ, die Höhe EA sei a. Alsdann wird τ eine gewisse Function von a sein, die von der Gestalt der Curve abhängt. Umgekehrt wird die Gestalt der Curve von dieser Function abhängen. Wir wollen untersuchen, wie man mit Hülfe eines **bestimmten Integrals** (*intégrale définie*) die Gleichung der Curve finden könne, für welche τ eine gegebene **stetige** Function von a ist.

Es sei $AM = s$, $AP = x$, und t die Zeit, in welcher der bewegte Punct von D nach M gelangt.

Nach mechanischen Regeln ist $-\frac{ds}{dt} = \sqrt{(\mathrm{a} - x)}$, also $dt = -\frac{ds}{\sqrt{(\mathrm{a} - x)}}$.

Daraus folgt, wenn man das Integral von $x = \mathrm{a}$ bis $x = 0$ nimmt:

$$\tau = -\int_{\mathrm{a}}^{0} \frac{ds}{\sqrt{(\mathrm{a} - x)}} = +\int_{0}^{\mathrm{a}} \frac{ds}{\sqrt{(\mathrm{a} - x)}},$$

wo z. B. durch $\int_\alpha^\beta$ bezeichnet wird, dafs die Grenzen des Integrals zu $x = \alpha$ und $x = \beta$ gehören.

Nun sei

$$\tau = f\mathrm{a}$$

die gegebene Function, so ist

$$f\mathrm{a} = \int_0^{\mathrm{a}} \frac{ds}{\sqrt{(\mathrm{a} - x)}},$$

aus welcher Gleichung s, durch x ausgedrückt, gefunden werden mufs.

Statt dieser Gleichung wollen wir die allgemeinere

$$f\mathrm{a} = \int_0^{\mathrm{a}} \frac{ds}{(\mathrm{a} - x)^{\mathrm{n}}}$$

annehmen, und aus derselben s durch x suchen.

Es bezeichne $\Gamma(\alpha)$ die Function

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1},$$

so ist bekanntlich

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

wo α und β beide gröfser sein müssen, als Null.

Es sei $\beta = 1 - n$, so findet man

$$\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1}dy}{(1-y)^{\mathrm{n}}} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)},$$

woraus, wenn man $z = \mathrm{a}y$ setzt,

$$\int_0^{\mathrm{a}} \frac{z^{\alpha-1}dz}{(\mathrm{a}-z)^{\mathrm{n}}} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)}\,.\,\mathrm{a}^{\alpha-\mathrm{n}}$$

folgt.

Man multiplicire mit $\frac{d\mathrm{a}}{(x-\mathrm{a})^{1-\mathrm{n}}}$ und nehme das Integral von $\mathrm{a} = 0$ bis $\mathrm{a} = x$: so findet man

$$\int_0^x \frac{d\mathrm{a}}{(x-\mathrm{a})^{1-\mathrm{n}}} \int_0^{\mathrm{a}} \frac{z^{\alpha-1}dz}{(\mathrm{a}-z)^{\mathrm{n}}} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} \int_0^x \frac{\mathrm{a}^{\alpha-\mathrm{n}}d\mathrm{a}}{(x-\mathrm{a})^{1-\mathrm{n}}}.$$

Setzt man $\mathrm{a} = xy$, so findet man

$$\int_0^x \frac{\mathrm{a}^{\alpha-\mathrm{n}}d\mathrm{a}}{(x-\mathrm{a})^{1-\mathrm{n}}} = x^\alpha \int_0^1 \frac{y^{\alpha-\mathrm{n}}dy}{(1-y)^{1-\mathrm{n}}} = x^\alpha\,.\,\frac{\Gamma(\alpha-n+1)\,\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+1)},$$

folglich

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \Gamma(n)\,\Gamma(1-n)\,\frac{\Gamma\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,x^\alpha.$$

Nun ist, einer bekannten Eigenschaft der Function Γ zufolge,

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha);$$

also findet man, wenn man substituirt:

$$\int_0^x \frac{da}{(a-x)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{x^\alpha}{\alpha}\,\Gamma(n)\,\Gamma(1-n).$$

Man multiplicire mit $\alpha\varphi\alpha d\alpha$, und integrire nach α, so findet man

$$\int_0^x \frac{dx}{(a-x)^{1-n}} \int_0^a \frac{\left(\int\varphi\alpha\,.\,\alpha z^{\alpha-1}d\alpha\right)dz}{(a-z)^n} = \Gamma(n)\,\Gamma(1-n)\int\varphi\alpha\,.\,x^\alpha d\alpha.$$

Man setze

$$\int\varphi\alpha\,.\,x^\alpha d\alpha = fx.$$

Das Differential hiervon ist

$$\int\varphi\alpha\,.\,\alpha\,.\,x^{\alpha-1}d\alpha = f'x;$$

also ist

$$\int\varphi\alpha\,.\,\alpha\,.\,z^{\alpha-1}d\alpha = f'z,$$

folglich:

$$\int_0^x \frac{da}{(a-x)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'z\,dz}{(a-z)^n} = \Gamma(n)\,\Gamma(1-n)\,.\,fx,$$

oder weil, wie bekannt,

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi},$$

$$1.\; fx = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'z\,dz}{(a-z)^n}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung läſst sich aus der Gleichung

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n},\ s \text{ leicht finden.}$$

Man multiplicire nemlich diese Gleichung mit $\frac{\sin n\pi}{\pi}\,.\,\frac{da}{(x-a)^{1-n}}$, und nehme das Integral von $a = 0$ bis $a = x$: so findet man

$$\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi a\,.\,da}{(x-a)^{1-n}} = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n},$$

also, vermöge der Gleichung (1.):

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi a\,da}{(x-a)^{1-n}}.$$

Man setze nun $n = \frac{1}{2}$, so ist

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{(a - x)}}$$

und

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi a \, da}{\sqrt{(x - a)}}.$$

Diese Gleichung giebt, wie bekannt, den Bogen s durch die Abscisse x, und folglich ist die Curve nunmehr völlig bestimmt.

Wir wollen den gefundenen Ausdruck auf einige Beispiele anwenden.

I. Es sei

$$\varphi a = \alpha_0 a^{\mu_0} + \alpha_1 a^{\mu_1} \ldots\ldots\ldots + \alpha_m a^{\mu_m} = \Sigma \left(\alpha a^{\mu}\right),$$

so ist in diesem Falle der Werth von s

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{da}{\sqrt{(x - a)}} \Sigma \alpha a^{\mu} = \frac{1}{\pi} \Sigma \left(\alpha \int_0^x \frac{a^{\mu} da}{\sqrt{(x - a)}}\right).$$

Setzt man nun $a = xy$, so ist

$$\int_0 \frac{a^{\mu} da}{\sqrt{(x - a)}} = x^{\mu + \frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{y^{\mu} dy}{\sqrt{(1 - y)}} = x^{\mu + \frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\mu + 1) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu + \frac{3}{2})},$$

also

$$s = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi} \Sigma \frac{\alpha \Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \frac{3}{2})} x^{\mu + \frac{1}{2}},$$

oder, weil

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}:$$

$$s = \sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)} \left[\alpha_0 \frac{\Gamma(\mu_0 + 1)}{\Gamma(\mu_0 + \frac{3}{2})} . x^{\mu_0} + \alpha_1 \frac{\Gamma(\mu_1 + 1)}{\Gamma(\mu_1 + \frac{3}{2})} x^{\mu_1} \ldots\ldots + \alpha_{\mu} \frac{\Gamma(\mu_m + 1)}{\Gamma(\mu_m + \frac{3}{2})} . x^{\mu_m}\right].$$

Wenn man z. B. $m = 0$, $\mu_0 = 0$, das heifst, die gesuchte Curve isochron annimmt, so findet man

$$s = \sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)} \alpha_0 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\alpha_0}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} \sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)} = \frac{2\alpha_0}{\pi} \sqrt{x},$$

und $s = \frac{2\alpha_0}{\pi} \sqrt{x}$ ist bekanntlich die Gleichung der Cycloïde.

II. Es sei

φa von $a = 0$ bis $a = a_0$, gleich $\varphi_0 a$,
φa von $a = a_0$ bis $a = a_1$, gleich $\varphi_1 a$,
φa von $a = a_1$ bis $a = a_2$, gleich $\varphi_2 a$,
. . . .
φa von $a = a_{m-1}$ bis $a = a_m$, gleich $\varphi_m a$,

so ist

$$\pi s = \int_0^x \frac{\varphi_0 . a da}{\sqrt{(a-x)}}, \text{ zwischen } x = 0 \text{ und } x = a_0$$

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a . da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_0}^x \frac{\varphi_1 a . da}{\sqrt{(a-x)}}, \text{ zwischen } x = a_0 \text{ und } x = a_1$$

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a . da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1 a . da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_1}^x \frac{\varphi_2 a . da}{\sqrt{(a-x)}}, \text{ zwischen } x = a_1 \text{ und } x = a_2$$

. . . .

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a . da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1 a . da}{\sqrt{(a-x)}} \dots + \int_{a_{m-2}}^{a_{m-1}} \frac{\varphi_{m-1} a . da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_{m-1}}^x \frac{\varphi_m a . da}{\sqrt{(a-x)}},$$

zwischen $x = a_{m-1}$ und $x = a_m$,

wobei zu bemerken, daſs die Functionen $\varphi_0 a$, $\varphi_1 a$, $\varphi_2 a$ . . . . $\varphi_m a$ von der Art sein müssen, daſs

$$\varphi_0(a_0) = \varphi_1(a_0), \ \varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_1), \ \varphi_2(a_2) = \varphi_3(a_2), \text{ u. s. w.}$$

ist; denn die Function φa muſs nothwendig stetig sein.

16.

Theorie der Hebelwage von Quintenz.

Im *Bulletin de la société d'encouragement Nr. CCXXXIV.* ist die von A. Quintenz in Strasburg, im Jahr 1821 erfundene Hebelwage (*Balance à bascules portatives*) von Francoeur beschrieben. Die sinnreiche Anordnung dieser Wage verdient hier eine nähere Auseinandersetzung.

An einem Wagebalken *BD* (Fig. 6. Taf. 2.), welcher im Punkt *A* unterstützt und um denselben beweglich ist, befindet sich in *B* eine Wageschale, auf welche die Gewichte zum Abwiegen der Last gelegt werden. In *C* und *D* sind Stangen *CM* und *DR* angebracht, welche um *C* und *D* beweglich sind. Mit diesen Stangen sind zwei andre *MN* und *RE* dergestalt verbunden, daſs die Stange *RE* in *E* eine Unterstützung erhält, um welche sich *ER* frei herumdrehen kann. Auf *ER*, in *F*, ist die Stange *FN* angebracht und in *N* mit der Stange *MN* verbunden. Auch sind in *M*, *R* und *N* Gelenke angebracht.

Vorausgesetzt, daſs für das Gleichgewicht die Stangen *BD*, *MN*, *RE* wagerecht und *CM*, *DR*, *NF* lothrecht stehen, und auf die Stange *MN*, unter welcher man sich auch eine wagerechte Tafel vorstellen kann, eine Last *Q* ge-

setzt werde, mit welcher das Gegengewicht P in der Wageschale bei B im Gleichgewichte ist, so setze man die Abstände $AC=a$, $AD=b$, $AB=c$, $EF=\alpha$, $ER=\beta$, $MQ=m$ und $QN=n$. Werden nun die angebrachten Stangen nebst dem Wagebalken als mathematische Hebel angesehen, und man setzt den Druck von Q auf $M=M$, auf $N=N$ und den Druck von N auf $R=R$, so erhält man für das Gleichgewicht zwischen P und Q,

$$N=\frac{mQ}{m+n} \text{ und } M=\frac{nQ}{m+n}.$$

Ferner werde vorausgesetzt, dafs $\frac{a}{b}=\frac{\alpha}{\beta}$ sei, so findet man, weil der Druck auf $F=N$ ist,

$$R=\frac{\alpha}{\beta}N=\frac{a}{b}N=\frac{amQ}{b(m+n)}.$$

Am Hebel BD ist der Druck auf $B=P$, auf $C=M$ und auf $D=R$, daher

$$cP=aM+bR, \text{ oder}$$

$$cP=\frac{anQ}{m+n}+\frac{bamQ}{b(m+n)}=a\frac{m+n}{m+n}Q, \text{ oder}$$

$$cP=aQ, \text{ für das Gleichgewicht zwischen } P \text{ und } Q.$$

Weil die Werthe m und n aus der Gleichung wegfallen, so folgt hieraus, dafs es gleichgültig ist, auf welchen Punct des Hebels MN die Last Q gesetzt werde, weil das Gleichgewicht dennoch nicht aufgehoben wird. Auch kann man $AD=b$ und $ER=\beta$ willkürlich annehmen, wenn nur $\frac{a}{b}=\frac{\alpha}{\beta}$ unverändert bleibt.

Wird das Gleichgewicht aufgehoben, so dafs P steigt und Q sinkt, so werden, wenn diese Senkung nicht beträchtlich ist, die Puncte M und R eben so tief sinken, als C und D. Nun sinke M um die Tiefe t, so ist die Senkung von $R=\frac{at}{b}$, und wenn R um $\frac{at}{b}$ sinkt, so mufs F auf die Tiefe $\frac{at}{b}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=t$ sinken, oder es sinkt F, also auch N, auf die Tiefe t. Eben so viel sinkt M, daher bleibt MN wagerecht, wenn die Last Q nicht beträchtlich sinkt.

Die beschriebene Hebelwage hat daher die Eigenschaft, dafs es gleichgültig ist, auf welchen Punct von MN die Last Q für das Gleichgewicht gesetzt werde, und dafs MN bei einer geringen Senkung dieser Last wagerecht bleibt.

Gewöhnlich nimmt man $\frac{a}{c}=\frac{1}{10}$; dies giebt $P=\frac{1}{10}Q$.

E.

17.

Beweis eines Ausdruckes, von welchem die Binomial-Formel ein einzelner Fall ist.

(Von Herrn *N. H. Abel.*)

Der Ausdruck ist folgender:

$$(x+\alpha)^n = x^n + \frac{n}{1}\alpha.\,(x+\beta)^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.\;2}\alpha\,(\alpha-2\beta)\,(x+2\beta)^{n-2}\ldots\ldots$$
$$+\frac{n.n-1\ldots\ldots\ldots(n-\mu+1)}{1.\;2\ldots\ldots\ldots\mu}\alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu}$$
$$+\frac{n}{1}\alpha\big(\alpha-(n-1)\beta\big)^{n-2}\big(x+(n-1)\beta\big)+\alpha\,(\alpha-n\beta)^{n-1}.$$

x, α und β sind beliebige Gröſsen, n ist eine ganze positive Zahl.

Wenn $n=0$: so giebt der Ausdruck

$$(x+\alpha)^0 = x^0;$$

wie gehörig, Nun kann man, wie folgt, beweisen, daſs der Ausdruck, wenn er für $n=m$ Statt findet, auch für $n=m+1$, also allgemein, gilt.

Es sei

$$(x+\alpha)^m = x^m + \frac{m}{1}\alpha(x+\beta)^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.\;2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2}\ldots\ldots$$
$$+\frac{m}{1}\alpha\big(\alpha-(m+1)\beta\big)^{m-2}\big(x+(m-1)\beta\big)+\alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}.$$

Man multiplicire mit $(m+1)\,dx$ und integrire, so findet man:

$$(x+\alpha)^{m+1} = x^{m+1} + \frac{m+1}{1}\alpha(x+\beta)^m + \frac{(m+1)m}{1.\;2}\alpha(\alpha-2\beta)\,(x+2\beta)^{m-1}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{m+1}{2}\alpha\,(\alpha-m\beta)^{m-1}(x+m\beta)+C,$$

wo C die willkürliche Constante ist. Um ihren Werth zu finden, sei

$$x=(m+1)\,\beta,$$

so geben die beiden letzten Gleichungen:

$$\left(\alpha-(m+1)\beta\right)^m=(-1)^m\Big[(m+1)^m\beta^m-m^m\alpha\beta^{m-1}+\frac{m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-1}$$
$$-\frac{m\,.\,m-1}{2\,.\,3}\alpha(\alpha-3\beta)^2(m-2)^{m-2}\beta^{m-3}\,\ldots\ldots\ldots\Big],$$

$$\left(\alpha-(m+1)\beta\right)^{m+1}=(-1)^{m+1}\Big[(m+1)^{m+1}\beta^{m+1}-(m+1)m^m\alpha\beta^m$$
$$+\frac{(m+1)m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-1}\,\ldots\ldots\ldots\Big]+C.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $(m+1)\beta$, und thut das Product zur zweiten, so findet man:

$$C=\left(\alpha-(m+1)\beta\right)^{m+1}+(m+1)\beta\left(\alpha-(m+1)\beta\right)^m, \text{ oder}$$
$$C=\alpha\left(\alpha-(m+1)\beta\right)^m.$$

Daraus folgt, dafs der zu beweisende Ausdruck auch für $n=m+1$ Statt findet. Er gilt aber für $n=0$; also gilt er auch für $n=0, 1, 2, 3$ etc., das heifst: für jeden beliebigen ganzzahligen und positiven Werth von n.

Setzt man $\beta=0$, so bekommt man die Binominal-Formel.

Setzt man $\alpha=-x$, so findet man:

$$0=x^n-\frac{n}{1}x(x+\beta)^{n-1}+\frac{n\,.\,n-1}{2}x(x+2\beta)^{n-1}$$
$$-\frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}x(x+3\beta)^{n-1}\,\ldots\ldots\ldots,$$

oder, wenn man mit x dividirt,

$$0=x^{n-1}-\frac{n}{1}(x+\beta)^{n-1}+\frac{n\,.\,n-1}{2}(x+2\beta)^{n-1}$$
$$-\frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}(x+3\beta)^{n-1}\,\ldots\ldots\ldots,$$

wie auch sonst schon bekannt ist; denn das zweite Glied dieser Gleichung ist nichts anderes, als

$$(-1)^{n-1}\,\Delta^n\left(x^{n-1}\right),$$

wenn man die constante Differenz gleich β setzt.

18.

18.

Einige geometrische Betrachtungen.

(Von Herrn *Steiner.*)

Die in den nachstehenden Paragraphen angefangenen Betrachtungen enthalten die Grundlage der geometrischen Untersuchung über das Schneiden der Kreise. Es lassen sich daraus die Auflösungen fast aller Aufgaben über das Schneiden und Berühren der Kreise entwickeln, und zwar in den meisten Fällen sehr einfach, auch wird durch sie oft zwischen mehreren Aufgaben, welche auf den ersten Anblick keine Gemeinschaft zu haben scheinen, ein gewisser Zusammenhang sichtbar. Zwei andere, eben so erfolgreiche Gegenstände, besonders in Bezug auf die Curven und Flächen zweiten Grades, und in Bezug auf die sogenannten Porismen, und die meisten Sätze, welche man gewöhnlich durch die Theorie der Transversalen zu beweisen pflegt, sind die harmonische Proportion und die perspectivische Projection.

Vor etwa drei Jahren sah sich der Verfasser dieser Abhandlung, zufälliger Weise, zur Beschäftigung mit der Aufgabe: 1) einen Kreis zu beschreiben, welcher drei andere, gegebene Kreise berührt; 2) mit der Malfattischen Aufgabe (14); so wie 3) mit dem XV. Theorem im IV. Buch der *Collect. mathem.* von Pappus; und 4) mit verschiedenen Porismen und der rein geometrischen Betrachtung der Curven und Flächen zweiten Grades, angeregt. Den Pappischen Satz kannte er nur ohne Beweis; eben so die Malfattische Aufgabe; von der ersten (1) jedoch die Vieta'sche geometrische Lösung.

Der Verfasser pflegt in der Regel nicht eher über eine Aufgabe oder über einen Gegenstand weiter nachzulesen, bevor er nicht selbst eine Auflösung oder Sätze darüber gefunden hat, um alsdann seine Resultate mit den schon vorhandenen zu vergleichen.

Dieses fand auch bei den eben genannten Gegenständen Statt; das Bestreben des Verfassers war, z. B. bei den Auflösungen der verschiedenen Aufgaben über Berührung der Kreise, den ihnen zum Grunde liegenden gemeinschaftlichen Zusammenhang zu finden.

Den Satz (2), „dafs der Ort der gleichen Tangenten zweier gegebenen Kreise eine grade Linie sei," hatte der Verfasser schon bei einer frühern geometrischen Untersuchung gefunden. Die Bedeutung der Aehnlichkeitspuncte (7) und

der gemeinschaftlichen Potenz (11) zweier Kreise, wovon schon bei Pappus und Vieta sich Spuren finden, lernte er durch ihre, von ihm gefundene vielseitige Anwendbarkeit erkennen. Mittelst der Anwendung dieser drei Sätze offenbarte sich ihm nun der gesuchte Zusammenhang der verschiedenen Aufgaben über Berührung der Kreise, welche er sich vorgelegt hatte, nebst einer Menge damit in Verbindung stehender Sätze.

Als nun der Verfasser seinen Gegenstand einigermaſsen erschöpft zu haben glaubte, sah er sich auch nach Demjenigen um, was Andere gethan. Er sah, daſs die Franzosen nicht nur einen groſsen Theil der von ihm gelöseten Sätze und Aufgaben schon besitzen, sondern auch bei den Beweisen und Auflösungen sich fast allenthalben derselben Mittel bedient haben, wie er. In Hinsicht der Anwendung der harmonishen Proportion und der perspectivischen Projection auf eine groſse Menge geometrischer Gegenstände (besonders auf die Curven und Flächen zweiten Grades, die Porismen u. s. w.) fand er besonders bei Poncelet (*Traité des propriétés projectives des figures* *)), sowohl viele seiner Sätze, als auch denselben Gang der Betrachtung.

Für die Versicherung, daſs der Verfasser Dasjenige, was die Franzosen in dieser Hinsicht gethan, vorher nicht gekannt habe, hofft er, werden nicht allein diejenigen seiner Bekannten, welche, bei täglichem Umgange mit ihm, die Entstehung und Entwickelung seiner Arbeiten beobachteten, sondern dem Sachkenner wird auch schon die umfassendere, allgemeinere Entwicklungsweise in den Untersuchungen, aus welcher nicht nur alle jene Betrachtungen, sondern auch eine groſse Menge neuer Resultate von selbst hervorgehen, ein Zeugniſs ablegen. So hat er z. B. die Untersuchungen über Kreise und Kugeln auf die Weise verallgemeinert, daſs die Winkel, unter welchen dieselben sich schneiden, betrachtet werden, so daſs die Berührung nur als ein spezieller Fall des Schneidens anzusehen ist, nemlich der, wo der Schneidungswinkel $= 0$ oder $= 180^\circ$ ist. Und zwar löset er durch Hülfe der in den nachstehenden Paragraphen (I. II. III.) entwickelten Lehrsätze nicht allein alle die verschiedenen (Apollonischen) Aufgaben über Berührung der Kreise und der graden Linien etc., sondern noch weit mehr Aufgaben über das Schneiden der Kreise; wie z. B. folgende:

„Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei der Gröſse und Lage nach gegebene Kreise K_1, K_2, K_3 respective unter den gegebenen Winkeln α_1, α_2, α_3 schneidet."

*) Man sehe S. 96. des I. Hefts dieses Journals.

„Einen Kreis zu beschreiben, welcher vier, der Gröſse und Lage nach gegebene Kreise unter einerlei Winkel schneidet." U. s. w.

Und zwar werden alle diese Aufgaben ebensowohl bei Kreisen, die in einerlei Ebene, als bei Kreisen, die in einerlei Kugelfläche liegen, gelöset. Ferner werden analoge Aufgaben bei Kugeln im Raume gelöset, als z. B.:

„Eine Kugel zu beschreiben, welche vier, der Gröſse und Lage nach gegebene Kugeln K_1, K_2, K_3, K_4 respective unter den gegebenen Winkeln α_1, α_2, α_3, α_4 schneidet."

„Eine Kugel zu beschreiben, welche fünf der Gröſse und Lage nach gegebene Kugeln unter einerlei Winkel schneidet." U. s. w.

Nach dem frühern Plane des Verfassers sollten seine geometrischen Untersuchungen ein zusammenhängendes Werk ausmachen; allein bei der Ausarbeitung fand sich, daſs es zu ausgedehnt werden würde; andererseits war es ihm bis jetzt noch nicht möglich, seinen Untersuchungen ein bestimmtes Ziel zu setzen, weil sich dieselben noch täglich erweitern und auf neue Gegenstände anwenden lassen, so daſs bestimmte Schranken der freien Entwickelung des Gegenstandes nur nachtheilig sein würden. Der Verfasser wird daher erst einen Theil davon, welcher

„Das Schneiden (mit Einschluſs der Berührung) der Kreise in der Ebene, das Scheiden der Kugeln im Raume, und das Schneiden der Kreise auf der Kugelfläche"

enthalten soll, welche Untersuchungen schon vor zwei Jahren beendet waren, und deren Ausarbeitung zum Drucke gegenwärtig beinahe vollendet ist, in einem Bande von etwa 25 bis 30 Bogen, herausgeben, und wenn dieser erste Theil einige Theilnahme findet, die übrigen Untersuchungen nachfolgen lassen.

---

§. I. Von der Potenz bei Kreisen, die in einerlei Ebene liegen.

1.

Wenn die geraden Linien Mm und PG (Fig. 8.) aufeinander senkrecht stehen: so ist für jeden beliebigen Punct P des Perpendikels PG, wenn man die Puncte m, M als gegeben betrachtet:

$$MP^2 - mP^2 = MG^2 - mG^2,$$

das heiſst:

„Der Unterschied der Quadrate der Abstände aller Puncte P der Senkrechten PG von zwei gegebenen Puncten M, m ist eine unveränderliche Gröſse,

nemlich gleich dem Unterschiede der Quadrate der Abstände MG, mG der Senkrechten PG von den gegebenen Puncten M, m." Hieraus folgt:

„Dafs der geometrische Ort eines Puncts P, für welchen der Unterschied der Quadrate seiner Abstände von zwei gegebenen Puncten M, m gleich ist einer gegebenen Gröfse u^2, eine gerade Linie PG ist, welche auf derjenigen (Mm), die die gegebenen Puncte verbindet, senkrecht steht."

Bezeichnet man den Abstand der gegebenen Puncte Mm von einander durch a: so ist

$$MG+mG=a \text{ und } MG^2-mG^2=u^2.$$

Daraus folgt:

$$MG=\frac{a^2+u^2}{2a} \text{ und } mG=\frac{a^2-u^2}{2a}.$$

2.

In den Lehrbüchern der Geometrie findet man folgenden Satz bewiesen:

„Werden aus einem, in der Ebene eines Kreises M, (Fig. 9.) willkürlich angenommenen Puncte P, gerade Linien PAB; PCD .... gezogen, die den Kreis schneiden: so ist das Product (Rechteck) aus den Abständen des Puncts von den Durchschnittspuncten der schneidenden Linien eine beständige Gröfse; d. h. es ist

$$PA\times PB=PC\times PD=\ldots\ldots\text{"}$$

Dieses Product, für einen bestimmten Punct, in Bezug auf einen gegebenen Kreis, soll

„Potenz des Puncts in Bezug auf den Kreis,"

oder auch umgekehrt:

„Potenz des Kreises in Bezug auf den Punct *)" heifsen.

Ferner wollen wir sagen: Die Potenz eines Puncts, in Bezug auf einen Kreis, sei äufserlich oder innerlich, je nachdem der Punct aufserhalb oder innerhalb des Kreises liegt.

Liegt der Punct P aufserhalb des Kreises M, (Fig. 9.): so ist seine Potenz gleich dem Quadrat der, aus ihm an den Kreis gelegten, Tangente PT. Die Potenz eines innerhalb des Kreises M liegenden Puncts Q (Fig. 10.) ist gleich dem Quadrat der halben kleinsten Sehne QC, durch den gegebenen Punct. Bezeichnet man den Halbmesser MT, MC des Kreises M (Fig. 9, 10.) durch

*) Die Alten nannten den constanten Inhalt des zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten beschriebenen Parallelogramms, „Potenz der Hyperbel."

R, so ist, vermöge der rechtwinkligen Dreiecke MTP, MQC, die Potenz des aufserhalb des Kreises liegenden Puncts P,

$$PT^2 = PM^2 - R^2,$$

und die Potenz des innerhalb des Kreises liegenden Puncts Q,

$$QC^2 = R^2 - MQ^2.$$

Hieraus folgt, dafs Puncte, welche gleich weit vom Mittelpunct eines Kreises entfernt sind, in Bezug auf ihn gleiche Potenzen haben. Fällt ein Punct in die Peripherie eines Kreises, so ist seine Potenz $= 0$; und umgekehrt, jeder Punct, dessen Potenz in Bezug auf einen gegebenen Kreis $= 0$ ist, liegt in der Peripherie des Kreises.

3.

Wenn M, m (Fig. 8.) die Mittelpuncte zweier Kreise M, m sind, deren Radien durch R, r bezeichnet werden mögen, und P ist ein Punct, welcher zu beiden Kreisen gleiche und gleichartige, d. h. in Bezug auf beide Kreise zugleich äufserliche oder zugleich innerliche Potenzen hat, so ist entweder (2.):

$$\text{a)}\quad MP^2 - R^2 = mP^2 - r^2$$

oder

$$\text{b)}\quad R^2 - MP^2 = r^2 - mP^2.$$

Aus Beidem folgt:

$$MP^2 - mP^2 = R^2 - r^2,$$

d. h.: „Der Unterschied der Quadrate der Abstände des Puncts P ist unter der vorausgesetzten Bedingung eine unveränderliche Gröfse $(R^2 - r^2)$, nemlich gleich dem Unterschied der Quadrate der Radien der gegebenen Kreise M, m."

Hieraus folgt nach (1.):

„Dafs der Ort eines Puncts P, welcher zu zwei gegebenen Kreisen M, m gleichartige und gleiche Potenz hat, eine gerade Linie PG ist, welche auf der Axe Mm der Kreise senkrecht steht."

Wegen dieser Eigenschaft der geraden Linie PG soll dieselbe fortan:

„Linie der gleichen Potenzen der Kreise M, m" heifsen.

Aus dem Obigen folgt noch als Zusätze:

„Dafs Erstlich die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise, und

„Zweitens die Linie, welche zwei Kreise in einem und demselben Punct berührt, zugleich die Linie ihrer gleichen Potenzen ist."

Da nach (2.) die Potenz eines aufserhalb des Kreises liegenden Puncts gleich ist dem Quadrat der Tangente, aus dem Puncte an den Kreis, so folgt ferner:

„Daſs der geometrische Ort eines Puncts P, aus welchem die Tangenten an zwei gegebene Kreise M, m einander gleich sind, eine auf der Axe Mm der Kreise senkrecht stehende gerade Linie PG ist."

Beschreibt man mit einer der vier Tangenten, aus dem Punct P an die beiden gegebenen Kreise einen Kreis P, so schneidet derselbe die beiden gegebenen Kreise rechtwinklig, und es folgt ferner:

„Daſs der geometrische Ort des Mittelpuncts P eines Kreises P, welcher zwei gegebene Kreise M, m rechtwinklig schneidet, eine gerade Linie PG ist, welche auf der Axe Mm der gegebenen Kreise senkrecht steht."

4.

Es seien M_1, M_2, M_3 (Fig. 11.) die Mittelpuncte dreier, der Gröſse und Lage nach gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3. Zu je zwei der gegebenen Kreise gehört nach (3.) eine Linie der gleichen Potenzen. Wir wollen diese drei Linien, mittelst der den Kreisen zukommenden Zahlen, und zwar durch $l(12)$, $l(13)$, $l(23)$ bezeichnen, d. h. $l(12)$ bezeichnet die Linie der gleichen Potenzen der beiden gegebenen Kreise M_1, M_2, u. s. w.

Derjenige Punct, in welchem sich z. B. die beiden Linien $l(12)$, $l(13)$ schneiden, und welchen wir durch $p(123)$ bezeichnen wollen, hat, vermöge der ersten Linie $l(12)$, zu den beiden Kreisen M_1, M_2, und vermöge der andern Linie $l(13)$, zu den beiden Kreisen M_1, M_3 gleiche Potenzen; mithin hat er zu allen drei gegebenen Kreisen M_1, M_2, M_3 gleiche Potenzen, und folglich geht auch die dritte Linie $l(23)$ durch den genannten Punct $p(123)$. Daraus folgt nachstehender Satz:

„Die drei Linien der gleichen Potenzen, welche zu drei gegebenen Kreisen, paarweise genommen, gehören, schneiden einander in einem und demselben Punct $p(123)$." Wir wollen diesen Punct $p(123)$ hinfort

„Punct der gleichen Potenzen der drei Kreise M_1, M_2, M_3" nennen.

Liegt der Punct $p(123)$ auſserhalb der drei gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3, so folgt aus (3.), daſs die aus ihm an die Kreise gelegten Tangenten einander gleich sind, und daſs er in diesem Fall der Mittelpunct eines Kreises ist, welcher die drei gegebenen Kreise rechtwinklig schneidet.

Da nach (3.) die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise zugleich die Linie der gleichen Potenzen derselben ist, so folgt ferner:

„Daſs wenn drei beliebige Kreise M_1, M_2, M_3 (Fig. 12.) einander schneiden, daſs dann die drei Sehnen AB, CD, EF, welche dieselben paarweise mit ein-

ander gemein haben, sich in einem und demselben Puncte $p(123)$, nemlich im Puncte der gleichen Potenzen der drei Kreise schneiden." Und:

„dafs wenn drei beliebige Kreise einander berühren, dafs alsdann die, in den drei Berührungspuncten an die Kreise gelegten Tangenten, in einem und demselben Punct zusammentreffen."

Hieraus folgen ferner nachstehende Sätze:

„Werden zwei, der Gröfse und Lage nach gegebene Kreise M_1, M_2 (Fig. 13.) von irgend einem willkürlichen Kreise M_3 geschnitten, so ist der geometrische Ort des Durchschnittspuncts P der beiden Sehnen EF, CD, welche der letztere Kreis mit jenen beiden gemein hat, eine gerade Linie, welche auf der Axe $M_1 M_2$ der gegebenen Kreise senkrecht steht."

Nemlich der Ort des genannten Durchschnittspuncts P ist die Linie der gleichen Potenzen $l(12)$ der beiden gegebenen Kreise. Man sieht leicht, wie sich hieraus die Linie der gleichen Potenzen $l(12)$ zweier gegebenen Kreise M_1, M_2 finden läfst. Ferner:

„Werden zwei der Lage und Gröfse nach gegebene Kreise M_1, M_2 (Fig. 14.) von irgend einem willkürlichen Kreise M_3 berührt, und man legt in den beiden Berührungspuncten A, B Tangenten AP, BP an die Kreise: so ist der geometrische Ort des Durchschnittspuncts P der beiden Tangenten, eine auf der Axe $M_1 M_2$ der gegebenen Kreise senkrecht stehende grade Linie PG, nemlich die Linie der gleichen Potenzen $l(14)$ der beiden gegebenen Kreise M_1, M_2."

Durch Umkehrung dieses letzten Satzes folgen nachstehende Sätze:

„Legt man aus einem, in der Linie der gleichen Potenzen (PG.) zweier gegebenen Kreise M_1, M_2 (Fig. 14.) willkürlich angenommenen Puncte P, an jeden Kreis eine Tangente: so berühren diese Tangenten die Kreise in zwei Puncten, in welchen sie auch von einem bestimmten Kreise berührt werden können." Legt man also aus dem Puncte P die vier Tangenten PA, PB, PC, PD, welche die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 in den Puncten A, B, C, D berühren: so können die Kreise M_1, M_2 von einem bestimmten Kreise (M_3) in den Puncten A, B, von einem andern Kreise in den Puncten C, D, von einem dritten Kreise in den Puncten A, C, und endlich von einem vierten Kreise in den Puncten B, D berührt werden. Oder was dasselbe ist:

„Jeder Kreis P (z. B. $ABCD$), welcher zwei gegebene Kreise M_1, M_2 rechtwinklich schneidet, schneidet sie in vier solchen Puncten A, B, C, D in welchen dieselben von vier bestimmten Kreisen berührt werden können; d. h. jeder der vier Kreise berührt die gegebenen in zwei der genannten vier Durchschnittspuncte."

5.

Stellt man sich alle möglichen Kreise, P_1, P_2, P_3 .... vor, von denen jeder zwei gegebene Kreise M_1, M_2 (Fig. 15.) rechtwinklich schneidet: so folgt nach (3), dafs jede zwei derselben die Axe $M_1 M_2$ der letztern zur Linie der gleichen Potenzen haben, und folglich haben alle Kreise P_1, P_2, P_3 .... zusammen die Axe M_1 M_2 zur Linie der gleichen Potenzen. Das heifst (3): der geometrische Ort des Mittelpunctes eines Kreises (M_1, M_2, M_3 ....), welcher alle Kreise P_1, P_2, P_3 .... rechtwinklig schneidet, ist die Axe M_1 M_2 der gegebenen Kreise M_1, M_2.

Die beiden Gruppen von Kreisen P_1, P_2, P_3 ..... und M_1, M_2, M_3 ..... stehen demnach in einer solchen gegenseitigen Beziehung, dafs jeder Kreis der einen Schaar, jeden Kreis der andern Schaar rechtwinklig schneidet, und dafs also die Kreise der einen Schaar die Axe der andern zur Linie der gleichen Potenzen haben.

Da die Kreise P_1, P_2, P_3 ..... die Axe M_1, M_2, M_3 ..... zur Linie der gleichen Potenzen haben, so folgt, dafs wenn irgend zwei derselben einander schneiden, dafs dann alle zusammen einander in denselben zwei Puncten A, B schneiden, und dafs ihre gemeinschaftliche Sehne AB die genannte Axe M_1, M_2, M_3 .... ist. Wenn aber die Kreise der einen Schaar P_1, P_2, P_3 ..... einander schneiden, so kann von den Kreisen der andern Schaar M_1 M_2 M_3 ..... keiner den andern schneiden. Also:

„Alle Kreise P_1, P_2, P_3 ......, von denen jeder, zwei gegebene aufser oder ineinander liegende Kreise M_1, M_2 oder M_1, M_3 rechtwinklig schneidet: schneiden sich in zwei bestimmten Puncten A, B." Und:

„Von allen Kreisen M_1, M_2 M_3 .... welche zwei gegebene, sich schneidende Kreise P_1, P_2 rechtwinklig schneiden: kann keiner den andern schneiden."

Da sich nach (4) die Sehnen, welche der Kreis M_1 mit irgend zwei Kreisen der Schaar P_1, P_2, P_3 ..... gemein hat, mit der Axe M_1 M_2 (als Linie der gleichen Potenzen der letztern Kreise P_1, P_2....) in einem Punct schneiden: so folgt, dafs sich alle Sehnen, DC, EF ......, welche der Kreis M_1 mit den Kreisen P_1, P_2, P_3 .... einzeln gemein hat, in einem bestimmten Punct M der Axe M_1 M_2 schneiden. Aus gleichen Gründen folgt, dafs sich alle Sehnen DC, HI, ..., welche der Kreis P_1 mit den Kreisen M_1, M_2, M_3 ...., einzeln genommen, gemein hat, in einem bestimmten Punct P der Axe P_1 P_2 schneiden. Bemerkt man noch, dafs, da die Kreise P_1, P_2, P_3 ...... den Kreis M_1 rechtwinklig schneiden, die nach den Durchschnittspuncten gezogenen Radien

P_1C,

P_1C, P_1D, P_1E, ... den Kreis M_1 berühren; und dafs eben so die Radien M_1C, M_1D; MH, ... den Kreis P_1 berühren: so folgen aus dem Obigen nachstehende bekannte Sätze:

„Legt man aus beliebigen Puncten M_1, M_2 .... (Fig. 16.) einer gegebenen graden Linie M_1M_2, welche einen gegebenen Kreis P_1 schneidet, Tangenten an diesen Kreis: so gehen die Sehnen CD, EF ....., welche die Berührungspuncte der zusammen gehörigen Tangenten verbinden, durch einen und denselben aufserhalb des Kreises liegenden Punct P." Und:

„Legt man aus beliebigen Puncten P_1, P_2 .... (Fig. 17.) einer geraden Linie P_1P_2, aus jedem zwei Tangenten an einen gegebenen Kreis M_1, welcher die genannte Linie nicht schneidet: so gehen die Sehnen CD, EF ...., welche die Berührungspuncte der zusammen gehörigen Tangenten verbinden, durch einen bestimmten, innerhalb des Kreises liegenden Punct M."

Und umgekehrt:

„Zieht man aus einem in der Ebene eines gegebenen Kreises (P_1 Fig. 16. oder M_1 Fig. 17.) beliebig angenommenen Punct P oder M eine willkürliche gerade Linie (PDC oder CMD), die den Kreis schneidet, und legt in den Durchschnittspuncten (C, D) Tangenten an den Kreis: so ist der geometrische Ort des Durchschnittspuncts (M_1 oder P_1) dieser beiden Tangenten, eine gerade Linie (M_1M_2 .... oder P_1P_2 ....), welche auf dem, durch den angenommenen Punct (P oder M) gehenden Durchmesser (PP_1 oder MM_1) senkrecht steht."

Die gegenseitige Lage und Bestimmung des angenommenen Puncts P oder M und der Ortslinie M_1M_2 oder P_1P_2, in Bezug auf den gegebenen Kreis (P_1 oder M_1) ist leicht zu sehen. Nemlich die aus den gegebenen Punct P, (Fig. 16.), an den gegebenen Kreis P_1 gelegten Tangenten PA, PB berühren den Kreis nothwendig in denjenigen Puncten A, B, in welchen er von der Ortslinie M_1M_2 geschnitten wird, u. s. w.

Bekanntlich finden diese Sätze auf ähnliche Weise bei jeder Curve zweiten Grades Statt. Auch finden analoge Sätze bei allen Flächen zweiten Grades Statt.

§. II. Von den Aehnlichkeitspuncten und Aehnlichkeitslinien bei Kreisen, die in einerlei Ebene liegen.

6.

Sind irgend drei Puncte M, m, A, (Fig. 18.), die in einer geraden Linie liegen, gegeben, und man zieht durch den Punct A eine willkürliche gerade

Linie AnN, und aus den Puncten M, m zwei beliebige Parallelen MN, mn nach jener Linie AnN, so ist:

$$MN : mn = MA : mA.$$

„Zieht man umgekehrt aus den Puncten M, m irgend zwei Parallelen MN_1, mn_1, von der Gröfse, dafs $MN_1 : mn_1 = MA : mA$; so liegen ihre Endpuncte N_1, n_1 mit dem Puncte A in einer geraden Linie."

Aehnliches findet Statt, wenn man statt des Puncts A einen Punct I nimmt, welcher zwischen den beiden Puncten M, m (Fig. 19.) liegt; nur liegen dann die Parallelen MN, mn oder MN_1, mn_1 auf verschiedenen Seiten der gegebenen graden Linie MIm.

7.

Beschreibt man um die gegebenen Puncte M, m (Fig. 18, 19.), mit zwei bestimmten Halbmessern MN, mn zwei Kreise M, m: so folgen aus (6.) unmittelbar nachstehende Sätze:

„In zwei beliebigen Kreisen M, m, (Fig. 18.), liegen die Endpuncte N, n zweier beliebigen parallelen Radien MN, mn, die sich an einerlei Seite der Axe Mm befinden, mit einem und demselben bestimmten Punct A in einer geraden Linie." Und:

„In zwei beliebigen Kreisen M, m (Fig. 19.), liegen die Endpuncte N, n zweier beliebigen parallelen Radien MN, mn, welche sich auf entgegengesetzten Seiten der Axe befinden, mit einem und demselben bestimmten Punct I in gerader Linie." Ferner:

„Zieht man nach irgend einer geraden Linie An_1N_1 oder N_1In_1 (Fig. 20.), welche durch einen jener bestimmten Puncte A oder I geht, aus den Mittelpuncten M, m zwei beliebige Parallelen MN_1, mn_1: so verhalten sich dieselben wie die Radien der Kreise, d. h.: es ist $MN_1 : mn_1 = MN : mn$." Und umgekehrt:

„Zieht man aus den Mittelpuncten Mm der gegebenen Kreise zwei beliebige Parallelen MN_1, mn_1, welche sich verhalten wie die Radien der Kreise: so liegen die Endpuncte N_1, n_1 derselben entweder mit A oder mit I in gerader Linie, je nachdem die Parallelen auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten der Axe Mm gezogen sind."

Die beiden Puncte A, I, welche zu zwei gegebenen Kreisen M, m gehören, wollen wir

„Aehnlichkeitspuncte der beiden Kreise M, m" nennen,

und zwar A äufsern und I innern Aehnlichkeitspunct. Ferner soll jede

solche gerade Linie An_1N_1, n_1IN_1, welche durch einen der beiden Aehnlichkeitspuncte A oder I geht:

„Aehnlichkeitslinie der beiden Kreise M, m,"

und zwar ebenfalls „äufsere oder innere" heifsen, je nachdem sie durch den äufseren oder inneren Aehnlichkeitspunct geht.

Bezeichnet man die Radien MN, mn der Kreise M, m durch R, r: so hat man nach (6) für die Lage der beiden Aehnlichkeitspuncte A, I folgende Gleichungen:

$$R : r = MA : mA = MI : mI.$$

Hieraus folgt, dafs wenn z. B. $R = MA$, dafs alsdann zugleich $r = mA$ ist, und folglich die beiden Kreise einander in dem Punct A innerlich berühren; oder wenn $R = MI$ ist, dafs dann zugleich auch $r = mI$ ist, und dafs die gegebenen Kreise einander nothwendig in dem Punct I äufserlich berühren. Durch Umkehrung folgt:

„Dafs wenn zwei beliebige Kreise M, m einander äufserlich berühren: so ist der Berührungspunct zugleich ihr innerer Aehnlichkeitspunct (I)." Und:

„Wenn zwei beliebige Kreise (M, m) einander innerlich berühren: so ist der Berührungspunct zugleich ihr äufserer Aehnlichkeitspunct (A)."

Da die Endpuncte paralleler Radien der beiden Kreise M, m mit einem der beiden Aehnlichkeitspuncte A oder I in gerader Linie liegen: so folgt ferner, durch Umkehrung, dafs jede gerade Linie, welche durch einen der beiden Aehnlichkeitspuncte geht und den einen Kreis schneidet, nothwendiger Weise auch den andern Kreis schneidet, und dafs die nach den Durchschnittspuncten gezogenen Radien der beiden Kreise paarweise parallel sind. Berührt demnach die genannte Linie den einen Kreis, so berührt sie zugleich auch den andern. Daher folgt ferner:

„Liegen zwei gegebene Kreise M, m (Fig. 21.) aufser einander: so schneiden sich die beiden äufseren gemeinschaftlichen Tangenten Bb und B_1b_1 in dem äufsern, A, und die beiden innern gemeinschaftlichen Tangenten Cc und C_1c_1 in dem innern Aehnlichkeitspunct I."

Hierdurch kann man leicht an zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente ziehen.

Endlich ist zu bemerken, dafs, wie aus der obigen Gleichung folgt, bei zwei in einander liegenden Kreisen, die Aehnlichkeitspuncte innerhalb beider Kreise liegen.

8.

Es seien M_1, M_2, M_3 (Fig. 22.) die Mittelpuncte dreier beliebigen, der Gröfse und Lage nach gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3. Nach (7) gehören zu je zweien

dieser drei Kreise zwei Aehnlichkeitspuncte. Es seien A_3 und I_3, A_2 und I_2, A_1 und I_1 die Aehnlichkeitspuncte der Kreispaare $M_1 M_2$, $M_1 M_3$, $M_2 M_3$.

Da die gerade Linie $A_3 A_2$, welche durch die Aehnlichkeitspuncte A_3 und A_2 geht, vermöge des erstern, zu den Kreisen M_1, M_2, und vermöge des letztern, zu den Kreisen M_1, M_3 eine äuſsere Aehnlichkeitslinie ist (7.): so ist sie folglich auch eine äuſsere Aehnlichkeitslinie zu den Kreisen M_2, M_3, und geht daher durch den äuſsern Aehnlichkeitspunct A_1 derselben, d. h. die drei Aehnlichkeitspuncte A_3, A_2, A_1 liegen in einer geraden Linie. Auf ganz ähnliche Weise schlieſst man, daſs sowohl die drei Aehnlichkeitspuncte A_3, I_1, I_2, als auch A_2, I_1, I_3, so wie auch A_1, I_2, I_3 in geraden Linien liegen. Wir finden daher folgenden Satz:

„Von den sechs Aehnlichkeitspuncten, welche zu drei beliebigen gegebenen Kreisen, paarweise genommen, gehören, liegen vier mal drei in einer geraden Linie, nämlich es liegen die drei äuſseren, und jeder äuſsere mit den beiden nicht zugehörigen inneren Aehnlichkeitspuncten in einer geraden Linie."

Diese genannten vier geraden Linien, von welchen jede durch drei Aehnlichkeitspuncte der gegebenen Kreise geht, und mithin zu allen drei Kreisen ähnliche Lage hat, wollen wir

„Aehnlichkeitslinien der drei Kreise M_1, M_2, M_3," nennen,

und zwar die Linie $A_3 A_2 A_1$ äuſsere, und die drei Linien $A_3 I_1 I_2$, $A_2 I_1 I_3$, $A_1 I_2 I_3$ innere Aehnlichkeitslinien.

Da die beiden äuſseren gemeinschaftlichen Tangenten zweier auſser einander liegender Kreise, sich im äuſseren, dagegen die beiden innern gemeinschaftlichen Tangenten sich im inneren Aehnlichkeitspunct der Kreise schneiden (7, Fig. 21): so folgt aus dem vorigen Satz unmittelbar der nachstehende:

„Legt man an je zwei von drei, der Gröſse und Lage nach gegebenen, auſser einander liegenden Kreisen M_1, M_2, M_3 (Fig. 23), die beiden Paare gemeinschaftliche Tangenten (d. h. die beiden äuſseren und die beiden innern): so liegen sowohl die drei Durchschnittspuncte (A_3, A_2, A_1) der drei Paare äuſsere Tangenten *), als auch der Durchschnittspunct jedes Paars äuſsere Tangenten mit den zwei Durchschnittspuncten der beiden nicht zugehörigen Paare innere Tangenten (d. i. $A_3 I_1 I_2$, $A_2 I_1 I_3$, $A_1 I_2 I_3$) in einer geraden Linie."

Da nach (7) der Berührungspunct zweier Kreise zugleich ein Aehnlichkeitspunct derselben ist, so folgt daraus und aus dem obigen Satz ferner:

---

*) Diesen ersten Fall beweist M. Hirsch im zweiten Bande, Seite 368 seiner „Sammlung geometrischer Sätze etc."

„Wenn irgend ein beliebiger Kreis M_3 zwei gegebene Kreise M_1, M_2 berührt, so liegen die beiden Berührungspuncte mit einem der beiden Aehnlichkeitspuncte der gegebenen Kreise in einer geraden Linie."

Denn da die Puncte, in welchen der Kreis M_3 die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 berührt, zugleich zwei von den vier Aehnlichkeitspuncten A_1, I_1, A_2, I_2 sind, welche jener Kreis mit diesen beiden gemein hat: so sind die genannten Berührungspuncte zugleich entweder

1) die beiden Aehnlichkeitspuncte A_1 und A_2,
oder 2) - - - - I_1 - I_2,
oder 3) - - - - A_1 - I_2,
oder 4) - - - - I_1 - A_2,

und liegen folglich in den beiden ersten Fällen (1, 2.) mit dem äufsern A_3, und in den beiden letzten Fällen (3, 4.) mit dem innern Aehnlichkeitspunct I_3 der gegebenen Kreise M_1, M_2 in einer geraden Linie. Man kann daher den vorliegenden Satz auch bestimmter, wie folgt, aussprechen:

„Berührt irgend ein Kreis M_3 zwei der Gröfse und Lage nach gegebene Kreise M_1, M_2 gleichartig (d. h. entweder beide innerlich (1.) oder beide äufserlich (2.)): so liegen die beiden Berührungspuncte mit dem äufseren A_3, berührt er aber dieselben ungleichartig (d. h. den einen äufserlich und den andern innerlich (3, 4.)): so liegen die beiden Berührungspuncte mit dem innern Aehnlichkeitspunct (I_3) der gegebenen Kreise in einer geraden Linie."

§. III. Von der gemeinschaftlichen Potenz bei Kreisen, die in einerlei Ebene liegen.

9.

Nach (§. I. Nr. 4.) können zwei gegebene Kreise M_1, M_2 in denselben Puncten A, B, C, D, in welchen sie von irgend einem Kreise P rechtwinklig geschnitten werden, zugleich von vier bestimmten Kreisen berührt werden. Nemlich, schneidet z. B. der Kreis P (Fig. 24.) die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 in den Puncten A, D, C, B rechtwinklig: so können dieselben von einem bestimmten Kreise in den Puncten A, B, und von einem zweiten Kreise in den Puncten D, C gleichartig, dagegen von einem dritten Kreise in den Puncten A, C, und endlich von einem vierten Kreise in den Puncten D, B ungleichartig berührt werden.

Nach (§. II. Nr. 8.) liegen aber die beiden Berührungspuncte, in welchen irgend ein Kreis zwei gegebene Kreise M_1, M_2 gleichartig berührt, mit dem

äufsern A_3; und dagegen die Berührungspuncte, in welchen irgend ein Kreis die gegebenen ungleichartig berührt, mit dem innern Aehnlichkeitspunct (I_3) derselben in einer geraden Linie. Folglich liegen die vier genannten Puncte A, D, C, B, in welchen irgend ein Kreis P zwei gegebene Kreise M_1, M_2 rechtwinklig schneidet, sowohl paarweise mit dem äufsern (A_3) als auch mit dem innern Aehnlichkeitspunct (I_3) der letztern Kreise in geraden Linien. Das heifst: jede drei Puncte A_3AB, A_3DC, AI_3C, DI_3B liegen in einer geraden Linie. Wir finden also den folgenden Satz:

„Schneidet irgend ein Kreis P zwei gegebene Kreise M_1, M_2 rechtwinklig: so liegen die vier Durchschnittspuncte A, D, C, B, paarweise, sowohl mit dem äufsern A_3 als auch mit dem innern Aehnlichkeitspunct I_3 der gegebenen Kreise in geraden Linien." Oder, was dasselbe ist:

„Legt man aus irgend einem Punct P der Linie der gleichen Potenzen (PG) zweier gegebenen Kreise M_1, M_2, vier Tangenten PA_3, PD, PC, PB an die letztern, verbindet die vier Berührungspuncte A_3, B, C, D derselben paarweise durch sechs gerade Linien: so schneiden sich zwei dieser Linien BA und CD in einem constanten Punct A_3 (äufserem Aehnlichkeitspunct), zwei andere AC und BD in einem constanten Punct I_3 (innerem Aehnlichkeitspunct), dagegen ist der Ort des Durchschnittspuncts P_1 des dritten Linienpaars DA und CB die genannte Linie PG selbst (§. I. Nr. 4.), und endlich geht jede der beiden letztern Linien DA, CB durch einen constanten Punct (Q_1, Q_2) (§. I. Nr. 5.)" *).

10.

Da alle möglichen Kreise P, welche zwei gegebene Kreise M_1, M_2 rechtwinklig schneiden, die Axe A_3 M_1 I_3 M_2 der letztern Kreise zusammen zur Linie der gleichen Potenzen haben (§. I. Nr. 5.); und da ferner, wie so eben erwiesen (9.), die vier Puncte, in welchen ein solcher Kreis P die beiden gegebenen Kreise schneidet, paarweise, sowohl mit dem äufsern als mit dem innern Aehnlichkeitspunct der letztern in geraden Linien liegen: so folgt, dafs sowohl $A_3A \times A_3B = A_3D \times A_3C$, als $I_3A \times I_3C = I_3D \times I_3B$ constante Producte sind, wie auch der schneidende Kreis, unter der gegebenen Bedingung, seine Gröfse und Lage ändern mag. Denn das erste Product ist gleich

*) Dieser Satz ist ein spezieller Fall des allgemeinen Satzes Seite 46. Nr. VII. des ersten Hefts dieses Journals. Die gegenwärtige Linie PG entspricht der dortigen Linie L, und die dortige Linie l ist im gegenwärtigen Falle unendlich entfernt.

der Potenz des Puncts A_3 in Bezug auf den Kreis P, und das letztere Product ist gleich der Potenz des Puncts I_3, in Bezug auf denselben Kreis P; folglich sind beide Producte constant, weil, wie schon bemerkt, alle Kreise P die Linie $A_3 I_3$ zur Linie der gleichen Potenzen haben.

Bezieht man diese Eigenschaft auf die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2, so entspringt daraus folgender Satz:

„Zieht man aus einem Aehnlichkeitspunct A_3 oder I_3 zweier gegebenen Kreise M_1, M_2 irgend eine gerade Linie A_3AB oder AI_3C, welche die Kreise schneidet: so ist das Product $A_3A \times A_3B$ oder $AI_3 \times CI_3$ aus den Abständen des Aehnlichkeitspuncts von zwei Durchschnittspuncten A und B oder A und C der genannten Linie und der beiden Kreise, deren zugehörigen Radien M_1A und M_2B oder M_1A und M_2C nicht parallel sind, von constanter Gröſse."

Dieses constante Product wollen wir

„gemeinschaftliche Potenz der beiden gegebenen Kreise $M_1 M_2$, in Bezug auf ihren Aehnlichkeitspunct A_3 oder I_3,"

nennen.

11.

Es ist aber die Potenz des Puncts A_3, in Bezug auf den Kreis P, wenn die gegebenen Kreise M_1, M_2 auſser einander liegen, wie (Fig. 24.), gleich dem Quadrat der aus dem Punct an den Kreis P gelegten Tangenten A_3E, folglich ist diese Tangente, für jeden Kreis P, von unveränderlicher Gröſse. Beschreibt man also mit derselben um den Punct A_3 einen Kreis A_3, so schneidet derselbe jeden Kreis P rechtwinklig. Dagegen ist die Potenz des Puncts I_3, welcher innerhalb des Kreises P liegt, gleich dem Quadrat der halben durch denselben gehenden kleinsten Sehne des Kreises P (§. I. Nr. 2.), und mithin hat diese halbe Sehne für jeden Kreis P einerlei Gröſse, oder, ein mit derselben um den Punct I_3 beschriebener Kreis I_3, wird von jedem Kreise P im Durchmesser geschnitten, d. h. die Puncte, in welchen irgend ein Kreis P den Kreis I_3 schneidet, sind zugleich die Endpuncte eines Durchmessers des letztern Kreises.

Diese beiden genannten, um die Aehnlichkeitspuncte A_3 und I_3 beschriebenen Kreise A_3, I_3, deren Radien, in's Quadrat erhoben, gleich sind den gemeinschaftlichen Potenzen der gegebenen Kreise M_1, M_2, in Bezug auf die Puncte A_3, I_3, sollen

„Potenzkreise der beiden gegebenen Kreise M_1, M_2" heiſsen, und zwar der Kreis A_3 äuſserer und der Kreis I_3 innerer Potenzkreis.

Es ist noch zu bemerken, daſs im Fall die gegebenen Kreise in einander liegen (wie Fig. 14.), alsdann das Umgekehrte Statt findet, nemlich, daſs in diesem Fall der innere Potenzkreis I_s jeden Kreis P rechtwinklig schneidet, der äuſsere Potenzkreis A_s aber von jedem Kreise P im Durchmesser geschnitten wird. Und wenn ferner die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 einander schneiden, so schneidet sowohl der äuſsere als der innere Potenzkreis jeden Kreis P rechtwinklig.

12.

Da die beiden Puncte A und B oder D und C, Fig. 24., für welche nach (10.) das Product $A_sA \times A_sB = A_sD \times A_sC$ constant ist, oder welche in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct A_s die Potenz bestimmen, auf einerlei Seite des letztern Puncts (A_s) liegen: so soll dieses heiſsen: „die dem Aehnlichkeitspunct A_s zugehörige Potenz sei äuſserlich; und wenn die Puncte A und C oder D und B, welche in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct I_s die gemeinschaftliche Potenz der gegebenen Kreise $M_1 M_2$ bestimmen, auf verschiedenen Seiten des Puncts I_s liegen, so wollen wir sagen: die zum Aehnlichkeitspunct I_s gehörige gemeinschaftliche Potenz der gegebenen Kreise sei innerlich."

Ueberhaupt wollen wir von irgend zwei Puncten X und Y, welche mit dem Punct A_s in gerader Linie und auf einerlei Seite desselben liegen und zwar in solchen Abständen von demselben, daſs das Product $A_sX \times A_sY$ gleich ist der zugehörigen (zu A_s) gemeinschaftlichen Potenz der gegebenen Kreise, sagen: „sie seien potenzhaltend in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct A_s." Eben so sollen zwei beliebige Puncte X und Y, welche mit den Punct I_s in gerader Linie, aber auf entgegengesetzten Seiten desselben liegen, und zwar in solchen Abständen von demselben, daſs das Product $I_sX \times I_sY$ gleich ist der zugehörigen gemeinschaftlichen Potenz: „potenzhaltende Puncte in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct I_s," heiſsen.

Endlich wollen wir von jedem beliebigen Kreise K, dessen Potenz in Bezug auf einen der beiden Aehnlichkeitspuncte A_s oder I_s gleichartig (äuſserlich oder innerlich) und gleich ist der zu demselben Punct gehörigen gemeinschaftlichen Potenz der gegebenen Kreise M_1, M_2, sagen: „er sei pozenzhaltend in Bezug auf den jedesmaligen Aehnlichkeitspunct."

Alsdann ist klar, daſs jeder Kreis, welcher durch irgend zwei potenzhaltende Puncte geht, ebenfalls potenzhaltend ist; ferner: daſs jeder Kreis K, welcher in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct A_s potenzhaltend ist, den Po-

tenz-

tenzkreis A'_3 rechtwinklig, und daſs jeder Kreis K, welcher in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct I_3 potenzhaltend ist, den Potenzkreis I_3 im Durchmesser schneidet.

Da nun derjenige Kreis, welcher die beiden gegebenen Kreise in den Puncten A und B (oder D und C) gleichartig berührt (9.), vermöge dieser Puncte, in Bezug auf den äuſseren Aehnlichkeitspunct A_3, potenzhaltend ist; und da eben so derjenige Kreis, welcher die gegebenen Kreise in den Puncten A und C ungleichartig berührt, vermöge dieser Puncte, in Bezug auf den innern Aehnlichkeitspunct I_3, potenzhaltend ist, so folgt nachstehender Satz:

„Jeder Kreis K, welcher zwei gegebene auſser einander liegende Kreise M_1, M_2 gleichartig (d. i. entweder beide äuſserlich oder beide einschlieſsend) berührt: ist in Bezug auf den äuſsern Aehnlichkeitspunct A_3 derselben, potenzhaltend, und schneidet den äuſsern Potenzkreis A_3 derselben rechtwinklig." Und:

„Jeder Kreis K, welcher zwei gegebene, auſser einander liegende Kreise M_1, M_2 ungleichartig berührt: ist in Bezug auf den innern Aehnlichkeitspunct I_3 derselben potenzhaltend, und schneidet den innern Potenzkreis I_3 derselben im Durchmesser."

Aehnliches findet Statt, wenn die gegebenen Kreise, anstatt auſser einander, entweder in einander liegen oder einander schneiden.

13.

Da nach (12.) jeder Kreis K, welcher zwei gegebene Kreise M_1, M_2 gleichartig berührt, in Bezug auf den äuſseren Aehnlichkeitspunct A_3, und jeder Kreis K, welcher dieselben ungleichartig berührt, in Bezug auf den inneren Aehnlichkeitspunct I_3 derselben potenzhaltend ist, so folgen nachstehende Sätze:

„Alle Kreise, von denen jeder die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 gleichartig berührt, haben den äuſseren Aehnlichkeitspunct A_3 der letztern Kreise gemeinschaftlich zum Punct der gleichen Potenzen." Und:

„Alle Kreise, von denen jeder zwei gegebene Kreise M_1, M_2 ungleichartig berührt, haben den inneren Aehnlichkeitspunct der letzteren gemeinschaftlich zum Punct der gleichen Potenzen." Oder auch:

„Wenn von irgend zwei beliebigen Kreisen N_1, N_2 jeder zwei gegebene Kreise M_1, M_2 gleichartig berührt: so geht die Linie der gleichen Potenzen des erstern Kreispaars durch den äuſseren Aehnlichkeitspunct A_3 des letzteren." Und:

„Wenn von irgend zwei Kreisen, N_1, N_2, jeder zwei gegebene Kreise M_1, M_2 ungleichartig berührt: so geht die Linie der gleichen Potenzen des erstern Kreispaars durch den inneren Aehnlichkeitspunct des letzteren." Es folgt ferner:

„Wenn jeder der beiden Kreise M_1, M_2 mehrere Kreise N_1, N_2, N_3 ..... gleichartig berührt: so geht die Linie der gleichen Potenzen jener beiden Kreise durch den äufseren Aehnlichkeitspunct je zweier der letzteren, oder die Schaar Kreise N_1, N_2, N_3 ..... haben die genannte Linie zur gemeinschaftlichen Aehnlichkeitslinie." Oder überhaupt:

„Alle Kreise N_1, N_2, N_3 ..., von denen jeder zwei gegebene Kreise M_1, M_2 gleichartig berührt, haben die Linie der gleichen Potenzen $l(_{12})$ der letzteren zur gemeinsamen Aehnlichkeitslinie." Und:

„Alle Kreise N_1, N_2, N_3 ..., von denen jeder zwei gegebene Kreise M_1, M_2 ungleichartig berührt, haben die Linie der gleichen Potenzen der letzteren zur gemeinsamen Aehnlichkeitslinie."

Die weitere Entwickelung dieses Paragraphen, und einige Anwendungen der letztern Sätze, bleibt dieses Mal, aus Mangel an Raum, weg; wir werden sie im nächsten Hefte nachfolgen lassen.

---

§. IV. Verallgemeinerung und geometrische Lösung der Malfatti'schen Aufgabe.

Um die Fruchtbarkeit der in den Paragraphen (I, II, III) aufgestellten Sätze an einem dazu geeigneten Beispiele zu zeigen, fügen wir die geometrische Lösung und zugleich die Verallgemeinerung der Malfatti'schen Aufgabe *), jedoch ohne Beweis, hinzu:

14.

Aufgabe.

„In ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 25.), drei Kreise a, b, c zu beschreiben, die einander, und jeder zwei Seiten des Dreiecks berühren, d. h., so: dafs der Kreis a die Seiten AB und AC, der Kreis b die Seiten BA und BC, und der Kreis c die Seiten CA und CB berührt."

Auflösung.

1) Man halbire die Winkel des gegebenen Dreiecks durch die drei Linien AM, BM, CM; so treffen sich diese drei Linien bekanntlich in einem und demselben Puncte M.

---

*) Man sehe „Sammlung mathematischer Aufsätze von Crelle, erster Band, S. 133." Lehmus Lehrbuch der Geometrie, 2ter Band, und Gergonne annales des mathématiques, Tom. I. II.

2) In das Dreieck AMB beschreibe man den Kreis c_1, welcher die Seite AB in dem Puncte C_2 berührt, und in das Dreieck BMC beschreibe man den Kreis a_2.

3) Aus dem Puncte C_2 lege man an den Kreis a_1 die Tangente $C_2 A_2$, und beschreibe

4) in das Dreieck $C_2 A_2 B$ den Kreis b, so ist dieser einer der verlangten drei Kreise.

Die beiden übrigen gesuchten Kreise a, c werden auf ganz ähnliche Weise gefunden. Nemlich die genannte Tangente $C_2 A_2 B_2$ berührt nicht allein den Kreis a_1, sondern zugleich auch den in das Dreieck AMC beschriebenen Kreis b_1, so dafs also der in das Dreieck $C_2 B_2 A$ beschriebene Kreis a ebenfalls einer der gesuchten drei Kreise ist. Auf gleiche Weise kann ferner aus dem Puncte B_2, in welchem der Kreis b_1 die Seite AC berührt, eine Linie gezogen werden, welche nicht allein die beiden Kreise a_1 und c_1, sondern auch die beiden gesuchten Kreise a und c berührt; und eben so geht eine Linie durch den Punct A_2, in welchem der Kreis a_1 die Seite BC berührt, welche jeden der vier Kreise b_1, c_1, b, c berührt.

Da die beiden Kreise a und b einander berühren, und jeder derselben die Linie $C_2 A_2 B_2$ berührt: so ist leicht zu sehen, dafs sie dieselbe in einem und demselben Puncte berühren. Eben so berühren die beiden Kreise a und c die durch den Punct B_2 gehende genannte Linie in einem und demselben Puncte; und gleichermaafsen berühren die beiden Kreise b und c die durch den Punct A_2 gehende genannte Linie in einem und demselben Puncte. Daher treffen die drei genannten geraden Linien, welche durch die Puncte C_2, B_2, A_2 gehen, in einem und demselben bestimmten Punct zusammen (§. I. Nr. 4.).

Die Aufgabe läfst keineswegen blos eine Auflösung zu. Es können vielmehr die drei gesuchten Kreise auch aufserhalb des gegebenen Dreiecks liegen, und dessen verlängerte Seiten berühren, also z. B. über der Seite BC im Raume M_1, oder über der Seite CA im Raume M_2, oder über der Seite AB im Raume M_3. Halbirt man nemlich jeden der sechs Winkel (die inneren und die äufseren) des gegebenen Dreiecks, so schneiden sich von den Theilungslinien vier mal drei in einem und demselben Puncte. Dieses sind die vier Puncte M, M_1, M_2, M_3. Jeder dieser vier Puncte, z. B. der Punct M bildet mit den Eckpuncten des gegebenen Dreiecks ABC die drei Dreiecke AMB, BMC, CMA. Die drei Seiten eines jeden dieser Dreiecke können von vier bestimmten Kreisen berührt werden, so dafs also zu diesen drei Dreiecken zwölf bestimmte Kreise gehören.

unter welchen die oben genannten drei Kreise a_1, b_1, c_1 mit inbegriffen sind. Es scheinen, mittelst der genannten zwölf Kreise, nach Art der vorstehenden Auflösung, wenigstens acht verschiedene Auflösungen möglich zu sein. Und da ein Gleiches in Bezug auf jeden der drei übrigen Puncte M_1, M_2, M_3 Statt findet: so läfst die Aufgabe wenigstens 32 verschiedene Auflösungen zu, welche alle der obigen Auflösung ähnlich sind.

Unter diesen 32 Auflösungen sind die speziellen Fälle, wo zwei der drei gesuchten Kreise eine Seite des gegebenen Dreiecks in einem und demselben Punct berühren, nicht mitgerechnet; sondern es giebt solcher spezieller Fälle aufserdem noch 48. So sind z. B. unter den 32 Auflösungen, welche im I. Bande S. 348. der Annalen der Mathematik von Gergonne, von der obigen Aufgabe aufgezählt werden, vier und zwanzig, welche zu den hier ausgeschlossenen 48 Fällen gehören.

Die vorliegende Aufgabe kann übrigens auch als ein spezieller Fall von der folgenden, allgemeineren Aufgabe angesehen werden.

15.

Aufgabe.

„Drei beliebige Kreise, die in einerlei Ebene liegen, sind der Gröfse und Lage nach gegeben, man soll drei andere Kreise beschreiben, die einander berühren, und von denen jeder zwei der gegebenen Kreise berührt, jedoch so, dafs auch jeder der drei gegebenen Kreise zwei von den zu suchenden Kreisen berührt."

Zum Beispiel: Wenn die drei Kreise M_1, M_2, M_3 (Fig. 26.) gegeben sind, so soll man die drei Kreise m_1, m_2, m_3 finden, welche einander in den Puncten b_1, b_2, b_3 berühren, und von welchen zugleich der Kreis m_1 die Kreise M_2 und M_3, der Kreis m_2 die Kreise M_1 und M_3, und der Kreis m_3 die Kreise M_1 und M_2 berührt.

Auflösung.

1) Man suche die drei äufseren Aehlichkeitspuncte A_3, A_2, A_1, welche zu den drei gegebenen Kreisen M_1, M_2, M_3, paarweise genommen, gehören (§. II. Nr. 7.), und construire die zu diesen Aehnlichkeitspuncten gehörigen Potenzkreise A_3, A_2, A_1 (§. III. Nr. 11.), deren Radien respective A_3C_3, A_2C_2, A_1C_1 sind, und welche Kreise sich in einem bestimmten Punct D schneiden werden.

2) Hierauf beschreibe man die drei Kreise μ_1, μ_2, μ_3, von denen der erste die drei Kreise M_1, A_2, A_3, der zweite die drei Kreise M_2, A_3, A_1, und der dritte die drei Kreise M_3, A_2, A_1 berührt.

3) Ferner beschreibe man einen Kreis, dessen Peripherie $b_1 B_1 \beta_1$ durch den Berührungspunct B_1 der Kreise M_1 und μ_1 geht, und welcher die Kreise μ_2, μ_3 berührt, jedoch so, daſs er den Kreis μ_3, welcher von dem kleineren (M_3) der beiden Kreise M_2, M_3 abhängig ist, einschlieſsend berührt:

4) So ist endlich derjenige Kreis m_2, welchen man so beschreibt, daſs er die Kreise M_1, M_3 und den Kreis ($b_1 B_1 \beta_1$) berührt, einer der drei gesuchten Kreise.

Die beiden übrigen gesuchten Kreise m_1, m_3 findet man auf ähnliche Weise. Z. B. der Kreis m_3 kann aus der vorstehenden Construction unmittelbar gefunden werden, wenn man statt des Kreises m_2 (4.) einen Kreis m_3 beschreibt, welcher die Kreise M_1, M_2 und den Kreis ($b_1 B_1 \beta_1$) berührt. Es ist zu bemerken, daſs die beiden Kreise m_2 und m_3 den Hülfskreis ($b_1 B_1 \beta_1$) in einem und demselben Punct b_1 berühren.

Die vielen verschiedenen Auflösungen, welche diese Aufgabe zuläſst, sind in der Hauptsache der vorstehenden ähnlich; selbst wenn die gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3, anstatt auſser einander zu liegen, wie in (Fig. 26), einander schneiden oder in einander liegen, bleiben die Auflösungen sich völlig ähnlich.

Nimmt man an, die drei gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3 schnitten einander, und zwar so, daſs sie mehrere krummlinige Dreiecke bildeten, hält alsdann die Eckpuncte A, B, C eines solchen Dreiecks fest, und läſst die Kreise, durch unendliche Zunahme, in gerade Linien übergehen: so erhält man aus der vorliegenden Aufgabe und Auflösung, die Aufgabe und Auflösung (14.); nemlich die gegenwärtigen Potenzkreise A_1, A_2, A_3 gehen dann in die dortigen geraden Linien AM, BM, CM über, u. s. w., so daſs in dieser Hinsicht die Aufgabe (14.), wie oben gesagt, als ein spezieller Fall der gegenwärtigen Aufgabe angesehen werden kann.

Die vorstehende Aufgabe kann aber selbst wieder als ein spezieller Fall der folgenden angesehen werden.

16.

Aufgabe.

„Auf einer Kugelfläche sind drei beliebige Kreise M_1, M_2, M_3 der Gröſse und Lage nach gegebenen; man soll auf derselben Kugelfläche drei andere Kreise

m_3, m_2, m_1 finden, welche einander berühren, und von welchen zugleich der Kreis m_3 die Kreise M_1 und M_2, der Kreis m_2 die Kreise M_1 und M_3, und der Kreis m_1 die Kreise M_2 und M_3 berührt." Oder was dasselbe ist:

„Wenn drei beliebige gerade Kegel, welche einerlei Scheitelpunct haben, der Gröfse und Lage nach gegeben sind: so soll man aus dem nemlichen Scheitel drei andere gerade Kegel beschreiben, welche einander berühren, und von denen jeder zwei der gegebenen Kegel berührt."

Die Auflösung dieser Aufgabe ist derjenigen in (15.) völlig ähnlich. Nemlich die in den Paragraphen (I, II, III.), entwickelten Lehrsätze von Kreisen, die in einerlei Ebene liegen, finden auf ähnliche Weise bei Kreisen, die in einerlei Kugelfläche liegen, Statt, welches an einem anderen Orte bewiesen werden soll. Wir erwähnen z. B. nur: dafs, so wie zu zwei Kreisen, die in einerlei Ebene liegen, zwei Aehnlichkeitspunkte gehören, von denen jeder der Mittelpunct eines Potenzkreises ist: eben so gehören auch zu irgend zwei Kreisen, die in einerlei Kugelfläche liegen, zwei Aehnlichkeitspuncte (eigentlich vier, denn jeder ist doppelt vorhanden), von denen jeder der Pol eines bestimmten Kreises ist, welcher in gewisser Hinsicht die Stelle des Potenzkreises vertritt. Und, wie nun alle jene Hülfssätze von Kreisen, die in einerlei Ebene liegen, welche bei der Auflösung in (15.) erforderlich waren, auf analoge Weise bei Kreisen, die in einerlei Kugelfläche liegen, Statt finden: so ist auch die Auflösung der vorliegenden Aufgabe derjenigen in (15.) vollkommen ähnlich, so dafs letztere in der gegenwärtigen enthalten ist.

Läfst man die Kugelfläche, durch unendliche Entfernung ihres Mittelpuncts, in eine Ebene übergehen, so geht zugleich die gegenwärtige Aufgabe in die Aufgabe (15.) über, in welcher Hinsicht die letztere, wie in (15.) gesagt, als ein spezieller Fall der ersteren angesehen werden kann.

Ein anderer spezieller Fall der vorliegenden Aufgabe ist derjenige, wo die drei gegebenen Kreise auf der Kugelfläche in gröfste Kreise übergehen, d. h. nachstehende Aufgabe.

17.

Aufgabe.

„In ein gegebenes sphärisches Dreieck drei Kreise zu beschreiben, welche einander berühren, und von denen jeder zwei Seiten des Dreiecks berührt." Oder, was dasselbe ist:

„In einen gegebenen dreikantigen Körperwinkel drei gerade Kegel zu beschreiben, welche einander berühren, und von denen jeder zwei Seitenflächen des Körperwinkels berührt."

Die Auflösung dieser speziellen Aufgabe ist derjenigen in (14.) ähnlich. Statt der dortigen Hülfslinien AM, BM, CM, welche die Winkel des gegebenen Dreiecks halbiren, kommen Bogen gröfster Kreise vor, welche die Winkel des gegebenen sphärischen Dreiecks halbiren, u. s. w.

Eine noch allgemeinere Aufgabe als (16.) ist folgende, welche in gewisser Art alle bisherigen Aufgaben als spezielle Fälle in sich schliefst.

18.

Aufgabe.

„Wenn auf irgend einer Oberfläche vom zweiten Grade drei beliebige ebene Curven (zweiten Grades) der Gröfse und Lage nach gegeben sind: so soll man auf derselben Oberfläche drei andere ebene Curven finden, welche einander berühren, und von denen jede zwei der gegebenen Curven berührt."

Die Auflösung dieser Aufgabe ist der Form nach den Auflösungen der bisherigen Aufgaben, besonders (16.) ganz ähnlich. Es finden nemlich die Hülfsmittel für die bisherigen Auflösungen, auf ähnliche Weise auch bei ebenen Curven, die in einerlei Fläche zweiten Grades liegen, Statt, welches an einem anderen Orte nachgewiesen werden soll. Z. B. zu irgend zwei ebenen Curven, die in einer solchen Fläche liegen, gehören (wie zu zwei Kreisen, die in einer Kugelfläche liegen (16)), zwei (eigentlich vier) Aehnlichkeitspuncte, und diese sind Pole zweier bestimmten ebenen Curven, (welche in derselben Fläche liegen und) welche in gewisser Art, in Bezug auf die beiden gegebenen Curven, die Stelle der Potenzkreise bei zwei Kreisen auf der Kugelfläche vertreten. Und so ist nun auch die Auflösung der vorliegenden Aufgabe derjenigen in (16.) oder in (15.) vollkommen ähnlich, so dafs letztere in der gegenwärtigen enthalten ist.

19.

Endlich ist noch zu bemerken, dafs die in den Annalen der Mathematik von Gergonne, im I. Bande S. [illegible]96. in der Note aufgestellte, dann im II. Bande S. 287. wiederholte, und endlich im X. Bande S. 298. in der Note wiederum in Erinnerung gebrachte Aufgabe:

„In einen gegebenen vierflächigen Körper vier Kugeln zu beschreiben, welche einander berühren, und von denen jede aufserdem drei Seitenflächen des gegebenen Körpers berührt," mehr als bestimmt ist, wie leicht zu sehen.

Statt dieser Aufgabe, deren Lösung nur in beschränkten speziellen Fällen möglich ist, kann man folgende Aufgabe aufstellen:

„In einen, von vier ebenen Flächen begrenzten, gegebenen Körper, drei Kugeln zu beschreiben, welche einander berühren, und von denen jede aufserdem drei Seitenflächen des Körpers berührt."

Diese Aufgabe ist gerade nur bestimmt. Sie ist immer zu lösen möglich.

Berlin, im März 1826.

19.

Ueber die Integration der Differential-Formel $\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}}$, wenn R und ϱ ganze Functionen sind.

(Von Herrn *N. H. Abel.*)

1.

Wenn man den Ausdruck

$$1)\quad z = \log\left(\frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}\right)$$

wo p, q und R ganze Functionen einer veränderlichen Gröfse x sind, nach x differentiirt, so erhält man:

$$dz = \frac{dp + d(q\sqrt{R})}{p + q\sqrt{R}} - \frac{dp - d(q\sqrt{R})}{p - q\sqrt{R}},$$

oder:

$$dz = \frac{(p - q\sqrt{R})\left(dp + d(q\sqrt{R})\right) - (p + q\sqrt{R})\left(dp - d(q\sqrt{R})\right)}{p^2 - q^2 . R},$$

das heifst:

$$dz = \frac{2p . d(q\sqrt{R}) - 2\,dp\,q\sqrt{R}}{p^2 - q^2 . R}.$$

Nun ist

$$d(q\sqrt{R}) = dq . \sqrt{R} + \tfrac{1}{2} q . \frac{dR}{\sqrt{R}},$$

also, durch Substitution,

$$dz = \frac{pq . dR + 2(p\,dq - q\,dp) . R}{(p^2 - q^2 . R) . \sqrt{R}},$$

folglich, wenn man

$$2)\quad \begin{cases} pq . \frac{dR}{dx} + 2\left(p . \frac{dq}{dx} - q . \frac{dp}{dx}\right) . R = M \text{ und} \\ p^2 - q^2 . R = N \end{cases}$$

setzt:

$$3)\quad dz = \frac{M}{N} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}};$$

wo, wie leicht zu sehen, M und N ganze Functionen von x sind.

Da nun $z = \log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$, so ist, wenn man integrirt,

$$4)\quad \int \frac{M}{N} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right).$$

Daraus folgt, dafs sich in dem Differential $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, für die rationale Function ϱ unzählige Formen finden lassen, die dieses Differential durch Logarithmen integrabel machen, und zwar durch einen Ausdruck von der Form $\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$. Die Function ϱ enthält, wie man aus den Gleichungen (2) sieht, aufser R, noch zwei unbestimmte Functionen p und q, und wird durch diese Functionen bestimmt.

Man kann nun umgekehrt die Frage aufstellen, ob es möglich sei, die Functionen p und q so anzunehmen, dafs ϱ oder $\frac{M}{N}$ eine bestimmte gegebene Form bekommt. Die Auflösung dieses Problems führt zu vielen interessanten Resultaten, die als eben so viele Eigenschaften der Functionen von der Form $\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$ zu betrachten sind. Ich werde mich in dieser Abhandlung auf den Fall beschränken, wenn $\frac{M}{N}$ eine ganze Function von x ist, und folgende allgemeine Aufgabe aufzulösen suchen:

„Alle Differentiale von der Form $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, wo ϱ und R ganze Functionen von „x sind, zu finden, deren Integrale durch eine Function von der Form „$\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$ ausgedrückt werden können."

2.

Differentiirt man die Gleichung

$$N = p^2 - q^2 \cdot R,$$

so erhält man:

$$dN = 2p\,dp - 2q\,dq \cdot R - q^2 \cdot dR;$$

also, wenn man mit p multiplicirt,

$$p\,dN = 2p^2 dp - 2pq\,dq \cdot R - pq^2 \cdot dR,$$

das heifst: wenn man statt p^2 seinen Werth $N+q^2.R$ setzt,

$$pdN = 2Ndp + 2q^2dp.R - 2pqdq.R - pq^2.dR,$$

oder

$$pdN = 2Ndp - q\big(2(pdq - qdp)R + pq.dR\big),$$

folglich, weil

$$2(pdq - qdp)R + pq.dR = M.dx \;(2.),$$

$$pdN = 2N.dp - qM.dx,$$

oder:

$$qM = 2N.\frac{dp}{dx} - p.\frac{dN}{dx},$$

und folglich

$$5)\quad \frac{M}{N} = \left(2\frac{dp}{dx} - p.\frac{dN}{Ndx}\right) : q.$$

Nun soll $\frac{M}{N}$ eine ganze Function von x sein: also ist, wenn diese Function durch ϱ bezeichnet wird:

$$q\varrho = 2\frac{dp}{dx} - p.\frac{dN}{N.dx}.$$

Daraus folgt, dafs $p.\frac{dN}{Ndx}$ eine ganze Function von x sein mufs. Nun ist, wenn man

$$N = \log(x+a)^m(x+a_1)^{m_1}\ldots\ldots(x+a_n)^{m_n}$$

setzt,

$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{m}{x+a} + \frac{m_1}{x+a_1} + \ldots\ldots + \frac{m_n}{x+a_n};$$

also mufs auch

$$p\left(\frac{m}{x+a} + \frac{m_1}{x+a_1} + \ldots\ldots + \frac{m_n}{x+a_n}\right)$$

eine ganze Function sein. Dieses aber kann nicht Statt finden, wenn nicht das Product $(x+a)\ldots\ldots(x+a_n)$ ein Factor von p ist. Es mufs also

$$p = (x+a)\ldots\ldots(x+a_n).p_1$$

sein, wo p_1 eine ganze Function ist. Nun ist

$$N = p^2 - q^2.R,$$

also:

$$\log(x+a)^m(x+a_1)^{m_1}\ldots(x+a_n)^{m_n} = p_1^2(x+a)^2(x+a_1)^2\ldots(x+a_n)^2 - q^2.R.$$

Da nun R keinen Factor von der Form $(x+a)^2$ hat, und man immer annehmen kann, dafs p und q keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so ist klar, dafs

$$m = m_1 = \ldots\ldots m_n = 1$$

und $R = \log(x+a)(x+a_1)\ldots\ldots(x+a_n).R_1$

sein mufs, wo R_1 eine ganze Function ist.

Man hat also

$$N = \log(x+a)(x+a_1)\ldots\ldots(x+a_n) \text{ und}$$
$$R = N.R_1,$$

das heifst: N mufs ein Factor von R sein. Man hat auch $p = N.p_1$.

Substituirt man diese Werthe von R und p in die Gleichungen (2.), so findet man folgende zwei:

$$6) \quad \begin{Bmatrix} p_1^2 . N - q^2 . R_1 = 1 \\ \frac{M}{N} = p_1 q . \frac{dR}{dx} + 2\left(p\frac{dq}{dx} - q\frac{dp}{dx}\right)R_1 = \varrho \end{Bmatrix}.$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt die Form der Functionen p_1, q, N und R_1, und wenn dieselben bestimmt sind, so giebt hernach die zweite Gleichung die Function ϱ. Diese letzte Function kann auch durch die Gleichung (5.) gefunden werden.

3.

Es kommt nunmehr alles auf die Gleichung

$$7) \quad p_1^2 . N - q^2 . R_1 = 1$$

an.

Sie kann zwar durch die gewöhnliche Methode der unbestimmten Coefficienten aufgelöst werden, allein die Anwendung dieser Methode würde hier äufserst weitläufig sein, und schwerlich zu einem allgemeinen Resultat führen. Ich werde mich daher eines andern Verfahrens bedienen, welches demjenigen ähnlich ist, das man anwendet, um die unbestimmten Gleichungen vom zweiten Grade zwischen zwei unbekannten Gröfsen aufzulösen. Der Unterschied besteht blofs darin, dafs man, statt mit ganzen Zahlen, mit ganzen Functionen zu thun hat. Da in der Folge häufig die Rede von dem Grade einer Function sein wird, so werde ich mich des Zeichens δ bedienen, um denselben auszudrücken, auf die Weise, dafs δP den Grad der Function P bezeichnet, z. B.

$$\delta(x^m + ax^{m-1} + \ldots\ldots\ldots) = m,$$
$$\delta\left(\frac{x^5 + cx}{x^3 + e}\right) = 2,$$
$$\delta\left(\frac{x + e}{x^2 + k}\right) = -1 \text{ etc.}$$

Es ist übrigens klar, dafs folgende Gleichungen Statt finden:

$$\delta(P.Q) = \delta P + \delta Q,$$
$$\delta\left(\frac{P}{Q}\right) = \delta P - \delta Q,$$
$$\delta(P^m) = m\delta P;$$

ferner

$$\delta(P + P') = \delta P,$$

wenn $\delta P'$ nicht gröfser als δP ist.

Eben so will ich, der Kürze wegen, den ungebrochenen Theil einer rationalen Function u durch

$$Eu$$

bezeichnen, auf die Weise, dafs

$$u = Eu + u',$$

wo $\delta u'$ negativ ist.

Es ist klar, dafs

$$E(s + s') = E(s) + E(s'),$$

und also

$$E(s + s') = E(s),$$

wenn $\delta s'$ negativ ist.

In Rücksicht auf dieses Zeichen hat man folgenden Satz:

„Wenn die drei rationalen Functionen u, v und z die Eigenschaft haben, dafs

$$u^2 = v^2 + z,$$

„so ist

$$E(u) = \pm E(v),$$

„wenn $\delta z < \delta v$.

Es ist nemlich, zu Folge der Definition,

$$u = E(u) + u',$$
$$v = E(v) + v',$$

wo $\delta u'$ und $\delta v'$ kleiner als Null sind; also wenn man diese Werthe in die Gleichung $u^2 = v^2 + z$ substituirt:

$$(Eu)^2 + 2u'Eu + u'^2 = (Ev)^2 + 2v'Ev + v'^2 + z.$$

Daraus folgt:

$$(Eu)^2 - (Ev)^2 = z + v'^2 - u'^2 + 2v'Ev + 2u'Eu = t,$$

oder:

$$(Eu + Ev)(Eu - Ev) = t.$$

Nun ist, wie leicht zu sehen,

$$\delta t < \delta v;$$

$\delta(Eu + Ev)(Eu - Ev)$ dagegen ist wenigstens gleich δv, wenn nicht $(Eu + Ev)(Eu - Ev)$ gleich Null ist; es ist also nothwendig

$$(Eu + Ev)(Eu - Ev) = 0,$$

welches

$$Eu = \pm Ev$$

giebt, wie zu beweisen war.

Es ist klar, dafs die Gleichung (7.) nicht Statt finden kann, wenn nicht $\delta(Np_1^2) = \delta(R_1 q^2)$, das heifst,

$$\delta N + 2\delta p_1 = \delta R_1 + 2\delta q.$$

Daraus folgt

$$\delta(NR_1) = 2(\delta q - \delta p_1 + \delta R_1).$$

Der höchste Exponent in der Function R mufs also eine gerade Zahl sein.

Es sei $\delta N = n - m$, $\delta R_1 = n + m$.

4.

Dieses festgesetzt, werde ich nunmehr statt der Gleichung

$$p_1^2 . N - q^2 . R_1 = 1$$

folgende:

$$8) \quad p_1^2 . N - q^2 . R_1 = v$$

setzen, wo v eine ganze Function ist, deren Grad kleiner ist als $\frac{\delta N + \delta R_1}{2}$.

Diese Gleichung ist, wie man sieht, allgemeiner; sie kann durch das nemliche Verfahren aufgelöst werden.

Es sei t der ganze Theil der gebrochenen Function $\frac{R_1}{N}$ und t' der Rest, so hat man

$$9) \quad R_1 = N . t + t',$$

und es ist klar, dafs t vom $2m^{\text{ten}}$ Grade ist, wenn $\delta N = n - m$ und $\delta R_1 = n + m$.

Substituirt man diesen Ausdruck für R_1 in die Gleichung (3.), so ergiebt sich

$$10) \quad (p_1^2 - q^2 . t) . N - q^2 . t' = v.$$

Es sei nunmehr

$$11) \quad t = t_1^2 + t'_1 \ldots\ldots\ldots,$$

so kann man immer t_1 so bestimmen, dafs der Grad von t'_1 kleiner ist als m. Man setze nemlich

$$\begin{aligned} t &= \alpha_0 + \alpha_1 . x + \alpha_2 . x^2 \ldots\ldots + \alpha_{2m} x^{2m} \\ t_1 &= \beta_0 + \beta_1 x + \ldots\ldots\ldots + \beta_m x^m \\ t'_1 &= \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots\ldots\ldots + \gamma_{m-1} x^{m-1}, \end{aligned}$$

so giebt die Gleichung (10.)

$$a_{2m}x^{2m} + a_{2m-1}.x^{2m-1} + a_{2m-2}x^{2m-2} + \ldots + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$= \beta^2_m x^{2m} + 2\beta_m\beta_{m-1}x^{2m-1} + (\beta^2_{m-1} + 2\beta_m\beta_{m-2}).x^{2m-2} + (2\beta_m\beta_{m-3} + 2\beta_{m-1}\beta_{m-2})x^{2m-3} + \text{etc.}$$
$$+ \gamma_{m-1}x^{m-1} + \gamma_{m-2}x^{m-2} + \ldots\ldots + \gamma_1 x + \gamma.$$

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man die Coefficienten mit einander vergleicht:

$$a_{2m} = \beta^2_m$$
$$a_{2m-1} = 2\beta_m . \beta_{m-1}$$
$$a_{2m-2} = 2\beta_m . \beta_{m-2} + \beta^2_{m-1}$$
$$a_{2m-3} = 2\beta_m . \beta_{m-3} + 2\beta_{m-1} . \beta_{m-2}$$
$$a_{2m-4} = 2\beta_m . \beta_{m-4} + 2\beta_{m-1} . \beta_{m-3} + \beta^2_{m-2}$$
etc.
$$a_m = 2\beta_m . \beta_0 + 2\beta_{m-1} . \beta_1 + 2\beta_{m-2} . \beta_2 + \ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_{m-1} = a_{m-1} - 2\beta_{m-1} . \beta_0 - 2\beta_{m-2} . \beta_1 - \ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_{m-2} = a_{m-2} - 2\beta_{m-2} . \beta_0 - 2\beta_{m-3} . \beta_1 - \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_2 = a_2 - 2\beta_2 . \beta_0 - \beta_1^2$$
$$\gamma_1 = a_1 - 2\beta_1 . \beta_0$$
$$\gamma_0 = a_0 - \beta_0^2.$$

Die $m+1$ ersten Coefficienten dieser Gleichungen geben, wie in jedem Falle leicht zu sehen, die Werthe der $m+1$ Gröfsen $\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots\ldots \beta_0$, und die m letzten die Werthe der Gröfsen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots \gamma_{m-1}$.

Die vorausgesetzte Gleichung (11.) ist also immer möglich.

Substituirt man nun in die Gleichung (10.) statt t seinen Werth aus der Gleichung (11.), so erhält man:

$$12)\quad (p_1^2 - q^2 . t_1^2)N - q^2(N . t'_1 + t') = \varrho.$$

Hieraus folgt

$$\left(\frac{p_1}{q}\right)^2 = t_1^2 + t'_1 + \frac{t'}{N} + \frac{\varrho}{q^2}.$$

Bemerkt man nun, dafs

$$\delta\left(t'_1 + \frac{t_1}{N} + \frac{\varrho}{q^2}\right) < \delta t_1,$$

folgt, dem Vorhergehenden zufolge,

$$E\left(\frac{p_1}{q}\right) = \pm E t_1 = \pm t_1,$$

also hat man

$$p_1 = \pm t_1 \,.\, q + \beta,$$
wo $\delta\beta < \delta q$;

oder, da t_1 mit beiden Zeichen genommen werden kann,
$$p_1 = t_1 \,.\, q + \beta.$$
Substituirt man diesen Ausdruck statt p_1 in die Gleichung (12.), so geht dieselbe in
$$13)\quad (\beta^2 + 2\beta t_1 q)\, N - q^2 \,.\, s = v$$
über, wenn man der Kürze wegen
$$Nt'_1 + t' = s$$
setzt.

Aus dieser Gleichung folgt leicht:
$$\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1 N}{s}\right)^2 = \frac{N(t_1^2 N + s)}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2},$$
oder, weil $t_1^2 N + s = R_1$, (indem $R_1 = tN + t'$, $s = Nt'_1 + t'$, und $t = t_1^2 + t'_1$),
$$\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1 N}{s}\right)^2 = \frac{R_1 N}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}.$$

Es sei nun
$$R_1 N = r^2 + r',$$
wo $\delta r' < \delta r$ ist,

so hat man:
$$\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1 N}{s}\right)^2 = \left(\frac{r}{s}\right)^2 + \frac{v'}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}.$$
Nun aber ist, wie leicht zu sehen,
$$\delta\left(\frac{r'}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}\right) < \delta\left(\frac{r}{s}\right),$$
also
$$E\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1 N}{s}\right) = E\left(\frac{r}{s}\right),$$
folglich
$$E\left(\frac{q}{\beta}\right) = E\left(\frac{r + t_1 N}{s}\right);$$
also, wenn man
$$E\left(\frac{r + t_1 N}{s}\right) = 2\mu \text{ setzt},$$
$q = 2\mu \,.\, \beta + \beta_1$; wo $\delta\beta_1 < \delta\beta$ ist.

Substituirt man diesen Ausdruck für q in die Gleichung (13.), so erhält man folgende:
$$\beta^2 \,.\, N + 2\beta t_1 N\,(2\mu\beta + \beta_1) - s(4\mu^2\beta^2 + 4\mu\beta_1\beta + \beta_1^2) = v,$$

das

das heifst:

$$\beta^2(N + 4\mu t_1 N - 4s\mu^2 + 2(t_1 N - 2\mu s)\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = 0,$$

oder, wenn man

$$14)\quad \begin{Bmatrix} s_1 = N + 4\mu t_1 N - 4s\mu^2 \\ t_1 N - 2\mu s = -r_1 \end{Bmatrix}$$

setzt,

$$15)\quad s_1 . \beta^2 - 2r_1 . \beta\beta_1 - s . \beta_1^2 = 0.$$

Weil $E\left(\frac{r + t_1 N}{s}\right) = 2\mu$ ist, so hat man

$$1 + t_1 N = 2s . \mu + E, \text{ wo } \delta E < \delta s,$$

folglich giebt die letzte der Gleichungen (14.)

$$r_1 = r - E.$$

Ferner erhält man, wenn man den Ausdruck für s_1 mit s multiplicirt,

$$ss_1 = Ns + 4\mu t_1 Ns - 4s^2\mu^2 = Ns + t_1^2 N^2 - (2s\mu - t_1 N)^2.$$

Nun ist $2s\mu - t_1 N = r_1$, also

$$ss_1 = Ns + t_1^2 N^2 - r_1^2, \text{ und } r_1^2 + ss_1 = N(s + t_1^2 N).$$

Es ist ferner

$$s + t_1^2 N = R_1,$$

also

$$16)\quad r_1^2 + ss_1 = N . R_1 = R.$$

Vermöge des Vorhergehenden ist $R = r^2 + r'$, also

$$r^2 - r_1^2 = ss_1 - r', \ (r + r_1)(r - r_1) = ss_1 - r'.$$

Da nun $\delta r' < \delta r$ ist, so folgt aus dieser Gleichung, dafs

$$\delta(ss_1) = \delta(r + r')(r - r_1),$$

das heifst, weil $r - r_1 = E$, wo $\delta E < \delta r$,

$$\delta s + \delta s_1 = \delta r + \delta E.$$

Nun ist $\delta E < \mathrm{d}s$, also

$$\delta s_1 < \delta r.$$

Ferner hat man:

$$s = N . t'_1 + t', \text{ wo } \delta t' < \delta N \text{ und } \delta t'_1 < \delta t_1,$$

also

$$\delta s < \delta N + \delta t_1.$$

Aber $R = N(s + t_1^2 N)$, folglich:

$$\delta R = 2\delta t_1 + 2\delta N,$$

oder, da $\delta R = 2\delta r = 2\delta r_1$,

$$\delta t_1 + \delta N = \delta r_1.$$

Daraus folgt also, dafs

$$\delta s < \delta r_1.$$

Die Gleichung $p_1^2 . N - q^2 . R_1 = \varrho$ ist also nunmehr in die Gleichung

$$s_1 . \beta^2 - 2 r_1 . \beta \beta_1 - s . \beta_1^2 = \varrho$$

übergegangen, wo $\delta r_1 = \frac{1}{2} \delta R = m$, $\delta \beta_1 < \delta \beta$ und $\delta s < m$, $\delta s_1 < m$.

Man erhält nemlich diese Gleichung, wenn man

$$17) \begin{Bmatrix} p_1 = t_1 . q + \beta \\ q = 2\mu . \beta + \beta_1 \end{Bmatrix}$$

setzt. t_1 ist durch die Gleichung

$$t = t_1^2 + t'_1, \text{ wo } \delta t'_1 < \delta t_1 \text{ und } t = E\left(\frac{R_1}{N}\right),$$

bestimmt, μ aber durch die Gleichung

$$2\mu = E\left(\frac{r + t_1 N}{s}\right),$$

$$\text{wo } r^2 + r' = R_1 N, \; s = N t'_1 + R - N . t.$$

Ferner ist

$$18) \begin{cases} r_1 = 2\mu . s - t_1 N, \\ s_1 = N + 4\mu t_1 N - 4 s \mu^2, \\ r_1^2 + s s_1 = R_1 N = R. \end{cases}$$

Es kommt also nun auf die Gleichung (15.) an.

5.

Auflösung der Gleichung:

$$s_1 . \beta^2 - 2 r_1 \beta \beta_1 - s . \beta_1^2 = \varrho,$$

$$\text{wo } \delta s < \delta r'_1, \; \delta s_1 < \delta r_1, \; \delta \varrho < \delta r_1, \; \delta \beta_1 < \delta \beta.$$

Dividirt man die Gleichung

$$19) \quad s_1 . \beta^2 - 2 r_1 \beta \beta_1 - s \beta_1^2 = \varrho$$

mit $s_1 \beta_1^2$, so erhält man

$$\frac{\beta^2}{\beta_1^2} - 2 \frac{r_1}{s_1} . \frac{\beta}{\beta_1} - \frac{s}{s_1} = \frac{\varrho}{s_1 \beta_1^2},$$

und folglich

$$\left(\frac{\beta}{\beta_1} - \frac{r_1}{s_1}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{s_1}\right)^2 + \frac{s}{s_1} + \frac{\varrho}{s_1 \beta_1^2}.$$

Hieraus folgt, da $\delta\left(\frac{s}{s_1} + \frac{\varrho}{s_1 \beta_1^2}\right) < \delta\left(\frac{r_1}{s_1}\right)$,

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1} - \frac{r_1}{s_1}\right) = \pm E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),$$

mithin

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right) = E\left(\frac{r_1}{s_1}\right) . (1 \pm 1),$$

wo man das Zeichen + nehmen mufs, weil sonst $E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right)$ gleich Null sein würde, also

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right) = 2E\left(\frac{r_1}{s_1}\right);$$

daher, wenn man

$$\mathrm{E}\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = \mu_1$$

setzt,

$$\beta = 2\beta_1 . \mu_1 + \beta_2, \text{ wo } \delta\beta_2 < \delta\beta_1.$$

Substituirt man diesen Werth für β in die gegebene Gleichung, so kommt

$$s_1(\beta_2^2 + 4\beta_1\beta_2\mu_1 + 4\mu_1^2 . \beta_1^2) - 2r_1\beta_1(\beta_2 + 2\mu_1\beta_1) - s\beta_1^2 = \varrho,$$

oder:

$$20)\quad s_2 . \beta_1^2 - 2r_2 . \beta_1 . \beta_2 - s_1 . \beta_2^2 = -\varrho,$$

wo $r_2 = 2\mu_1 s_1 - r_1$, $s_2 = s + 4r_1\mu_1 - 4s_1\mu_1^2$.

Da $E\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = \mu_1$, so ist

$$r_1 = \mu_1 s_1 + E_1, \text{ wo } \delta E_1 < \delta s_1.$$

Dadurch erhält man

$$r_2 = r_1 - 2E_1$$
$$s_2 = s + 4E_1\mu_1,$$

also, wie leicht zu sehen,

$$\delta r_2 = \delta r_1, \delta s_2 < \delta r_2.$$

Die Gleichung (19.) hat folglich dieselbe Form wie die Gleichung (20.), und man kann also darauf dieselbe Operation anwenden, nemlich wenn man setzt

$$\mu_2 = E\left(\frac{r_2}{s_2}\right), \; r_2 = s_2\mu_2 + E_2, \; \beta_1 = 2\mu_2\beta_2 + \beta_3.$$

Dieses giebt

$$s_3 . \beta_2^2 - 2r_3\beta_2\beta_3 - s_2 . \beta_3^2 = +\varrho,$$

wo

$$r_3 = 2\mu_2 s_2 - r_2 = r_2 - 2E_2,$$
$$s_3 = s_1 + 4r_2\mu_2 - 4s_2\mu_2^2 = s_1 + 4E_2\mu_2,$$

und $\delta\beta_3 < \delta\beta_2$.

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man, nach $n-2$ Transformationen, die Gleichung:

$$21)\quad s_n . \beta_{n-1}^2 - 2r_n . \beta_{n-1} . \beta_{n-2} - s_{n-1} . \beta_n^2 = (-1)^{n-1} . \varrho,$$
$$\text{wo } \delta\beta_n < \delta\beta_{n-1}.$$

Die Gröfsen s_n, r_n, β_n sind durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\beta_{n-1} = 2\mu_n \cdot \beta_n + \beta_{n+1},$$
$$\mu_n = E\left(\frac{r_n}{s_n}\right),$$
$$r_n = 2\mu_{n-1} \cdot s_{n-1} - r_{n-1},$$
$$s_n = s_{n-1} + 4r_{n-1}\mu_{n-1} - 4s_{n-1} \cdot \mu^2_{n-1},$$

wozu noch die folgenden hinzugefügt werden können:

$$r_n = \mu_n s_n + E_n,$$
$$r_n = r_{n-1} - 2E_{n-1},$$
$$s_n = s_{n-2} + 4E_{n-1} \cdot \mu_{n-1}.$$

Da nun die Zahlen

$$\delta\beta,\ \delta\beta_1,\ \delta\beta_2,\ \ldots\ldots\ldots\ \delta\beta_n, \text{ etc.}$$

eine abnehmende Reihe bilden, so mufs man nach einer gewissen Zahl von Transformationen ein β_n finden, welches gleich Null ist. Es sei also

$$\beta_m = 0.$$

Alsdann giebt die Gleichung (21.), wenn man $n = m$ setzt:

$$22)\quad s_m \cdot \beta^2_{m-1} = (-1)^{m-1}\,\varrho.$$

Dies ist die allgemeine Bedingungsgleichung für die Auflösbarkeit der Gleichung (19).

s_m hängt von den Functionen s, s_1, r_1 ab, und β_{m-1} mufs so genommen werden, dafs

$$\delta s_m + 2\delta\beta_{m-1} < \delta r.$$

Die Gleichung (22.) zeigt an, dafs man für alle s, s_1 und r_1 unzählige Werthe von ϱ finden kann, welche der Gleichung (19.) genug thun.

Setzt man in die gegebene Gleichung statt ϱ seinen Werth $(-1)^{m-1} \cdot s_m \cdot \beta^2_{m-1}$, so erhält man

$$s_1 \cdot \beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s \cdot \beta_1^2 = (-1)^{m-1} \cdot s_m \cdot \beta^2_{m-1},$$

welche Gleichung immer auflösbar ist.

Es ist leicht zu sehen, dafs β und β_1 den gemeinschaftlichen Factor β_{m-1} haben. Nimmt man daher an, dafs β und β_1 keinen gemeinschaftlichen Factor haben sollen, so ist β_{m-1} unabhängig von x. Man kann alsdann $\beta_{m-1} = 1$ setzen, und folglich hat man die Gleichung

$$s_1 \cdot \beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = (-1)^{m-1} s_m.$$

Die Functionen β, β_1, β_2, ... werden durch die Gleichung

$$\beta_{n-1} = 2\mu_n\beta_n + \beta_{n+1}$$

bestimmt, wenn man der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots m-1$ setzt, und bemerkt, daſs $\beta_m = 0$, nemlich:

$$\begin{aligned}
\beta_{m-2} &= 2\mu_{m-1} \cdot \beta_{m-1}, \\
\beta_{m-3} &= 2\mu_{m-2} \cdot \beta_{m-2} + \beta_{m-1}, \\
\beta_{m-4} &= 2\mu_{m-3} \cdot \beta_{m-3} + \beta_{m-2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\beta_3 &= 2\mu_4 \cdot \beta_4 + \beta_5, \\
\beta_2 &= 2\mu_3 \cdot \beta_3 + \beta_4, \\
\beta_1 &= 2\mu_2 \cdot \beta_2 + \beta_3, \\
\beta &= 2\mu_1 \cdot \beta_1 + \beta_2.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben:

$$\frac{\beta}{\beta_1} = 2\mu_1 + \frac{1}{\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)},$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = 2\mu_2 + \frac{1}{\left(\frac{\beta_2}{\beta_3}\right)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\beta_{m-3}}{\beta_{m-2}} = 2\mu_{m-2} + \frac{1}{\left(\frac{\beta_{m-1}}{\beta_{m-2}}\right)},$$

$$\frac{\beta_{m-1}}{\beta_{m-2}} = 2\mu_{m-2},$$

folglich erhält man, durch auf einander folgende Substitutionen:

$$\frac{\beta}{\beta_1} = 2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu_{m-2} + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}$$

Man hat also die Werthe von β und β_1, wenn man diesen Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt.

6.

Setzt man in die Gleichung

$$p_1^2 \cdot N - q^2 \cdot R_1 = v$$

für v seinen Werth $(-1)^{m-1} \cdot s_m$, so erhält man

$$p_1^2 . N - q^2 . R_1 = (-1)^{m-1} s_m,$$

wo

$$q = 2\mu . \beta + \beta_1,$$
$$p_1 = t^1 . q + \beta,$$

also

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \frac{\beta}{q} = t_1 + \frac{1}{\left(\frac{q}{\beta}\right)},$$

$$\frac{q}{\beta} = 2\mu + \frac{\beta_1}{\beta},$$

folglich

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \ldots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}$$

Die Gleichung:

$$p_1^2 N - q^2 . R_1 = 0$$

giebt

$$\left(\frac{p_1}{q}\right)^2 = \frac{R_1}{N} + \frac{v}{q^2 . N},$$

$$\frac{p_1}{q} = \sqrt{\left(\frac{R_1}{N} + \frac{v}{q^2 N}\right)},$$

also, wenn man m unendlich groſs annimmt:

$$\frac{p_1}{q} = \sqrt{\frac{R_1}{N}};$$

folglich hat man:

$$\sqrt{\frac{R_1}{N}} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \text{etc.}}}}}$$

Man findet also die Werthe von p_1 und q für alle m, wenn man die Function $\sqrt{\frac{R_1}{N}}$ in einen Kettenbruch verwandelt *).

*) Die obige Gleichung drückt hier nicht eine absolute Gleichheit aus. Sie deutet nur auf eine abgekürzte Weise an, wie die Gröſsen t_1, μ, μ_1, μ_2, ... gefunden werden können. Sobald indessen der Kettenbruch einen Werth hat, ist derselbe immer gleich $\sqrt{\frac{R_1}{N}}$.

7.

Es sei nun $v = a$, so ist

$$s_m = (-1)^{m-1} a.$$

Sobald also die Gleichung

$$p_1^2 N - q^2 . R_1 = a$$

auflösbar sein soll, so mufs wenigstens eine der Gröfsen

$$s, s_1, s_2, \ldots\ldots\ldots s_m \text{ etc.}$$

unabhängig von x sein.

Und umgekehrt: wenn eine dieser Gröfsen unabhängig von x ist, so ist es immer möglich zwei ganze Functionen p_1 und q zu finden, die dieser Gleichung genugthun. Wenn nemlich $s_m = a$, so hat man die Werthe von p_1 und q, wenn man den Kettenbruch

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \cfrac{1}{\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \ldots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}$$

in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt. Im Allgemeinen sind, wie leicht zu sehen, die Functionen s, s_1, s_2, etc. vom $(n-1^{\text{ten}})$ Grade, wenn NR_1 vom $2n^{\text{ten}}$ ist. Die Bedingungs-Gleichung

$$s_m = a$$

giebt also $n - 1$ Gleichungen zwischen den Coefficienten der Functionen N und R_1, und daher kann man nur $n + 1$ dieser Coefficienten willkürlich annehmen; die übrigen sind durch die Bedingungs-Gleichungen bestimmt.

8.

Aus dem Vorhergehenden folgt nun also, dafs man alle Werthe von R_1 und N findet, welche das Differential $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 . N}}$ durch einen Ausdruck von der Form

$$\log\left(\frac{p + q\sqrt{(R_1 . N)}}{p - q\sqrt{(R_1 . N)}}\right)$$

integrirbar machen, wenn man nach und nach die Gröfsen $s, s_1, s_2 \ldots\ldots s_m$ unabhängig von x setzt.

Da $p = p_1 N$, so ist auch

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{(R_1 N)}} = \log\left(\frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}}\right),$$

oder:

$$23)\quad\begin{cases}\int\frac{\varrho\,dx}{\sqrt{(R_1 N)}}=\log\left(\frac{y\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{y\sqrt{N}-\sqrt{R_1}}\right),\\ \text{wo}\\ y=\varrho+\cfrac{1}{2\mu+\cfrac{1}{2\mu_1+\cfrac{1}{2\mu_2+\ddots+\cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}},\end{cases}$$

wenn man annimmt, dafs s_m = einer Constante ist.

Wenn nun R_1, N und p_1, q so bestimmt sind, so findet man ϱ durch di Gleichung (5.). Diese Gleichung giebt, wenn man $p_1 N$ statt p und ϱ stat $\frac{M}{N}$ setzt,

$$\varrho=\left(p_1\frac{dN}{dx}+2N.\frac{dp_1}{dx}\right):q.$$

Hieraus folgt, dafs:

$$\delta\varrho=\delta p_1+\delta N-1-\delta q=\delta p-dq-1.$$

Nun aber ist, wie man vorhin sahe, $\delta p+\delta q+n$, also

$$\delta\varrho=n-1.$$

Wenn also die Function R oder $R_1 N$ vom $2n^{\text{ten}}$ Grade ist, so ist die Functior ϱ nothwendig vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade.

9.

Wir sahen oben, dafs

$$R=R_1 N$$

sein mufs; man kann aber immer annehmen, dafs die Function N constant ist. In der That ist

$$\int\frac{\varrho\,dx}{\sqrt{(R_1 N)}}=\log\left(\frac{p_1\sqrt{N}+q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N}-q\sqrt{R_1}}\right),$$

also auch

$$\int\frac{\varrho\,dx}{\sqrt{(R_1 N)}}=\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{p_1\sqrt{N}+q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N}-q\sqrt{R_1}}\right)=\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{p_1^2N+R_1+2qp_1\sqrt{(R_1N)}}{p_1^2N+R_1-2qp_1\sqrt{(R_1N)}}\right),$$

das heifst, wenn man

$$p_1^2N+R_1=p' \text{ und } 2p_1q=q'$$

fetzt,

$$\int\frac{2\varrho\,dx}{\sqrt{R}}=\log\left(\frac{p'+q'\sqrt{R}}{p'-q'\sqrt{R}}\right).$$

Es

Es ist klar, dafs p' und q' keinen gemeinschaftlichen Factor haben; also kann man immer

$$N = 1$$

setzen. Man hat also statt der Gleichung $p_1^2 N - q^2 R_1 = 1$ folgende:

$$p'^2 - q'^2 . R = 1,$$

deren Auflösung man erhält, wenn man oben N gleich 1, und R statt R_1 setzt.

Da $N = 1$, so hat man, wie leicht zu sehen,

$$t = R; \quad t_1 = r; \quad R = r^2 + s,$$

folglich:

$$24) \left\{\begin{array}{l} \frac{p'}{q'} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}, \\ R = r^2 + s, \\ \mu = E\left(\frac{r}{s}\right); \quad r = s . \mu + \varepsilon; \\ r_1 = r - \varepsilon, \quad s_1 = 1 + 4\varepsilon . \mu, \\ \mu_1 = E\left(\frac{r_1}{s_1}\right); \quad r_1 = s_1 . \mu_1 + \varepsilon_1 \\ r_2 = r_1 - \varepsilon_1, \quad s_2 = s + 4\varepsilon_1 \mu_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_n = E\left(\frac{r_n}{s_n}\right), \quad r_n = \mu_n s_n + \varepsilon_n, \\ r_{n+1} = r_n - \varepsilon_n, \quad s_{n+1} = s_{n-1} + 4\varepsilon_n \mu_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_{m-1} = E\left(\frac{r_{m-1}}{s_{m-1}}\right), \quad r_{m-1} = \mu_{m-1} . s_{m-1} + \varepsilon_{m-1}, \\ r_m = r_{m-1} - \varepsilon_{m-1}, \quad s_m = s_{m-2} + \varepsilon_{m-1} \mu_{m-1} = a. \end{array}\right.$$

Wenn nun $R, r, \mu, \mu_1, \ldots\ldots \mu_{m-1}$ durch diese Gleichungen bestimmt sind, so hat man:

$$25) \left\{\begin{array}{l} \int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{p' + q'\sqrt{R}}{p' - q'\sqrt{R}}\right), \\ \text{wo} \quad \varrho = \frac{2}{q'} \cdot \frac{dp'}{dx}, \end{array}\right.$$

wie aus der Gleichung hervorgeht, wenn man $N = 1$ setzt.

10.

Man kann dem Ausdrucke

$$\log\left(\frac{p_1\sqrt{N}+q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N}-q\sqrt{R_1}}\right)$$

eine einfachere Form geben; nemlich die Form

$$\log\left(\frac{p_1\sqrt{N}+q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N}-q\sqrt{R_1}}\right)$$

$$=\log\left(\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}}\right)+\log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right)+\log\left(\frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}}\right)+\ldots+\log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right).$$

Dieses läſst sich leicht, wie folgt, beweisen.

Wenn man setzt:

$$\frac{\alpha_m}{\beta_m}=t_1+\cfrac{1}{2\mu_0+\cfrac{1}{2\mu_1+\ldots+\cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}},$$

so ist, wie aus der Theorie der Kettenbrüche bekannt,

$$\alpha_m=\alpha_{m-2}+2\mu_{m-1}\cdot\alpha_{m-1} \qquad (a)$$

$$\beta_m=\beta_{m-2}+2\mu_{m-1}\cdot\beta_{m-1} \qquad (b)$$

Diese Gleichungen geben durch Elimination von μ_{m-1}:

$$\alpha_m\cdot\beta_{m-1}-\beta_m\cdot\alpha_{m-1}=-(\alpha_{m-1}\cdot\beta_{m-2}-\beta_{m-1}\cdot\alpha_{m-2}),$$

also

$$\alpha_m\cdot\beta_{m-1}-\beta_m\cdot\alpha_{m-1}=(-1)^{m-1};$$

wie bekannt.

Die beiden Gleichungen (a) und (b) geben ferner:

$$\alpha_m^2=\alpha_{m-2}^2+4\alpha_{m-1}\cdot\alpha_{m-2}\cdot\mu_{m-1}+4\mu_{m-1}^2\cdot\alpha_{m-1}^2,$$

$$\beta_m^2=\beta_{m-2}^2+4\beta_{m-1}\cdot\beta_{m-2}\cdot\mu_{m-1}+4\mu_{m-1}^2\cdot\beta_{m-1}^2.$$

Hieraus folgt

$$\alpha_m^2N-\beta_m^2\cdot R_1$$

$$=\alpha_{m-2}^2N-\beta_{m-2}^2\cdot R_1+4\mu_{m-1}(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N-\beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1)+4\mu_{m-1}^2(\alpha_{m-1}^2N-\beta_{m-1}^2R_1).$$

Nun aber ist:

$$\alpha_m^2\cdot N-\beta_m^2\cdot R_1=(-1)^m\cdot s_m,$$

$$\alpha_{m-1}^2\cdot N-\beta_{m-1}^2\cdot R_1=(-1)^{m-1}\cdot s_{m-1},$$

$$\alpha_{m-2}^2\cdot N-\beta_{m-2}^2\cdot R_1=(-1)^{m-2}\cdot s_{m-2},$$

also, wenn man substituirt:

$$s_m = s_{m-2} + 4(-1)^m.(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N - \beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1) - 4s_{m-1}m^2_{\mu-1}.$$

Vermöge des Vorhergehenden aber ist

$$s_m = s_{m-2} + 4\mu_{m-1}.r_{m-1} - 4s_{m-1}.m_{\mu-1},$$

folglich:

$$r_{m-1} = (-1)^m.(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N - \beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1).$$

Es sei

$$z_m = \alpha_m\sqrt{N} + \beta_m\sqrt{R_1} \text{ und } z'_m = \alpha_m\sqrt{N} - \beta_m\sqrt{R_1},$$

so erhält man, durch Multiplication:

$$z_m.z'_{m-1} = \alpha_m\alpha_{m-1}N - \beta_m\beta_{m-1}R_1 + (\alpha_m\beta_{m-1} - \alpha_{m-1}\beta_m)\sqrt{(NR_1)}.$$

Es war aber, wie wir sahen,

$$\alpha_m\beta_{m-1} - \alpha_{m-1}\beta_m = (-1)^{m-1},\ \alpha_m\alpha_{m-1}N - \beta_m\beta_{m-1}R_1 = (-1)^{m-1}.r_m,$$

folglich ist

$$z_m z'_{m-1} = (-1)^{m-1}(r_m + \sqrt{R}),$$

und auf dieselbe Weise

$$z'_m.z_{m-1} = (-1)^{m-1}(r_m - \sqrt{R}).$$

Hieraus folgt, durch Division:

$$\frac{z_m}{z'_m} : \frac{z'_{m-1}}{z_{m-1}} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}};$$

das heifst, wenn man mit $\frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}}$ multiplicirt,

$$\frac{z_m}{z'_m} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}.\frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}}.$$

Setzt man der Reihe nach

$$m = 1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots\ldots m,$$

so erhält man

$$\frac{z_1}{z'_1} = \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}.\frac{z_0}{z'_0},$$

$$\frac{z_2}{z'_2} = \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}}.\frac{z_1}{z'_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{z_m}{z'} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}.\frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}}:$$

woraus leicht folgt:

$$\frac{z_m}{z'_m} = \frac{z_0}{z_1} \cdot \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R_1}} \cdot \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R_1}} \cdot \frac{r_3 + \sqrt{R}}{r_3 - \sqrt{R}} \cdots\cdots \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}.$$

Nun aber ist

$$z_0 = \alpha_0 \sqrt{N} + \beta_0 \sqrt{R_1} = t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1},$$
$$z'_0 = \alpha_0 \sqrt{N} - \beta_0 \sqrt{R_1} = t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1},$$

und

$$\frac{z_m}{z'_m} = \frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}},$$

also

$$26). \frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}} = \frac{t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1}} \cdot \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} \cdot \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}} \cdots \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

und wenn man die Logarithmen nimmt,

$$26) \log\left(\frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}}\right)$$
$$= \log\left(\frac{t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1}}\right) + \log\left(\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\right),$$

wie zu beweisen war.

11.

Differentiirt man den Ausdruck $z = \log\left(\frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}}\right)$, so erhält man nach den gehörigen Reductionen:

$$dz = \frac{2(\alpha_m d\beta_m - \beta_m d\alpha_m) N R_1 - \alpha_m \beta_m (R_1 dN - N dR_1)}{(\alpha_m^2 . N - \beta_m^2 . R_1) . \sqrt{(N . R_1)}}.$$

Nun ist

$$\alpha_m^2 . N - \beta_m^2 . R_1 = (-1)^{m-1} . s_m.$$

also wenn man

$$27) \quad (-1)^{m-1} . \varrho_m = 2\left(\alpha_m \frac{d\beta_m}{dx} - \beta_m \frac{d\alpha_m}{dx}\right) N R_1 - \alpha_m \beta_m \frac{(R_1 dN - N dR_1)}{dx}$$

setzt,

$$dz = \frac{\varrho_m}{s_m} . \frac{dx}{\sqrt{(N . R_1)}},$$

$$\text{und } z = \int \frac{\varrho_m . dx}{s_m \sqrt{(N . R_1)}},$$

folglich

$$\int \frac{\varrho_m}{s_m} . \frac{dx}{\sqrt{(R_1 N)}} = \log\left(\frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}}\right),$$

oder:

$$28)\quad \int \frac{\varrho_m}{s_m} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

$$=\log\left(\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}}\right)+\log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right)+\log\left(\frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}}\right)+\ldots+\log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right).$$

In diesem Ausdruck ist s_m höchstens vom $(n-1)^{\text{ten}}$ und ϱ_m nothwendig vom $(n-1+\delta s_m)^{\text{ten}}$ Grade, wovon man sich auf folgende Weise überzeugen kann.

Differentiirt man die Gleichung

$$29)\quad \alpha_m^2 \cdot N - \beta_m^2 \cdot R_1 = (-1)^{m-1} \cdot s_m,$$

so findet man folgende:

$$2\alpha_m N d\alpha_m + \alpha_m^2 dN - 2\beta_m d\beta_m R_1 - \beta_m^2 dR_1 = (-1)^{m-1} ds_m,$$

oder, wenn man mit $\alpha_m N$ multiplicirt,

$$\alpha_m^2 N(2Nd\alpha_m + \alpha_m dN) - 2\alpha_m\beta_m d\beta_m NR_1 - \beta_m^2\alpha_m NdR_1 = (-1)^{m-1}\cdot\alpha_m Nds_m.$$

Setzt man hier statt $\alpha_m^2 N$ seinen Werth aus der Gleichung (29), so erhält man

$$(-1)^{m-1} s_m (2Nd\alpha_m + \alpha_m dN)$$

$$+\beta_m\left(2NR_1\beta_m d\alpha_m + \alpha_m\beta_m R_1 dN - 2\alpha_m d\beta_m NR_1 - \beta_m\alpha_m NdR_1\right) = (-1)^{m-1}\alpha_m Nds_m,$$

das heifst:

$$\beta_m\left(2(\alpha_m d\beta_m - \beta_m d\alpha_m)NR_1 - \alpha_m\beta_m\,(R_1 dN - NdR_1)\right)$$

$$=(-1)^{m-1}\left(s_m(2Nd\alpha_m + \alpha_m dN) - \alpha_m Nds_m\right).$$

Nun ist, vermöge der Gleichung (27.), die Gröfse linker Hand gleich $\beta_m(-1)^{m-1}\varrho_m dx$, also hat man

$$30)\quad \beta_m \cdot \varrho_m = s_m\left(\frac{2Nd\alpha_m}{dx} + \frac{\alpha_m dN}{dx}\right) - \alpha_m \frac{Nds_m}{dx}.$$

Weil nun $\delta s_m < n$, so ist die Function rechter Hand, wie leicht zu sehen, nothwendig vom $(\delta s_m + \delta N + \delta \alpha_m - 1)^{\text{ten}}$ Grade; also

$$\delta\varrho_m = \delta s_m + \delta N + \delta\alpha_m - \delta\beta_m - 1.$$

Aber aus der Gleichung folgt, dafs

$$2\delta\alpha_m + \delta N = 2\delta\beta_m + \delta R_1,$$

also

$$d\varrho_m = \delta s_m + \frac{\delta N + \delta R_1}{2} - 1,$$

oder, da $\delta N + \delta R_1 = 2n$,

$$\delta\varrho_m = \delta s_m + n - 1,$$

das heifst: ϱ_m ist nothwendig vom $(\delta s_m + n - 1)^{\text{ten}}$ Grade.

Daraus folgt, dafs die Function $\frac{\varrho_m}{s_m}$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist.

Setzt man in die Formel (28.) $N = 1$, so ist $t_1 = r$, und also

$$31)\quad \int \frac{\varrho_m \cdot dx}{s_m \sqrt{R}} = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots\ldots + \log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right),$$

wo, zu Folge der Gleichung (30.),

$$\beta_m \cdot \varrho_m = 2 s_m \frac{d\alpha_m}{dx} - \alpha_m \cdot \frac{ds_m}{dx}.$$

Setzt man in die Formel

$$s_m = \alpha,$$

so ist:

$$32)\quad \int \frac{\varrho_m \cdot dx}{\alpha \sqrt{R}} = \log\left(\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right),$$

wo

$$\beta_m \cdot \varrho_m = \alpha \cdot \left(2N \cdot \frac{d\alpha_m}{dx} + \alpha_m \frac{dN}{dx}\right),$$

und wenn man $N = 1$ setzt,

$$33)\quad \int \frac{\varrho_m \cdot dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right),$$

wo

$$\varrho_m = \frac{2}{\beta_m} \cdot \frac{d\alpha_m}{dx}.$$

Dem Obigen zu Folge ist diese Formel eben so allgemein als die Formel (30.), und giebt alle Integrale von der Form $\int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}}$, wo ϱ und R ganze Functionen sind, die sich durch eine logarithmische Function von der Form

$$\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$$

ausdrücken lassen.

12.

In dem Ausdruck (28.) ist die Function $\frac{\varrho_m}{s_m}$ durch die Gleichung (30.) gegeben. Man kann aber diese Function auf eine bequemere Art, mit Hülfe der Gröfsen t_1, r_1, r_2, etc. μ, μ_1, μ_2, ... ausdrücken.

Man bezeichne die Function

$$\log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right) \text{ durch } z_m,$$

so erhält man, wenn man das Differential nimmt,

$$dz_m = \frac{dr_m + \frac{1}{2}\cdot\frac{dR}{\sqrt{R}}}{r_m + \sqrt{R}} - \frac{dr_m - \frac{1}{2}\cdot\frac{dR}{\sqrt{R}}}{r_m - \sqrt{R}},$$

oder, wenn man reducirt,

$$dz_m = \frac{r_m \cdot dR - 2R dr_m}{r_m^2 - R} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Nun ist, wie wir vorhin sahen,

$$s_m = s_{m-2} + 4\mu_{m-1} \cdot r_{m-1} - 4 s_{m-1} \cdot \mu_{m-1}^2,$$

also, wenn man mit s_{m-1} multiplicirt,

$$s_m . s_{m-1} = s_{m-1} \cdot s_{m-2} + 4\mu_{m-1} s_{m-1} \cdot r_{m-1} - 4 (s_{m-1} \mu_{m-1})^2,$$

das heifst:

$$s_m \cdot s_{m-1} = s_{m-1} \cdot s_{m-2} + r_{m-1}^2 - (2 s_{m-1} \mu_{m-1} - r_{m-1})^2.$$

Nun ist

$$r_m = 2 s_{m-1} \mu_{m-1} - r_{m-1},$$

folglich, wenn man diese Gröfse substituirt,

$$s_m \cdot s_{m-1} = s_{m-1} s_{m-2} + r_{m-1}^2 - r_m^2,$$

woraus man man durch Transposition

$$r_m^2 + s_m \cdot s_{m-1} = r_{m-1}^2 + s_{m-1} \cdot s_{m-2}$$

findet.

Aus dieser Gleichung folgt, dafs $r_m^2 + s_m \cdot s_{m-1}$ einen und denselben Werth für alle m hat, und dafs also auch

$$r_m^2 + s_m s_{m-1} = r_1^2 + s_1 . s,$$

ist. Wir sahen aber oben, dafs $r_1^2 + s s_1 = R$, also auch

$$34)\ R = r_m^2 + s_m s_{m-1}.$$

Setzt man diesen Ausdruck für R in die Gleichung, so erhält man nach gehörigen Reductionen:

$$dz_m = \frac{2 dr_m}{\sqrt{R}} - \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} - \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}.$$

Da nun

$$r_m = 2 s_{m-1} \mu_{m-1} - r_{m-1}$$

ist, so geht das Glied $-\frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$ in

$$-2\mu_{m-1} \cdot \frac{ds_{m-1}}{\sqrt{R}} + \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}}$$

über. Also erhält man

$$dz_m = (2dr_m - 2\mu_{m-1} \cdot ds_{m-1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} + \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}},$$

und durch Integration

$$35) \int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} = -z_m + \int (2dr_m - 2\mu_{m-1}\, ds_{m-1}) \frac{1}{\sqrt{R}} + \int \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}}.$$

Dieser Ausdruck ist, wie man sieht, eine Reductions-Formel für die Integrale von der Form $\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$. Sie giebt nemlich das Integral $\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$ durch ein anderes Integral von derselben Form und durch ein Integral von der Form $\int \frac{t\,dx}{\sqrt{R}}$, wo t eine ganze Function ist.

Setzt man nun in diese Formel statt m der Reihe nach $m-1$, $m-2$, ... 3, 2, so erhält man $m-1$ ähnliche Gleichungen, welche addirt, folgende geben, wenn man bemerkt, dafs r_0 dasselbe ist wie $2s\mu - r_1$, das heifst, vermöge der Gleichung

$$r_1 + t_1 N = 2s\mu,$$

dasselbe wie $-t_1 N$:

$$\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} = -(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots\ldots + z_m) - \int \frac{ds}{s} \cdot \frac{t_1 N}{\sqrt{R}}$$
$$+ \int 2\,(dr_1 + dr_2 + dr_3 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \mu_2 ds_2 \ldots - \mu_m ds_m) \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Man kann nun ferner das Integral $\int \frac{ds}{s} \cdot \frac{t_1 N}{\sqrt{R}}$ reduciren. Differentiirt man nemlich den Ausdruck

$$z = \log \left(\frac{t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1}} \right),$$

so erhält man nach einigen Reductionen:

$$dz = \frac{-2dt_1 N R_1 - t_1 (R_1 dN - N dR_1)}{(t_1^2 N - R_1) \sqrt{R}}.$$

Nun ist

$$R_1 = t_1^2 N + s.$$

Substituirt man also in die obige Gleichung statt R_1 diesen Ausdruck, so findet man

$$dz = (2N dt_1 + t_1 dN) \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{ds}{s} \cdot \frac{t_1 N}{\sqrt{R}},$$

folglich, wenn man integrirt,

$$\int \frac{ds}{s} \cdot \frac{t_1 N}{\sqrt{R}} = -z + \int (2N dt_1 + dN t_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Da-

Dadurch geht der Ausdruck für $\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$ in folgenden über:

$$\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} = -(z + z_1 + z_2 + \ldots\ldots\ldots + z_m)$$

$$+\int 2\left(Ndt_1 + \tfrac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + dr_2 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \mu_2 ds_2 - \ldots - \mu_m ds_m\right),$$

das heifst, wenn man statt z, z_1, z_2 ...... ihre Werthe setzt:

$$36)\quad \int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$$

$$= \int 2\left(Ndt_1 + \tfrac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + dr_2 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_m ds_m\right),$$

$$-\log\left(\frac{t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}}\right) - \log\left(\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\right) - \log\left(\frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}}\right) - \log\left(\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\right).$$

Diese Formel ist ganz dieselbe wie die Formel (28), und giebt:

$$37)\quad \frac{\varrho_m}{s_m} = -\frac{r_m ds_m}{s_m} + 2\left(Ndt_1 + \tfrac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 \ldots - \mu_m ds_m\right).$$

Der obige Ausdruck erspart aber die Berechnung der Functionen α_m und β_m.

Wenn nun s_m unabhängig von x ist, so verschwindet das Integral $\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$, und man erhält folgende Formel:

$$38)\quad \int \frac{2}{\sqrt{R}}\left(\tfrac{1}{2}t_1 dN + Ndt_1 + dr_1 + dr_2 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_{m-1} ds_{m-1}\right)$$

$$+\log\left(\frac{t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}}\right) + \log\left(\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m + \sqrt{R}}\right).$$

Wenn in dem Ausdruck (16.) $N = 1$, so ist $t_1 = r$, und folglich:

$$39)\quad \int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} = \int 2\left(dr + dr_1 + dr_2 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_m ds_m\right)$$

$$-\log\left(\frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}}\right) - \log\left(\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\right) - \ldots\ldots - \log\left(\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\right),$$

und wenn man hier $s_m = a$ setzt:

$$40)\quad \left\{\begin{array}{l} \int 2\left(dr + dr_1 + dr_2 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_{m-1} ds_{m-1}\right) \\ = \log\left(\frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\right) + \ldots\ldots + \log\left(\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\right). \end{array}\right.$$

Dem Obigen zu Folge hat diese Formel dieselbe Allgemeinheit wie (38.),

und giebt daher alle Integrale von der Form $\int \frac{t\,dx}{\sqrt{R}}$, wo t eine ganze Function ist, die durch eine Function von der Form

$$\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$$

ausgedrückt werden kann.

13.

Wir sahen oben, daſs

$$\sqrt{\frac{R_1}{N}} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \text{etc.}}}}}$$

also, wenn man $N = 1$ setzt:

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \dots}}}}$$

Im Allgemeinen sind die Gröſsen $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots\dots \mu_n$ von einander verschieden. Wenn aber eine der Gröſsen $s, s_1, s_2, \dots\dots s_m$ unabhängig von x ist, so wird der Kettenbruch periodisch. Dieses kann man auf folgende Art beweisen:

Es ist

$$r_{m+1}^2 + s_m \cdot s_{m+1} = R = r^2 + s,$$

also, wenn $s_m = a$,

$$r_{m+1}^2 - r^2 = s - a\,s_{m+1} = (r_{m+1} + r)(r_{m+1} - r).$$

Nun ist $\delta r_{m+1} = \delta r$, $\delta s < \delta r$, $\delta s_{m+1} < \delta r$, folglich kann diese Gleichung nicht bestehen, wenn nicht zu gleicher Zeit

$$r_{m+1} = r,\ s_{m+1} = \frac{s}{a}.$$

Da nun

$$\mu_{m+1} = E\left(\frac{r_{m+1}}{s_{m+1}}\right),$$

so ist auch

$$\mu_{m+1} = a \,.\, E\left(\frac{r}{s}\right),$$

das heiſst, weil $E\left(\frac{r}{s}\right) = \mu$,

$$\mu_{m+1} = a\mu.$$

Es ist ferner

$$s_{m+2} = s_m + 4\mu_{m+1} r_{m+1} - 4\mu_{m+1}^2 \cdot s_{m+1};$$

das heifst, weil $s_m = a$, $r_{m+1} = r$, $\mu_{m+1} = a\mu$,

$$s_{m+2} = a(1 + 4\mu r - 4\mu^2 s);$$

folglich, da $s_1 = 1 + 4\mu r - 4\mu^2 s$,

$$s_{m+2} = a s_1.$$

Nun ist

$$r_{m+2} = 2\mu_{m+1} s_{m+1} - r_{m+1} = 2\mu s - r,$$

also, da $r_1 = 2\mu s - r$,

$$r_{m+2} = r_1.$$

Daraus folgt ferner

$$\mu_{m+2} = \pm \mathrm{E}\frac{r_{m+2}}{s_{m+2}} = \frac{1}{a}\,\mathrm{E}\frac{r_1}{s_1},.$$

also:

$$\mu_{m+2} = \frac{\mu_1}{a}.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, so ist leicht zu sehen, dafs allgemein:

$$41)\quad \begin{cases} r_{m+n} = r_{n-1}, \quad s_{m+n} = a^{\pm 1} \cdot s_{n-1} \\ \mu_{m+n} = a^{\pm 1} \cdot \mu_{n-1}. \end{cases}$$

Das Zeichen + mufs genommen werden, wenn n gerade ist, und das Zeichen —, wenn n ungerade ist.

Setzt man in die Gleichung

$$r_m^2 + s_{m-1}\, s_m = r^2 + s$$

a statt s_m, so erhält man

$$(r_m - r)(r_m + r) = s - a \cdot s_{m-1}.$$

Hieraus folgt

$$r_m = r, \quad s_{m-1} = \frac{s}{a}.$$

Nun ist $\mu_m = E\left(\frac{r_m}{s_m}\right)$, also

$$\mu_m = \frac{1}{a}\cdot \mathrm{E}(r),$$

das heifst

$$\mu_m = \frac{1}{a}\cdot r.$$

Ferner hat man

$$r_m + r_{m-1} = 2 s_{m-1} \cdot \mu_{m-1},$$

das heifst, da $r_m = r$, $s_{m-1} = \frac{s}{a}$,

$$r + r_{m-1} = \frac{2s}{a} \cdot \mu_{m-1}.$$

Aber $r + r_1 = 2s\mu$, also

$$r_{m-1} - r_1 = \frac{2s}{a}(\mu_{m-1} - a\mu).$$

Nun ist

$$r_{m-1}^2 + s_{m-1} \cdot s_{m-2} = r_1^2 + s \cdot s_1,$$

das heifst, weil $s_{m-1} = \frac{s}{a}$,

$$(r_{m-1} + r_1)(r_{m-1} - r_1) = \frac{s}{a}(as_1 - s_{m-2}).$$

Wir sahen aber, dafs

$$r_{m-1} - r_1 = \frac{2s}{a}(\mu_{m-1} - a\mu),$$

also, wenn man substituirt,

$$2(r_{m+1} + r_1)(\mu_{m-1} - a\mu) = as_1 - s_{m-2}.$$

Da nun $\delta(r_{m+1} + r_1) > \delta(as_1 - s_{m-1})$, so giebt diese Gleichung

$$\mu_{m-1} = a\mu, \; s_{m-1}\, as_1,$$

folglich auch

$$r_{m-1} = r_1.$$

Durch ein ähnliches Verfahren findet man leicht:

$$r_{m-2} = r_2, \; s_{m-3} = \frac{1}{a} \cdot s_2, \; \mu_{m-2} = \frac{\mu_1}{a},$$

und allgemein:

$$42) \begin{cases} r_{m-n} = r_{n-1}, \; s_{m-n} = a^{\pm 1} s_{n-1} \\ \mu_{m-n} = a^{\pm 1} \cdot \mu_{n-1}. \end{cases}$$

14.

Es sei nun:

A) m eine gerade Zahl, $= 2k$

In diesem Falle ist leicht zu sehen, dafs, vermöge der Gleichungen (41.) und (42.), die Gröfsen $r, r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots s, s_1, s_2 \ldots\ldots \mu, \mu_1, \mu_2 \ldots\ldots$ folgende Reihen bilden:

0	1	2 .... 2k−2	2k−1	2k	2k+1	2k+2 ... 4k−1	4k	4k+1	4k+2	4k+3	4k+4	
r	r_1	$r_2 \ldots\ldots r_2$	r_2	r	r	$r_1 \ldots r_2$	r_1	r	r	r_1	r_2	etc.
s	s_1	$s_2 \ldots\ldots as_1$	$\frac{s}{a}$	a	$\frac{s}{a}$	$as_1 \ldots s_1$	s	1	s	s_1	s_2	etc.
μ	μ_1	$\mu_2 \ldots\ldots \frac{\mu_1}{a}$	$a\mu$	$\frac{r}{a}$	$a\mu$	$\frac{\mu_1}{a} \ldots \mu_1$	μ	r	μ	μ_1	μ_2	etc.

B) Es sei m eine ungerade Zahl, $= 2k - 1$.

In diesem Falle geben die Gleichungen

$$s_{m-n} = a^{\pm 1} s_{n-1} \text{ und } s_{2k-n-1} = a^{\pm 1} s_{n-1}$$

für $n = k$,

$$s_{k-1} = a^{\pm 1} s_{k-1},$$

folglich

$$a = 1.$$

Die Gröfsen r, r_1 etc. s, s_1 etc. μ, μ_1 etc. bilden also folgende Reihen:

0	1	2 .... k−2	k−1	k	k+1 .... 2k−2	2k−1	2k	2k+1	2k+2	etc.
r	r_1	$r_2 \ldots\ldots r_{k-2}$	r_{k-1}	r_{k-1}	$r_{k-2} \ldots\ldots r_1$	r	r	r_1	r_2	etc.
s	s_1	$s_2 \ldots\ldots s_{k-2}$	s_{k-1}	s_{k-2}	$s_{k-3} \ldots\ldots s$	1	s	s_1	s_2	etc.
μ	μ_1	$\mu_2 \ldots\ldots \mu_{k-2}$	μ_{k-1}	μ_{k-2}	$\mu_{k-3} \ldots\ldots \mu$	r	μ	μ_1	μ_2	etc.

Hieraus siehet man, dafs wenn eine der Gröfsen $s, s_1, s_2 \ldots\ldots$ unabhängig von x ist, so ist der aus $\sqrt{R}$ entstehende Kettenbruch immer periodisch, und hat allgemein folgende Form, wenn $s_m = a$,

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \ldots + \cfrac{1}{\frac{2\mu_1}{a} + \cfrac{1}{2a\mu + \cfrac{1}{\frac{2r}{a} + \cfrac{1}{2a\mu + \cfrac{1}{\frac{2\mu_1}{a} + \text{etc.} + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{2\mu + \ldots}}}}}}}}}}$$

Wenn m ungerade ist, so hat man überdem $a = 1$, und alsdann

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \ldots + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

Das Umgekehrte findet ebenfalls Statt; das heifst: wenn der aus $\sqrt{R}$ entstehende Kettenbruch die obige Form hat, so ist s_m unabhängig von x. Denn es sei

$$\mu_m = \frac{r}{a},$$

so hat man, da

$$r_m = s_m \cdot \mu_m + \varepsilon_m,$$

$$r_m = \frac{r}{a} \cdot s_m + \varepsilon_m.$$

Da nun $r_m = r_{m-1} + \varepsilon_{m-1}$, wo $\delta\varepsilon_{m-1} < \delta r$, so ist klar, dafs auch

$$r_m = r + \gamma_m, \text{ wo } \delta\gamma_m < \delta r.$$

Dadurch wird die Gleichung

$$r\left(1 - \frac{s_m}{a}\right) = \varepsilon_m - \gamma_m,$$

folglich:

$$s_m = a;$$

wie zu beweisen war.

Verbindet man nun dieses mit dem Vorhergehenden, so findet man folgenden Satz:

„Wenn es möglich ist, für ϱ eine ganze Function von der Art zu finden, dafs

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{y + \sqrt{R}}{y - \sqrt{R}}\right),$$

„so wird der aus $\sqrt{R}$ entstehende Kettenbruch periodisch sein, und folgende „Form haben:

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

„und umgekehrt, wenn der aus $\sqrt{R}$ entstehende Kettenbruch diese Form hat, so „ist es immer möglich, für ϱ eine ganze Function zu finden, die der Gleichung

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{y + \sqrt{R}}{y - \sqrt{R}}\right)$$

„genugthut. Die Function y ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$y = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r}}}}}.$$

In diesem Satz ist die vollständige Auflösung der im Anfang dieser Abhandlung aufgestellten Aufgabe enthalten,

15.

Wir haben gesehen, daſs wenn s_{2k-1} unabhängig von x ist, allemal $s_k = s_{k-2}$, und wenn s_{2k} unabhängig von x ist, $s_k = c s_{k-1}$ ist, wo c constant ist. Das Umgekehrte findet ebenfalls Statt, wie sich auf folgende Art beweisen läſst:

I. Es sei zuerst $s_k = s_{k-2}$.

Es ist

$$r_{k-1}^2 + s_{k-1}\, s_{k-2} = r_k^2 + s_k \cdot s_{k-1},$$

also, da $s_k = s_{k-2}$,

$$r_k = r_{k-1}.$$

Nun ist

$$r_k = \mu_k \cdot s_k + \varepsilon_k,$$
$$s_{k-2} = \mu_{k-2} \cdot s_{k-2} + \varepsilon_{k-2},$$

folglich

$$r_k - r_{k-2} = s_k(\mu_k - \mu_{k-2}) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}.$$

Aber

$$r_k = r_{k-1}, \quad r_{k-2} = r_{k-1} + 2\varepsilon_{k-2},$$

folglich, wenn man substituirt,

$$0 = s_k(\mu_k - \mu_{k+2}) + \varepsilon_k + \varepsilon_{k-2}.$$

Diese Gleichung giebt, wenn man bemerkt, daſs: $\delta\varepsilon_k < \delta s_k$; $\delta\varepsilon_{k-2} < \delta s_{k-2}$,

$$\mu_k = \mu_{k-2}, \quad \varepsilon_k = -\varepsilon_{k-2}.$$

Ferner ist $r_{k+1} = r_k - 2\varepsilon_k$, also, vermöge der letzten Gleichung,

$$r_{k+1} = r_{k-1} + 2\varepsilon_{k-2},$$

das heiſst, weil $r_{k-1} = r_{k-2} - 2\varepsilon_{k-2}$,

$$r_{k+1} = r_{k-2}.$$

Nun ist

$$r_{k+1}^2 + s_k \cdot s_{k+1} = r_{k-2} + s_{k-2} \cdot s_{k-3},$$

also, da $r_{k+1} = r_{k-2}$, $s_k = s_{k-2}$, auch

$$s_{k+1} = s_{k-3}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den Gleichungen

$$r_{k+1} = \mu_{k+1} \cdot s_{k+1} + \varepsilon_{k+1} \quad \text{und} \quad r_{k-3} = \mu_{k-3} \cdot s_{k-3} + \varepsilon_{k-3},$$

so erhält man

$$r_{k+1} - r_{k-3} = s_{k+1}(\mu_{k+1} - \mu_{k-3}) + \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k-3}.$$

Nun aber ist

$$r_{k+1} = r_{k-2} \text{ und } r_{k-2} = r_{k-3} - 2\varepsilon_{k-3},$$

folglich

$$0 = s_{k+1}(\mu_{k+1} - \mu_{k-3}) + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k-3}.$$

Hieraus folgt

$$\mu_{k+1} = \mu_{k-3}, \quad \varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_{k-3}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so ist leicht zu sehen, dafs allgemein:

$$r_{k+n} = r_{k-n-1}; \quad \mu_{k+n} = \mu_{k-n-2}, \quad s_{k+n} = s_{k-n-2}.$$

Setzt man in die letzte Gleichung $n = k - 1$, so findet man

$$s_{2k-1} = s_{-1}.$$

Nun ist klar, dafs s_{-1} dasselbe ist wie 1; denn es ist allgemein

$$R = r_m^2 + s_m \cdot s_{m-1},$$

also, wenn $m = 0$,

$$R = r^2 + s \cdot s_{-1}.$$

Aber $R = r^2 + s$, folglich $s_{-1} = 1$, und also auch

$$s_{2k-1} = 1.$$

II. Es sei zweitens $s_k = cs_{k-1}$.

Es ist

$$r_k = \mu_k \cdot s_k + \varepsilon_k \text{ und } r_{k-1} = \mu_{k-1} \cdot s_{k-1} + \varepsilon_{k-1},$$

folglich:

$$r_k - r_{k-1} = s_{k-1}(c\mu_k - \mu_{k-1}) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}.$$

Nun ist $r_k - r_{k-1} = -2\varepsilon_{k-1}$, folglich

$$0 = s_{k-1}(c\mu_k - \mu_{k-1}) + \varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}.$$

Diese Gleichung giebt

$$\mu_k = \frac{1}{c} \cdot \mu_{k-1}, \quad \varepsilon_k = -\varepsilon_{k-1}.$$

Da nun

$$r_k - r_{k-1} = -2\varepsilon_{k-1}, \quad r_{k+1} - r_k = -2\varepsilon_k,$$

so erhält man durch Addition

$$r_{k+1} = r_{k-1}.$$

Ferner ist

$$r_{k+1}^2 + s_k \cdot s_{k+1} = r_{k-1}^2 + s_{k-1} \cdot s_{k-2},$$

also, da $r_{k+1} = r_{k-1}$, $s_k = cs_{k-1}$,

$$s_{k+1} = \frac{1}{c} \cdot s_{k-2}.$$

Fährt

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man

$$s_{2k} = c^{\pm 1},$$

also, s_{2k} unabhängig von x.

Diese Eigenschaft der Gröfsen s, s_1, s_2 etc. zeigt, dafs die Gleichung $s_{2k} = a$ mit $s_k = a^{\pm 1} . s_{k-1}$, und die Gleichung $s_{2k-1} = 1$ mit $s_k = s_{k-2}$ identisch ist. Wenn man also die zu $s_{2k} = a$ gehörige Form der Function R sucht, so kann man statt $s_{2k} = a$, $s_k = a^{\pm 1} . s_{k-1}$ setzen, und wenn man die zu der Gleichung $s_{2k} = 1$ gehörige Form sucht, so ist es hinreichend, $s_k = s_{k-2}$ zu setzen; was die Rechnung sehr abkürzt.

16.

Vermöge der Gleichungen (41.) und (42.) kann man dem Ausdrucke (40.) eine einfachere Form geben.

Man erhält nemlich:

a) Wenn m gerade und $= 2k$ ist:

$$43) \left\{ \begin{array}{l} \int 2(dr + dr_1 + \ldots + dr_{k-1} + \frac{1}{2} dr_k - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_{k-1} ds_{k-1}) \frac{1}{\sqrt{R}} \\ = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_{k-1}+\sqrt{R}}{r_{k-1}-\sqrt{R}}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{r_k+\sqrt{R}}{r_k-\sqrt{R}}\right). \end{array} \right.$$

b) Wenn m ungerade und $= 2k - 1$ ist:

$$44) \left\{ \begin{array}{l} \int 2(dr + dr_1 + \ldots + dr_{k-1} - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_{k-2} ds_{k-2} - \frac{1}{2}\mu_{k-1} ds_{k-1}) \frac{1}{\sqrt{R}} \\ = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots\ldots + \log\left(\frac{r_{k-1}+\sqrt{R}}{r_{k-1}-\sqrt{R}}\right). \end{array} \right.$$

17.

Um das Obige auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir das Integral

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{(x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)}}$$

nehmen.

Hier ist $\delta R = 4$, also sind die Functionen s, s_1, s_2, s_3 ...... vom ersten Grade, und folglich giebt die Gleichung $s_m = \text{Const.}$ nur eine Bedingungs-Gleichung zwischen den Gröfsen α, β, γ, δ, ε.

Wenn man

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = (x^2 + ax + b)^2 + c + ex$$

setzt, so hat man:

$$r = x^2 + ax + b, \quad s = c + ex.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, wollen wir $c = 0$ setzen.

Alsdann ist

$$s = ex, \text{ und folglich}$$

$$\mu = E\left(\frac{r}{s}\right) = E\left(\frac{x^2 + ax + b}{ex}\right),$$

das heifst:

$$\mu = \frac{x}{e} + \frac{a}{e}, \quad \varepsilon = b.$$

Ferner

$$r_1 = r - 2\varepsilon = x^2 - ax + b - 2b = x^2 + ax - b,$$

$$s_1 = 1 + 4\varepsilon\mu = 1 + 4b \cdot \frac{x + a}{e} = \frac{4b}{e} \cdot x + \frac{4ab}{e} + 1,$$

$$\mu_1 = E\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = E\left\{\frac{x^2 + ax - b}{\frac{4b}{e} \cdot x + \frac{4ab}{e} + 1}\right\} = \frac{e}{4b} \cdot x - \frac{e^2}{16b^2},$$

$$\varepsilon_1 = r_1 - \mu_1 s_1 = \frac{ae}{4b} + \frac{e^2}{16b^2} - b,$$

$$s_2 = s + 4\varepsilon_1\mu_1 = \left(\frac{ae^2}{4b^2} + \frac{e^3}{16b^3}\right)x - \frac{e^2}{4b^2}\left(\frac{ae}{4b} + \frac{e^2}{16b^2} - b\right).$$

Es sei nun

Erstens: $s_1 =$ constant.

Alsdann giebt die Gleichung

$$s_1 = \frac{4b}{e} x + \frac{4ab}{e} + 1,$$

$$b = 0,$$

folglich

$$R = x^2 + ax,$$

$$\int 2(dr - \tfrac{1}{2}\mu ds)\frac{1}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}}\right),$$

das heifst, weil $\mu = \frac{x + a}{e}$, $s = ex$,

$$\int \frac{(3x + a)\,dx}{\sqrt{((x^2 + ax)^2 + ex)}} = \log\left(\frac{x^2 + ax + \sqrt{R}}{x^2 + ax - \sqrt{R}}\right).$$

Dieses Integral findet man auch leicht, wenn man Zähler und Nenner des Differentials mit x multiplicirt.

Zweitens: Es sei $s_2 =$ constant.

In diesem Fall giebt die Formel, weil $k = 1$,

$$\int 2(dr + \tfrac{1}{2}dr_1 - \mu\, ds)\frac{1}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right) + \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right).$$

Nun aber giebt $s_2 =$ Const., $s_1 = cs$, also

$$\frac{4b}{e}\cdot x + \frac{4ab}{e} + 1 = cex,$$

folglich die Bedingungs-Gleichung $\frac{4ab}{e} + 1 = 0$, das heifst:

$$e = -4ab,$$

folglich

$$R = (x^2 + ax + b)^2 - 4abx.$$

Da nun ferner $\mu = \frac{x+a}{e}$, $r = x^2 + ax + b$, $r_1 = x^2 + ax - b$, so wird die Formel:

$$\int \frac{(4x+a)\,dx}{\sqrt{((x^2+ax+b)^2 - 4abx)}} = \log\left(\frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}}\right) + \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}\right).$$

Drittens: Es sei $s_3 =$ Const.

Diese Gleichung giebt $s = s_2$, das heifst:

$$\frac{ae}{4b} + \frac{e^2}{16b^2} - b = 0.$$

Hieraus findet man

$$e = -2b\left(a \pm \sqrt{(a^2 + 4b)}\right).$$

Die Formel (44.) giebt folglich, weil $k = 2$,

$$\int \frac{\left(5x + \tfrac{3}{2}a \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+4b)}\right).\,dx}{\sqrt{\left((x^2+ax+b)^2 - 2b\left(a \pm \sqrt{(a^2+4b)}\right).x\right)}}$$

$$= \log\left(\frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}\right).$$

Ist z. B. $a = 0$, $b = 1$, so erhält man folgendes Integral:

$$\int \frac{(5x-1).\,dx}{\sqrt{((x^2+1)^2 - 4x)}}$$

$$= \log\left(\frac{x^2+1+\sqrt{((x^2+1)^2-4x)}}{x^2+1-\sqrt{((x^2+1)^2-4x)}}\right) + \log\left(\frac{x^2-1+\sqrt{((x^2+1)^2-4x)}}{x^2-1-\sqrt{((x^2+1)^2-4x)}}\right).$$

Viertens: Es sei $s_4 =$ Const.

Dieses giebt $s_2 = cs_1$, das heifst:

$$\left(\frac{ae^2}{b^2}+\frac{e^3}{4b^3}\right)x-\frac{e^2}{4b^2}\left(\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b\right)=\frac{4cb}{e}.x+\left(\frac{4ab}{e}+1\right).c.$$

Hieraus erhält man, wenn man die Coefficienten vergleicht und nachher c eliminirt,

$$\frac{e}{16b^3}(e+4ab)^2=-\frac{e}{b}\left(\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b\right),$$

$$(e+4ab)^2=16b^2-e(e+4ab),$$

$$e^2+6ab\,.\,e=8b^3-8a^2b^2,$$

$$e=-3ab\mp\sqrt{(8b^3+a^2b^2)}=-b\left((3a\pm\sqrt{(a^2+8b)}\right).$$

Vermöge dieses Ausdrucks giebt die Formel (43.)

$$\int\frac{\left(6x+\tfrac{3}{2}a-\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+8b)}\;dx\right)}{\sqrt{\left((x^2+ax+b)^2-b(3a+\sqrt{(a^2+8b)}\,x\right)}}=\log\left(\frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}}\right)$$

$$+\log\left(\frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}\right)+\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+ax+\tfrac{1}{4}(a-\sqrt{(a^2+8b)})+\sqrt{R}}{x^2+ax+\tfrac{1}{4}(a-\sqrt{(a^2+8b)})-\sqrt{R}}\right).$$

Setzt man z. B. $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, so bekommt man:

$$\int\frac{(x+\tfrac{1}{6})\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+x+\tfrac{1}{4}}}=\tfrac{1}{6}\log\left(\frac{x^2+\tfrac{1}{2}+\sqrt{(x^4+x^2+x+\tfrac{1}{4})}}{x^2+\tfrac{1}{2}-\sqrt{(x^4+x^2+x+\tfrac{1}{4})}}\right)$$

$$+\tfrac{1}{6}\log\left(\frac{x^2-\tfrac{1}{2}+\sqrt{(x^4+x^2+x+\tfrac{1}{4})}}{x^2-\tfrac{1}{2}-\sqrt{(x^4+x^2+x+\tfrac{1}{4})}}\right)+\tfrac{1}{12}\log\left(\frac{x^2+\sqrt{(x^4+x^2+x+\tfrac{1}{4})}}{x^2-\sqrt{(x^4+x^2+x+\tfrac{1}{4})}}\right).$$

Auf diese Weise kann man fortfahren und noch mehrere Integrale finden. So z. B. läſst sich das Integral

$$\int\frac{(x+\tfrac{1}{7})\,.\,dx}{\sqrt{\left(\left(x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+(\sqrt{5}-1)^2\,.\,x\right)}}$$

durch Logarithmen ausdrücken.

Wir haben hier die Integrale von der Form $\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$ gesucht, die sich durch eine logarithmische Function von der Form

$$\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$$

ausdrücken lassen.

Man könnte das Problem noch allgemeiner machen, und allgemein alle Integrale von einerlei Form suchen, die sich auf irgend eine Weise durch Logarithmen ausdrücken lassen; allein man würde keine neue Integrale finden. Es findet nemlich folgendes merkwürdige Theorem Statt:

„Wenn ein Integral von der Form

$$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}},$$

„wo ϱ und R ganze Functionen von x sind, durch Logarithmen ausgedrückt „werden kann, so kann man es immer auch folgender Maſsen ausdrücken:

$$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}} = A \log \left(\frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}\right).$$

„wo A constant ist und p und q ganze Functionen von x sind."

Dieses Theorem werde ich bei einer andern Gelegenheit beweisen.

20.

Bemerkung über die Lagrangische Interpolations-Formel.

(Von Herrn Prof. *Dirksen*.)

Bekanntlich kommt die Bildung der Lagrangischen Interpolations-Formel auf die Lösung von folgendem analytischen Probleme zurück:

Man wünscht eine algebraische ganze, die $(n-1)^{\text{te}}$ Ordnung nicht übersteigende, Function von x, die hier, der Kürze wegen, mit $f(x)$ bezeichnet werden mag, zu finden, so beschaffen, daſs sie die Werthe A_0, A_1, A_2, ... A_μ ...... A_{n-1} liefere, wenn man darin für x nach und nach die n Werthe a_0, a_1, a_2 ...... a_μ ...... a_{n-1} substituirt.

Der Forderung nach ist

$$f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + M_3 x^3 + \dots M_\mu x^\mu + \dots M_{n-1} x^{n-1}$$

eine algebraische ganze Function von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung; und da das Product aus den n Factoren

$$x - a_0,\; x - a_1,\; x - a_2, \dots\dots x - a_\mu, \dots\dots x - a_{n-1},$$

die Gröſse $(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2) \dots\dots (x-a_\mu) \dots\dots (x-a_{n-1})$ namentlich, eine eben solche Function von der n^{ten} Ordnung ist: so wird, der Theorie der Zerfällung gebrochener Functionen gemäſs, der Bruch:

$$\frac{f(x)}{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\mu)\dots(x-a_{n-1})}$$

gleich

$$\frac{C_0}{x-a_0} + \frac{C_1}{x-a_1} + \frac{C_2}{x-a_2} + \frac{C_3}{x-a_3} + \dots \frac{C_\mu}{x-a_\mu} + \dots \frac{C_{n-1}}{x-a_{n-1}}$$

gesetzt werden dürfen, wo ganz allgemein C_μ von x unabhängig ist. Demnach hat man

$$1)\quad f(x) = C_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\mu)\dots(x-a_{n-1})$$
$$+\dots C_1(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_\mu)\dots(x-a_{n-1})$$
$$+\dots C_\mu(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{\mu-1})(x-a_{\mu+1})\dots(x-a_{n-1})$$
$$+\dots C_n(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\mu)\dots(x-a_{n-1});$$

folglich, ganz allgemein,

$$f(a_\mu) = A_\mu = C_\mu(a_\mu-a_0)(a_\mu-a_1)(a_\mu-a_2)\dots(a_\mu-a_{\mu-1})(a_\mu-a_{\mu+1})\dots(a_\mu-a_{n-1}),$$

endlich:

$$C_\mu = \frac{A_\mu}{(a_\mu-a_0)(a_\mu-a_1)(a_\mu-a_2)\dots(a_\mu-a_{\mu-1})(a_\mu-a_{\mu+1})\dots(a_\mu-a_{n-1})}.$$

Substituirt man diesen Werth für C_μ in die Gleichung (1.), so kommt

$$f(x) = {}^{0\dots n-1}_{\ \mu}\Sigma A_\mu \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{\mu-1})(x-a_{\mu+1})\dots(x-a_{n-1})}{(a_\mu-a_0)(a_\mu-a_1)(a_\mu-a_2)\dots(a_\mu-a_{\mu-1})(a_\mu-a_{\mu+1})\dots(a_\mu-a_{n-1})}.$$

oder, in entwickelter Gestalt,

$$f(x) = A_0\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_\mu)\dots(x-a_{n-1})}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)\dots(a_0-a_\mu)\dots(a_0-a_{n-1})}$$
$$+A_1\frac{(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_\mu)\dots(x-a_{n-1})}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_\mu)\dots(a_1-a_{n-1})}.$$
$$+A_2\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_\mu)\dots(x-a_{n-1})}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_\mu)\dots(a_2-a_{n-1})}$$
$$\vdots$$
$$+A_\mu\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{\mu-1})(x-a_{\mu+1})\dots(x-a_{n-1})}{(a_\mu-a_0)(a_\mu-a_1)(a_\mu-a_2)\dots(a_\mu-a_{\mu-1})(a_\mu-a_{\mu+1})\dots(a_\mu-a_{n-1})}$$
$$\vdots$$
$$+A_{n-1}\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\mu)\dots(x-a_{n-2})}{(a_{n-1}-a_0)(a_{n-1}-a_1)(a_{n-1}-a_2)\dots(a_{n-1}-a_\mu)\dots a_{n-1}-a_{n-2})};$$

welches die bekannte Lagrangische Formel ist.

21.

Ein Kennzeichen der Grenzen der Zahl der reellen Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung.

(Von Herrn *Louis Olivier.*)

Aus dem bekannten Descartes'schen Lehrsatze:

„dafs die Zahl der reellen positiven Wurzeln einer algebraischen Gleichung nicht gröfser sein kann, als die Zahl der Wechsel der Zeichen, „und die Zahl der reellen negativen Wurzeln nicht gröfser, als die „Zahl der Folgen der Zeichen ihrer Glieder,"

läfst sich, wie folgt, ein Kennzeichen der Grenzen der Zahl der reellen Wurzeln überhaupt, also auch der Zahl der unmöglichen Wurzeln herleiten, dessen ich nirgend erwähnt gefunden habe. Ich theile es für den Fall mit, dafs es wirklich nicht bekannt sein sollte.

Es sei die Gleichung

1) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots\ldots a_n = 0$

gegeben, wo n eine ganze positive Zahl ist, und $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ reelle Gröfsen sind, die auch Null sein können.

Man setze $x = -v$, so nehmen die Glieder mit ungeraden Exponenten von x entgegengesetzte Zeichen an. Ist also n gerade, so gehet die Gleichung (1.) in

$$a_0 v^n - a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2} - a_3 v^{n-3} \ldots\ldots + a_n = 0,$$

ist n ungerade, in

$$-a_0 v^n + a_1 v^{n-1} - a_2 v^{n-2} + a_3 v^{n-3} - \ldots\ldots + a_n = 0$$

über. Beide Gleichungen können durch

2) $a_0 v^n - a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2} - a_3 v^{n-3} \ldots\ldots \pm a_n = 0$

ausgedrückt werden. Das obere Zeichen gilt, wenn n gerade, das untere, wenn n ungerade ist.

Da nun $v = -x$, so folgt, dafs die Wurzeln der Gleichung

3) $a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} \ldots\ldots \pm a_n = 0$

sämmtlich den Wurzeln der Gleichung (1.) an Form und Gröfse gleich, und nur darin von ihnen verschieden sind, dafs sie entgegengesetzte Zeichen haben.

Bezeichnet man also die n Wurzeln der Gleichung (1.) durch x_1, x_2, x_3, x_4, ... x_n, so sind die n Wurzeln der Gleichung (2.)

$$-x_1,\ -x_2,\ -x_3\ \ldots\ldots -x_n.$$

Nun kann man bekanntlich die Gröfse linker Hand in der Gleichung (1.), deren Wurzeln x_1, x_2, x_3 ...... x_n sind, als das Product

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_n)$$

betrachten; also ist die Gröfse linker Hand in der Gleichung (3.) dem Product

$$(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)\ldots\ldots(x+x_n)$$

gleich, so dafs

$$4)\quad a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3}\ldots\ldots + a_n$$
$$= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_n) = 0 \text{ und}$$

$$5)\quad a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - a_3x^{n-3}\ldots\ldots \pm a_n$$
$$= (x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)\ldots\ldots(x+x_n) = 0.$$

Man multiplicire diese beiden Gleichungen mit einander, so findet man[1]

$$\left(a_0x_n + a_2x^{n-2} + a_4x^{n-4}\ldots\ldots\right)^2 - \left(a_1x^{n-1} + a_3x^{n-3} + a_5x^{n-5}\ldots\ldots\right)^2$$
$$= (x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)(x^2-x_3)^2\ldots\ldots(x^2-x_n^2) = 0,$$

das heifst:

$$\begin{array}{l} a_0^2x^{2n} + a_0a_2x^{2n-2} + a_0a_4x^{2n-4} + a_0a_6x^{2n-6} + a_0a_8x^{2n-8}\ldots\ldots \\ \qquad + a_2a_0x^{2n-2} + a_2^2x^{2n-4} + a_2a_4x^{2n-6} + a_2a_6x^{2n-8}\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + a_4a_0x^{2n-4} + a_4a_2x^{2n-6} + a_4^2x^{2n-8}\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad + a_6a_0x^{2n-6} + a_6a_2x^{2n-8}\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + a_8a_0x^{2n-8}\ldots\ldots \end{array}$$

$$-\left\{\begin{array}{l} a_1^2x^{2n-2} + a_1a_3x^{2n-4} + a_1a_5x^{2n-6} + a_1a^7x^{2n-8}\ldots\ldots \\ \qquad + a_3a_1x^{2n-4} + a_3^2x^{2n-6} + a_3a_5x^{2n-8}\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + a_5a_1x^{2n-6} + a_5a_3x^{2n-8}\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad + a_7a_1x^{2n-8}\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

oder

$$\begin{array}{l} 6)\quad x^{2n}\cdot a_0^2 \\ \quad - x^{2n-2}(a_1^2 - 2a_0a_2) \\ \quad + x^{2n-4}(a_2^2 + 2a_0a_4 - 2a_1a_3) \\ \quad - x^{2n-6}(a_3^2 - 2a_0a_6 - 2a_1a_5 - 2a_2a_4) \\ \quad + x^{2n-8}(a_4^2 + 2a_0a_8 - 2a_1a_7 + 2a_2a_6 - 2a_3a_5) \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$
$$= (x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)(x^2-x_3^2)\ldots\ldots(x^2-x_n^2) = 0,$$

oder

oder, wenn man der Kürze wegen,

$$7)\quad \begin{cases} \alpha_0^2 = \beta_0 \\ \alpha_1^2 - 2\alpha_0\alpha_2 = \beta_2 \\ \alpha_2^2 + 2\alpha_0\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_3 = \beta_2 \\ \alpha_3^2 - 2\alpha_0\alpha_6 + 2\alpha_1\alpha_5 - 2\alpha_2\alpha_4 = \beta_3 \\ \alpha_4^2 + 2\alpha_0\alpha_8 - 2\alpha_1\alpha_7 + 2\alpha_2\alpha_6 - 2\alpha_3\alpha_5 = \beta_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

setzt,

$$8)\quad \beta_0 x^{2n} - \beta_1 x^{2n-2} + \beta_2 x^{2n-4} - \beta_3 x^{2n-6} \dots\dots$$
$$= (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)\dots\dots(x^2 - x_4^2) = 0.$$

Man setze

$$x^2 = z,$$

so verwandelt sich die Gleichung (8.) in

$$9)\quad \beta_0 z_n - \beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} - \beta_3 z^{n-3} \dots\dots\dots$$
$$= (z - x_1^2)(z - x_2^2)(z - x_3^2)\dots\dots\dots(z - x_n^2) = 0.$$

Daraus folgt, daſs die Quadrate x_1^2, x_2^2, x_3^2 ...... x_n^2 der n Wurzeln x_1, x_2, x_3 ...... x_n der gegebenen Gleichung (1.) die n Wurzeln der Gleichung (9.) die n Wurzeln x_1, x_2, x_3 .... x_n der gegebenen Gleichung (1.) selbst also die Quadratwurzeln von den n Wurzeln der Gleichung (9.) sind. Quadratwurzeln sind aber nur dann reell, wenn die Gröſsen, von welchen sie die Wurzeln sind, positiv sind. Also kann die gegebene Gleichung nicht mehr reelle Wurzeln haben, als die Gleichung (9.) positive Wurzeln hat, das heiſst, vermöge der Descartes'schen Regel, nicht mehr als die Gleichung (9.) Zeichenwechsel hat. Nun kann man die Gleichung (9.) immer aus der gegebenen finden, also ist Folgendes ein Kennzeichen der Grenzen der Zahl der reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung:

Eine beliebige algebraische Gleichung vom n^{ten} Grade kann nicht mehr reelle Wurzeln haben, als je zwei auf einander folgende Coefficienten der Gleichung (9.), deren Werthe nach (7.) gefunden werden, gleiche Zeichen haben.

Man kann bekanntlich jede algebraische Gleichung auf eine andere bringen, deren erstes Glied den Coefficienten 1, und deren zweites Glied den Coefficienten 0 hat. Also kann man jedesmal

$$\alpha_0 = 1 \text{ und } \alpha_1 = 0$$

setzen. Folglich ist auch in (7.) kürzer

$$
10) \begin{cases}
\beta_0 = 1 \\
\beta_1 = -2\alpha_2 \\
\beta_2 = \alpha_2^2 + 2\alpha_4 \\
\beta_3 = \alpha_3^2 - 2(\alpha_6 + \alpha_2\alpha_4) \\
\beta_4 = \alpha_4^2 + 2(\alpha_8 + \alpha_2\alpha_6 - \alpha_3\alpha_5) \\
\beta_5 = \alpha_5^2 - 2(\alpha_{10} + \alpha_2\alpha_8 - \alpha_3\alpha_7 + \alpha_4\alpha_6) \\
\beta_6 = \alpha_6^2 + 2(\alpha_{12} + \alpha_2\alpha_{10} - \alpha_3\alpha_9 + \alpha_4\alpha_8 - \alpha_5\alpha_7) \\
\beta_7 = \alpha_7^2 - 2(\alpha_{14} + \alpha_2\alpha_{12} - \alpha_3\alpha_{11} + \alpha_4\alpha_{10} - \alpha_5\alpha_9 + \alpha_6\alpha_8) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

Erstes Beispiel. Es sei die Gleichung

$$x^5 + x^3 + 3x^2 + 16x + 15 = 0$$

gegeben, so ist

$$\alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 3,\ \alpha_4 = 16,\ \alpha_5 = 15,$$

folglich in (10.)

$$\beta_0 = +1,\ \beta_1 = -2,\ \beta_2 = +33,\ \beta_3 = -23,\ \beta_4 = +166,\ \beta_5 = +225.$$

Nur β_4 und β_5 haben gleiche Zeichen, also kann die gegebene Gleichung nur eine reelle Wurzel haben. In der That sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$\frac{+3 \pm \sqrt{-11}}{2},\ -1 \pm \sqrt{-2} \text{ und } -1.$$

Zweites Beispiel. Es sei die Gleichung

$$x^6 - 10x^4 + 4x^3 + 16x^2 - 27x + 36 = 0$$

gegeben, so ist

$$\alpha_2 = -10,\ \alpha_3 = +4,\ \alpha_4 = +16,\ \alpha_5 = -27,\ \alpha_6 = +36,$$

folglich in (10.)

$$\beta_0 = +1,\ \beta_1 = +20,\ \beta_2 = +132,\ \beta_3 = +264,\ \beta_4 = -680,$$
$$\beta_5 = -423,\ \beta_6 = +1296.$$

Die Coefficienten $\beta_0, \beta_1 \dots\dots \beta_6$ haben vier Zeichenfolgen. Also kann die gegebene Gleichung nicht mehr als vier reelle Wurzeln haben. In der That sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$+3,\ +1,\ -2,\ -3 \text{ und } \frac{+1 \pm \sqrt{-7}}{2}.$$

Da die Descartes'sche Regel nur lehrt, wie viel, z. B. positive Wurzeln, eine Gleichung haben kann, nicht, wie viel sie nothwendig haben mufs, so kann die Gleichung (9.) auch selbst überhaupt weniger reelle Wurzeln als Zeichenwechsel haben. Man kann daher auch die Gleichung (9.) von Neuem wie

die gegebene untersuchen. Findet sich, dafs sie nicht so viel reelle Wurzeln haben kann, als sie Zeichenwechsel hat, so kann die gegebene Gleichung auch nicht mehr reelle Wurzeln haben, als sie, weil die Quadratwurzeln ebenfalls imaginair sind.

Auch lassen sich aus dem obigen Kennzeichen verschiedene andere Folgerungen ziehen; wie leicht zu sehen.

22.

Bemerkungen über Figuren, die aus beliebigen, von geraden Linien umschlossenen Figuren zusammengesetzt sind.

(Von Herrn *Louis Olivier.*)

Es sei eine Figur gegeben, wie z. B. (Fig. 1. Taf. 3.) vorstellt. Sie sei aus

a ebenen Dreiecken,
b ebenen Vierecken,
c ebenen Fünfecken

u. s. w. zusammengesetzt, und es sei

$$1)\quad a+b+c\ldots\ldots=F.$$

Die Zahl der Eckpuncte, welche im äufseren Umfange der ganzen Figur liegen, wie A, B, H, I, M etc., sei n, die Zahl der Eckpuncte im Innern der Figur, wie C, D, G, F, E etc., sei m und

$$2)\quad m+n=S.$$

Die Zahl sämmtlicher gerader Linien, welche die zusammengesetzte Figur in- und auswendig begrenzen, sei

$$3)\quad =A,$$

wobei zu bemerken, dafs die geradlinigen Grenzen der Figur, sowohl innerhalb als aufserhalb, immer nur von einem Eckpuncte bis zum nächsten, welchen sie begrenzen, gerechnet werden, auch dann, wenn mehrere Eckpuncte in einer und derselben geraden Linie liegen. Liegen z. B. die Eckpuncte A, B, C in einer geraden Linie, so werden AB und BC für zwei einzelne Grenzlinien gerechnet, und die Figur $ABCDEF$ wird nicht als ein Fünfeck, sondern als ein Sechseck betrachtet. Liegen E, L, K in einer geraden Linie, desgleichen N, M, I, H, so werden EL, LK, NM, MI, IH für einzelne Grenzen

29 *

gerechnet, und die Figur $EDGHIKL$ ist nicht ein Sechseck, sondern ein Siebeneck, u. s. w.

Man stelle sich nun einen Augenblick vor, die einzelnen F ebenen Figuren, aus welchen die ganze Figur zusammengesetzt ist, grenzten nicht aneinander, so würde die gesammte Zahl ihrer Seiten

$$3a+4b+5c+6d\ldots\ldots$$

sein. Stofsen dagegen die Figuren, wie es sein soll, aneinander, so wird jede innere Seite zwei Figuren zugleich begrenzen. Rechnet man daher zu der obigen Zahl von Seiten der abgesonderten Figuren noch die Zahl der äufseren Seiten der zusammengesetzten Figur, so wird die ganze Summe doppelt so grofs sein, als die Zahl aller äufseren und inneren Grenzen der zusammengesetzten Figur. Die Zahl der äufseren Seiten der zusammengesetzten Figur ist aber offenbar der Zahl n ihrer äufseren Eckpuncte gleich, und also ist

$$4)\quad 3a+4b+5c+6d\ldots\ldots+n=2A.$$

Nun hat Cauchy im *Journal de l'école polytechnique* bewiesen, dafs immer

$$5)\quad S+F=A+1$$

ist *). Daraus folgt $3S+3F=3A+3$. Setzt man in diese Gleichung die Ausdrücke von S, F und A (2. 1 und 4.), so findet man

---

*) Anmerkung des Herausgebers. Dieser Satz von Cauchy steht im *Journal de l'école polytechnique* (Band IX. Heft 16. Seite 80). Cauchy giebt davon zwei Beweise. Ich will sie für Leser, welche dieses Journal nicht zur Hand haben, wörtlich hersetzen.

„1) Erster Beweis. Man theile die einzelnen Polygone in Dreiecke, indem man in jedem, aus einem seiner Scheitel, nach den übrigen, nicht daran grenzenden Scheiteln, Diagonalen zieht. Die Zahl dieser sämmtlichen Diagonalen sei n, so wird $F+n$ die Zahl der durch dieselben abgetheilten Dreiecke, und $A+n$ die Zahl ihrer Seiten sein. (Denn gesetzt, in den verschiedenen Figuren würden, der Reihe nach, ν_1, ν_2, ν_3 ...... Diagonalen gezogen, so entstehen dadurch ν_1+1, ν_2+1, ν_3+1 u. s. w. Dreiecke, überhaupt also $\nu_1+\nu_2+\nu_3\ldots\ldots+F$ Dreiecke, weil F Figuren vorhanden sind, folglich, weil $\nu_1+\nu_2+\nu_n\ldots\ldots=n$ sein soll, $F+n$ Dreiecke. Und da die Zahl der Seiten der ungetheilten Figur A war, und n Diagonalen hinzukommen, so ist die Zahl aller Seiten der getheilten Figur $A+n$. D. H.). Die Zahl der Ecken der Dreiecke ist der Zahl S der Ecken der Polygone gleich (denn durch die Diagonalen ist keine neue Ecke hinzugekommen, d. H.). Nun setze man, es würden nach und nach die verschiedenen Dreiecke weggenommen, bis zuletzt nur noch ein einziges übrig bleibt, und zwar auf die Weise, dafs man mit dem Wegnehmen bei denjenigen Dreiecken anfängt, welche am äufseren Umfange der Figur liegen, hernach aber vorzugsweise diejenigen wegnimmt, von welchen eine oder zwei Seiten, durch das Wegnehmen der vorigen, in den äufseren Umfang gekommen

$$3m+3n+3a+3b+3c\ldots\ldots = A+3a+4b+5c\ldots\ldots+n+3, \text{ oder}$$

$$6)\ 3m+2n-3-b-2c-3d\ldots\ldots = A.$$

Nun sind zur Bestimmung sämmtlicher Eckpuncte der zusammengesetzten Figur $2(S-2)+1=2S-3$ gerade Linien nöthig. Denn man setze, aus den Endpuncten irgend einer der äufseren oder inneren Seiten der Figur wären nach allen übrigen $S-2$ Eckpuncten gerade Linien gezogen, welches $2(S-2)$ gerade Linien wären, so sind durch dieselben, zusammengenommen mit der einen Linie, durch deren Endpuncte sie gehen, alle Eckpuncte der Figur gegeben. Bezeichnet man diese Zahl $2S-3$ durch B, so ist vermöge (2.)

$$7)\ B=2m+2n-3,$$

also ist aus (6.)

$$8)\ A-B=m-b-2c-3d\ldots\ldots$$

---

sind. Es sei h' die Zahl der Dreiecke, welche, indem man sie wegnimmt, eine Seite, und h'' die Zahl derjenigen Dreieke, welche alsdann zwei Seiten in dem äufseren Umfange der Figur haben, so verschwinden durch das Wegnehmen jedes Dreiecks der ersten Art eine Seite und durch das Wegnehmen jedes Dreiecks der zweiten Art zwei Seiten und eine Ecke der Figur. Daraus folgt, dafs, nachdem alle Dreiecke bis auf ein einziges weggenommen worden, zusammen $h'+h''$ Dreiecke, $h'+2h''$ Seiten und h'' Scheitel weggefallen sind. Die Zahl der übrigbleibenden Dreiecke ist also

$$F+n-(h'+h'')=1,$$

die Zahl der übrig gebliebenen Seiten ist

$$A+n-(h'+2h'')=3,$$

und die Zahl der übrig gebliebenen Eckpuncte

$$S-h''=3.$$

Addirt man die erste und dritte dieser drei Gleichungen, und zieht von der Summe die zweite ab, so findet man

$$S+F-A=1 \text{ oder } S+F=A+1.$$

2) Zweiter Beweis. Man stelle sich die verschiedenen Figuren rund um eine von ihnen liegend vor. Es sei a die Zahl der Seiten, und s die Zahl der Eckpuncte des ersten Polygons, a' die Zahl derjenigen Seiten, und s' die Zahl derjenigen Eckpuncte des zweiten Polygons, welche es mit dem ersten nicht gemein hat, u. s. w. Alsdann ist offenbar

$$a=s,\quad a'=s'+1,\quad a''=s''+1 \text{ etc.}$$

Nimmt man die Summe dieser Gleichungen, deren Zahl F ist, so findet man

$$(a+a'+a''\ldots\ldots = s+s'+s''\ldots\ldots+F-1. \text{ D. H.}),$$

$$\text{weil}\quad a+a'+a''\ldots\ldots = A$$

$$\text{und}\quad s+s'+s''\ldots\ldots = S \text{ ist,}$$

$$A=S+F-1 \text{ oder } S+F=A+1."$$

Cauchy leitet aus diesem Satze noch andere, z. B. auch die bekannte Euler'sche Gleichung zwischen der Zahl der Ecken, Seiten und Kanten eines beliebigen Polyëders ab.

Aus diesem Resultat lassen sich mancherlei Folgerungen ziehen. Zum Beispiel:

I. Die gegebene Figur sei aus lauter Dreiecken zusammengesetzt, so ist $b = 0$, $c = 0$ etc., und folglich

$$9)\quad A - B = m,$$

das heifst: wenn alle inneren und äufseren Seiten der zusammengesetzten Figur gegeben sind, so sind m Seiten, also gerade so viel, wie die zusammengesetzte Figur innere Eckpuncte hat, mehr gegeben, als zur Bestimmung aller Eckpuncte der Figur, und folglich der Figur selbst, nöthig sind. Diese Bemerkung kann z. B. in der Geodäsie (*géodésie*, Feldmefskunst. D. H.) nützlich sein. Sie lehrt, dafs wenn man von einer, aus Dreiecken zusammengesetzten Figur (von einem Dreiecks-Netz. D. H.) alle Seiten gemessen oder berechnet hat, so viel Seiten von den übrigen abhängen, als die Figur innere Eckpuncte hat.

II. Wenn die Zahl der sämmtlichen inneren und äufseren Seiten der zusammengesetzten Figur gerade so grofs ist, als die Zahl der zur vollständigen Bestimmung der Figur nöthigen geraden Linien, so ist $A - B = 0$, folglich vermöge (8.)

$$10)\quad b + 2c + 3d \ldots\ldots\ldots = m.$$

Das heifst: eine zusammengesetzte Figur, die durch ihre äufseren und inneren Seiten vollständig gegeben sein soll, darf nicht nothwendig blos aus Dreiecken bestehen, sondern es können auch in derselben b Vierecke, c Fünfecke, d Sechsecke etc. sein, wenn nur die Summe von b, $2c$, $3d$ etc. gleich der Zahl m der inneren Eckpuncte der Figur ist. Dieser Satz kann ebenfalls in der Geodäsie nützlich sein.

III. Da Alles, worauf die Gleichung (6.) beruhet (auch der Cauchy'sche Satz. D. H.), auch dann noch gilt, wenn die zusammengesetzte Figur nicht in einer und derselben Ebene liegt, sondern aus ebenen Figuren zusammengesetzt ist, deren jede in einer anderen Ebene liegen kann, so kann man das Resultat (6.), oder vielmehr das Resultat (9.), auch auf Polyëder anwenden, z. B. auf folgende Weise:

Man stelle sich die in irgend einer Ecke E eines beliebigen Polyëders zusammenstofsenden Seiten-Ebenen desselben aus der nemlichen Ecke, desgleichen die übrigen Seiten-Ebenen des Polyëders, jede aus einer beliebigen ihrer Ecken durch Diagonalen in Dreiecke getheilt, und alle Kanten des Polyëders, nebst allen in den Seiten-Ebenen gezogenen Diagonalen, gegeben vor. Ferner stelle man sich vor, es wären aus der Ecke E des Polyëders nach allen seinen übrigen Ecken gerade Linien gezogen, die wir durch L_1, L_2, L_3 etc. bezeichnen wollen,

und durch diese Linien und die daran stofsenden Kanten und Diagonalen des Polyëders wären Ebenen gelegt, alle diese Ebenen aber, sammt den Seiten-Ebenen, die in der Ecke zusammenstofsen, schnitten irgend eine beliebige Ebene, die durch P bezeichnet werden mag, so werden die Durchschnitte der durch die Linien L_1, L_2, L_3 ...... und durch die Kanten und Diagonalen des Polyëders gelegten Ebenen, so wie der Seiten-Ebenen, welche in der Ecke E zusammenstofsen, mit der Ebene P, welche Durchschnitte durch D_1, D_2, D_3 ...... bezeichnet werden mögen, auf der Ebene P eine aus lauter Dreiecken zusammengesetzte Figur bilden, welche gerade so viel Seiten haben wird, als das Polyëder Kanten und in seinen Seiten-Ebenen Diagonalen hat. Wäre diese Figur, sammt den Linien L_1, L_2, L_3 ...... gegeben, so wäre offenbar das Polyëder selbst vollständig gegeben. Nun werden die Durchschnittslinien D_1, D_2, D_3 ...... sammt den Linien L_1, L_2, L_3 ...... offenbar auf irgend eine Weise von den gegebenen Kanten und Diagonalen des Polyëders abhängen. Die Zahl der Linien D_1, D_2, D_3 ...... ist, wie gesagt, der Zahl der Kanten des Polyëders und der Diagonalen in seinen Seiten-Ebenen gleich. Die Zahl der Linien L_1, L_2, L_3 ...... ist der Zahl der inneren Ecken der auf der Ebene P entstandenen Figur gleich. Also übertrifft die Zahl der Linien D_1, D_2, D_3 ...... und L_1, L_2, L_3 ...... zusammengenommen die Zahl der Kanten des Polyëders um die Zahl der inneren Ecken der Figur auf der Ebene P. Aber eben so viel Linien sind, vermöge des Satzes (9.), mehr bekannt, wenn man alle Linien D_1, D_2, D_3 ....., der Figur auf der Ebene P kennt. Also kann man schliefsen, dafs durch diese Figur die Linien L_1, L_2, L_3 ...... zugleich mit gefunden werden, und dafs also das Polyëder schon durch seine Kanten und Diagonalen in den Seiten-Ebenen allein vollständig bestimmt ist. Nun aber werden durch die Kanten und Diagonalen in den Seiten-Ebenen die Seiten-Ebenen selbst bestimmt: also wird ein Polyëder durch seine Seiten-Ebenen, welche es auch sein mögen, vollständig gegeben, und zwei convexe Polyëder sind congruent, wenn sie gleiche Seiten-Ebenen in gleicher Lage haben; welchen Satz zuerst Cauchy (ebenfalls in dem oben angeführten Hefte des *Journal de l'école polytechnique.* D. H.) auf anderem Wege bewiesen hat. (Man findet den Beweis von Cauchy auch in der XII. Anmerkung der Geometrie von Legendre. D. H.)

23.

Auflösung eines geometrischen Problems.

(Von Herrn Prof. und Director *J. J. Littrow*.)

Aus der gegebenen Lage zweier Orte gegen einen bekannten dritten, die Lage jener zwei ersten Orte gegen einander suchen.

Diese schon an sich selbst interessante Aufgabe ist in der Geodäsie, und besonders in der Astronomie von grofsem Nutzen. Die Bestimmung der heliocentrischen Lage der Planeten aus dem geocentrischen Orte derselben, und umgekehrt; die aus den Beobachtungen abzuleitende Lage der Sonnenflecken gegen den Mittelpunct dieses Gestirns; die ganze Lehre von der Aberration des Lichtes; die Theorie der Parallaxen, und eine grofse Anzahl anderer Untersuchungen hängen unmittelbar von der Auflösung dieses Problems ab, welches sich, abgesehen von allen diesen Anwendungen, als ein rein geometrisches darstellt. Uebrigens ist dieser Gegenstand schon von so vielen ausgezeichneten Geometern untersucht worden, dafs man kaum hoffen darf, noch irgend etwas bisher Unbekanntes von Bedeutung hinzuzufügen.

Bezieht man alle Lagen, von welchen in der Folge die Rede sein wird, auf drei unter einander senkrechte Coordinaten, die durch den bekannten dritten Ort gehen, so sei r die Distanz des ersten Ortes von dem dritten, b der Winkel von r mit seiner Projection in einer der drei coordinirten Ebenen, z. B. in der Ebene der xy, und a der Winkel dieser Projection mit der Axe der x, so dafs also die Lage des ersten Orts gegen den dritten durch die drei Gröfsen a, b und r gegeben ist. Eben so werde die Lage des zweiten Ortes gegen den dritten durch die, den vorhergehenden analogen Gröfsen R, A und B, und endlich die Lage des ersten gegen den zweiten durch die ähnlichen Ausdrücke r', a' und b' gegeben, so dafs also r', a', b' die unbekannten Gröfsen sind, welche durch die sechs bekannten Gröfsen r, a, b und R, A, B bestimmt werden sollen.

Ist N irgend eine willkürliche Gröfse, so hat man zwischen jenen neun Gröfsen folgende drei allgemein bekannte Gleichungen:

$$r' \cos b' \cos(a'-N) = r \cos b \cos(a-N) - R \cos B \cos(A-N),$$
$$r' \cos b' \sin(a'-N) = r \cos b \sin(a-N) - R \cos B \sin(A-N),$$
$$r' \sin b' = r \sin b - R \sin B,$$

und

und schon die Stellung dieser Ausdrücke zeigt: dafs die Bestimmung dieser Gröfsen r', a', b' aus den sechs andern keiner weitern Schwierigkeit mehr unterworfen, und gleichsam von selbst gegeben ist. Allein oft sind nicht die zusammen gehörenden Gröfsen a', b', r', sondern z. B. die Gröfsen a', b' und r, oder die Gröfsen a', b' und $\frac{r}{R}$ u. s. w. zu suchen, wodurch die Auflösungen dieser drei Gleichungen viele Abänderungen erhalten.

Um die hierher gehörenden Lagen auf eine, Jedermann bekannte Art, zu fixiren, wollen wir für den ersten Ort den Mittelpunct des Mondes, für den zweiten das Auge des Beobachters auf der Oberfläche der Erde, diese als sphäroidisch angenommen, und für den dritten endlich den Mittelpunct der Erde annehmen. Legen wir die Axen der x und y in die Ecliptik, und x in die Linie der Nachtgleichen, so ist $a\,b$ die geocentrische Länge und Breite des Mondes, $A\,B$ die geocentrische Länge und Breite des Beobachters oder des Zeniths, und $a'\,b'$ die von dem Beobachter gesehene oder die scheinbare Länge und Breite des Mondes. Diese Annahmen werden der Allgemeinheit der geometrischen Auflösung keinen Eintrag thun, und mir zugleich Gelegenheit geben, eine Jugendarbeit über die Parallaxen zu ergänzen und zu verbessern, welche ich bereits vor achtzehn Jahren in dem Berliner Jahrbuche für 1812 mitgetheilt habe.

Zu dieser Absicht wollen wir statt der bisher angenommenen Distanzen r, r' und R die drei Gröfsen Δ, Δ' und π einführen, so dafs man hat

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sin\Delta'}{\sin\Delta} \text{ und } \frac{R}{r} = \sin\pi,$$

wo also π die als bekannt vorausgesetzte Horizontal-Parallaxe des Mondes für den Beobachter auf der sphäroidisch angenommenen Erde, und Δ, Δ' der geocentrische und der beobachtete Halbmesser des Mondes ist. Dieses vorausgesetzt, gehen die drei vorhergehenden Gleichungen in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos b'\cos(a'-N)}{\sin\Delta'} &= \frac{\cos b\cos(a-N) - \sin\pi\cos B\cos(A-N)}{\sin\Delta}\\
\frac{\cos b'\sin(a'-N)}{\sin\Delta'} &= \frac{\cos b\sin(a-N) - \sin\pi\cos B\sin(A-N)}{\sin\Delta}\\
\frac{\sin b'}{\sin\Delta'} &= \frac{\sin b - \sin\pi\sin B}{\sin\Delta}
\end{aligned}\right\}\dots A.$$

Wir werden nun die vorzüglichsten Probleme durchgehen, welche uns die drei letzten Gleichungen anbieten.

1. **Problem.** Der wahre oder geocentrische Ort des Mondes ist gegeben, man suche den scheinbaren, oder von der Oberfläche der Erde gesehenen Ort desselben.

Da hier die Gröfsen a', b', $\triangle'$ die Unbekannten sind, so geben die drei letzten Gleichungen (A) sofort die bekannten Ausdrücke

$$\text{tang}\ (a'-N) = \frac{\cos b \sin(a-N) - \sin\pi \cos B \sin(A-N)}{\cos b \cos(a-N) - \sin\pi \cos B \cos(A-N)},$$

$$\text{tang}\ b' = \frac{(\sin b - \sin\pi \sin B)\cos(a'-N)}{\cos b \cos(a-N) - \sin\pi \cos B \cos(A-N)},$$

$$\text{Sin}\ \triangle' = \frac{\sin\triangle \cos b' \cos(a'-N)}{\cos b \cos(a-N) - \sin\pi \cos B \cos(A-N)}$$

mit noch einem verwandten Ausdruck für tg b', der von sin $(a'-N)$, und mit noch zwei verwandten Ausdrücken für sin $\triangle'$, die von cos b' sin $(a'-N)$ und von sin b' abhängen, und bei welchen ich mich nicht weiter aufhalte. Da alle diese Ausdrücke die willkürliche Gröfse N enthalten, so sind sie noch vieler Abänderungen fähig, um sie z. B. zur Rechnung mit Logarithmen bequemer zu machen. Am einfachsten werden die gegebenen Gleichungen, wenn man $N = A - 90°$ oder $N = a - 90°$ nimmt.

I. Die vorhergehende Auflösung hat den Nachtheil, dafs sie die unbekannte Gröfse b' durch a', und $\triangle'$ durch a' und b' giebt, so dafs man z. B. $\triangle'$ nicht finden kann, wenn man nicht zuerst a' und b' kennt. Man kann sich aber leicht von dieser Abhängigkeit befreien, und jede der drei unbekannten Gröfsen a', b' und $\triangle'$ für sich bestimmen.

Führt man nemlich die Hülfsgröfse ψ ein, so dafs man hat

$$\cos\psi = \cos b \cos B \cdot \cos(a-A) + \sin b \sin B,$$

so geben die vorhergehenden Gleichungen (A) sofort

$$\sin b' = \frac{\sin b - \sin\pi \sin B}{\sqrt{(1+\sin^2\pi - 2\sin\pi\cos\psi)}} \text{ und}$$

$$\sin\triangle' = \frac{\sin\triangle}{\sqrt{(1+\sin^2\pi - 2\sin\pi\cos\psi)}},$$

wodurch b' und $\triangle'$ blofs durch die gegebenen Gröfsen des Problems bestimmt werden.

II. Da die Gröfse sin π im Allgemeinen nur klein ist, so lassen sich auch die vorhergehenden Ausdrücke in Reihen entwickeln, die nach den Potenzen von sin π fortgehen. Erinnert man sich, dafs die Gleichung tang $\frac{x}{2} = a$ tang $\frac{y}{2}$ sich

auch so ausdrücken läßt: $\tan\frac{x+y}{2}=\frac{\sin y}{\cos y-b}$ und $\tan\frac{x-y}{2}=\frac{b\sin y}{1-b\cos y}$,
wo $b=\frac{a-1}{a+1}$ ist, und daſs endlich jede dieser Gleichungen die Reihe

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}+b\sin y+\frac{b^2}{2}\sin 2y+\frac{b^3}{3}\sin 3y+\ldots\ldots$$

oder auch folgende giebt,

$$\frac{x}{2}=-\frac{y}{2}-\frac{1}{b}\sin y-\frac{1}{2b^2}\sin 2y-\frac{1}{3b^3}\sin 3y-\ldots\ldots$$

so erhält man sofort aus den Gleichungen (A) folgende Ausdrücke:

$$a'-a=P\sin(a-A)+\tfrac{1}{2}P^2\sin 2(a-A)+\tfrac{1}{3}P^3\sin 3(a-A)+\ldots,$$
$$b'-b=Q\sin(b-\varepsilon)+\tfrac{1}{2}Q^2\sin 2(b-\varepsilon)+\tfrac{1}{3}Q^3\sin 3(b-\varepsilon)+\ldots,$$

von welchen Reihen das Gesetz des Fortganges deutlich ist, und worin
$P=\frac{\sin\pi\cos B}{\cos b}$, $\tan\varepsilon=\frac{\cos\frac{1}{2}(a'-a)}{\cos\left(A-\frac{a'+a}{2}\right)}$ und $Q=\frac{\sin\pi\sin B}{\sin\varepsilon}$ gesetzt wurde.

Für Δ' endlich hat man, mit dem oben angenommenen Werthe von ψ,

$$\log\text{nat}\frac{\sin\Delta'}{\sin\Delta}=\sin\pi\cos\psi+\tfrac{1}{2}\sin^2\pi\cos 2\psi+\tfrac{1}{3}\sin^3\pi\cos 3\psi+\ldots$$

Um aber auch hier für b' eine von a' unabhängige Reihe zu finden, so hat man, wie man leicht sieht,

$$\log\frac{\sin b'}{\sin b}=\sin\pi(\cos\psi-\delta)+\tfrac{1}{2}\sin^2\pi(\cos 2\psi-\delta)+\tfrac{1}{3}\sin^3\pi(\cos 3\psi-\delta)+\ldots$$

$$\text{wo }\delta=\frac{\sin B}{\sin b}\text{ ist.}$$

2. Problem. Der scheinbare Ort des Mondes ist gegeben; man suche den wahren oder geocentrischen Ort desselben.

Diese Aufgabe, welche die verkehrte der vorhergehenden ist, wird aus den Gleichungen (A) auf folgende Weise aufgelöst:

Man suche zuerst die Werthe von ψ' und π' aus

$$\cos\psi'=\cos b'\cos B\cos(a'-A)+\sin b'\sin B,$$
$$\sin\pi'=\frac{\sin^2\pi\cos\psi'+\sin\pi(\sqrt{1-\sin^2\pi\sin^2\psi'})}{\cos^2\pi},$$

so findet man die unbekannten Gröſsen a, b und Δ durch folgende Ausdrücke:

$$\text{tang}\,(a-N)=\frac{\cos b'\sin(a'-N)+\sin\pi'\cos B\sin(A-N)}{\cos b'\cos(a'-N)+\sin\pi'\cos B\cos(A-N)},$$

$$\text{tang}\,b=\frac{[\sin b'+\sin\pi'\sin B]\,.\cos(a-N)}{\cos b'\cos(a'-N)+\sin\pi'\cos B\cos(A-N)},$$

$$\sin\Delta=\left[(1-\sin^2\pi\sin^2\psi')^{\frac{1}{2}}-\sin\pi\cos\psi'\right].\sin\Delta'.$$

I. Auch hier kann man wieder die Gröfsen b und Δ von a unabhängig erhalten, da man hat

$$\sin b=\frac{\sin b'+\sin\pi'\sin B}{\sqrt{(1+\text{Sin}^2\pi'+2\sin\pi'\cos\psi')}}\text{ u. s. w.}$$

II. Die vorhergehenden Ausdrücke sind streng, oder ohne Abkürzung. Sucht man aber wieder die Gröfsen a, b und Δ durch Reihen, welche mit den Potenzen von $\sin\pi'$ fortgehen, so hat man

$$a-a'=-P'\sin(a'-A)+\tfrac{1}{2}P'^2\sin2(a'-A)-\tfrac{1}{3}P'^3\sin3(a'-A)+\ldots\text{ und}$$
$$b-b'=-Q'\sin(b'-\varepsilon')+\tfrac{1}{2}Q'^2\sin2(b'-\varepsilon')-\tfrac{1}{3}Q'^3\sin3(b'-\varepsilon')+\ldots,$$

$$\text{wo } P'=\frac{\sin\pi'\cos B}{\cos b'},\ \text{tang}\,\varepsilon'=\frac{\cos\frac{a'-a}{2}}{\cos\left(A-\frac{a'+a}{2}\right)}\text{ und } Q'=\frac{\sin\pi'\sin B}{\sin\varepsilon'}\text{ ist.}$$

Ueberdiefs hat man noch, analog mit dem Vorhergehenden,

$$\log\frac{\sin\Delta}{\sin\Delta'}=-\sin\pi'\cos\psi'+\tfrac{1}{2}\sin^2\pi'\cos2\psi'-\tfrac{1}{3}\sin^3\pi'\cos3\psi+\text{ und}$$

$$\log\frac{\sin b}{\sin b'}=-\sin\pi'(\cos\psi'-\delta')+\tfrac{1}{2}\sin^2\pi'(\cos2\psi'-\delta'^2)-\tfrac{1}{3}\sin^3\pi'(\cos3\psi'-\delta'^3)+,$$

$$\text{wo }\delta'=\frac{\sin B}{\sin b'}\text{ ist;}$$

und durch die beiden letzten Ausdrücke wird auch hier der Werth von b und Δ, unabhängig von dem Werthe von a, gegeben, was oft nützlich und zur Berechnung dieser beiden Gröfsen sehr bequem ist. Diese zweite Aufgabe scheint mir bisher noch von Niemand aufgelöset worden zu sein.

3. Problem. Bisher haben wir den Ort des Mondes sowohl, als den des Beobachters auf die Ebene der Ecliptik bezogen, und so enthalten die vorhergehenden Ausdrücke eigentlich die sogenannte Parallaxe der Länge und Breite. Allein dieselben Gleichungen enthalten auch die Parallaxe der Rectascension und Declination, wenn in (1.) und (2.) die Gröfsen a, a' die wahre und scheinbare Rectascension, und b, b' die wahre und scheinbare Declination des Mondes, und A die Sternzeit der Beobachtung, so wie B die geo-

centrische Polhöhe des Beobachtungsortes bezeichnet: sie enthalten endlich auch die Parallaxe des Azimuts und der Höhe, wenn aa' und bb' das wahre und scheinbare Azimut, und die wahre und scheinbare Höhe des Mondes bezeichnet, und wenn man $A=0$ und $B=90-r$ setzt, wo r die geocentrische Zenithdistanz des Beobachters, oder wo r die Differenz der geocentrischen und beobachteten Polhöhe ist. — Durch die vorhergehenden Ausdrücke wird daher der scheinbare Ort des Mondes durch den wahren, so wie der wahre durch den scheinbaren, in Beziehung auf alle drei Ebenen gegeben, welche die Astronomen gewöhnlich zu der Bestimmung der Orte der Himmelskörper anwenden.

Indessen sind alle bisher gegebenen Auflösungen noch immer dadurch beschränkt, daſs sie nur Länge durch Länge, Breite durch Breite u. s. w. geben, oder daſs in ihnen die wahren und scheinbaren Orte des Mondes sich immer nur auf dieselbe Ebene beziehen. Um sich daher auch von dieser Abhängigkeit frei zu machen, wollen wir in diesem dritten Probleme aus der wahren Länge und Breite des Mondes unmittelbar das scheinbare Azimut und die scheinbare Höhe, so wie den scheinbaren Halbmesser desselben abzuleiten suchen.

Um aber hier die Bezeichnungen leichter zu übersehen, wollen wir, einer gewöhnlichen Annahme gemäſs, voraussetzen, daſs λ, β die wahre Länge und Breite, α, δ die Rectascension und Declination, ω, h das Azimut und die Höhe des Mondes bezeichnet, und diese scheinbaren Gröſsen λ', α'.... mit einem Striche unterscheiden. Sei ferner π und r dasselbe, wie zuvor, e die Schiefe der Ecliptik, t die Sternzeit der Beobachtung, φ die geocentrische Polhöhe und H, α die geocentrische Höhe und das geocentrische Azimut, also $H = 90 - r$.

Dieses vorausgesetzt, findet man aus denselben Gleichungen (A), aus welchen bisher alles Vorhergehende abgeleitet wurde, nach einigen zweckmäſsigen Verwandlungen, die hier umständlich anzuführen zu weitläuftig sein würde, folgende Ausdrücke:

$$M \,.\, \mathrm{tg}\,\omega' = (\sin\lambda\cos\beta\cos e - \sin\beta\sin e)\cos t - \cos\lambda\cos\beta\sin t - \sin\pi\cos H\sin\alpha,$$

$$M \,.\, \mathrm{tg}\,h' = (\sin\lambda\cos\beta\cos e - \sin\beta\sin e)\cos\varphi\sin t\cos\omega' + (\sin\lambda\cos\beta\sin e + \sin\beta\cos e)\sin\varphi\cos\omega' + (\cos\beta\cos\lambda\cos\varphi\cos t - \sin\pi\sin H)\cos\omega',$$

$$M \,.\, \sin\Delta' = \sin\Delta \,.\, \cos h'\cos\omega',$$

wo, der Kürze wegen, gesetzt wurde

$$M = (\sin\lambda\cos\beta\cos e - \sin\beta\sin e)\sin\varphi\sin t$$
$$- (\sin\lambda\cos\beta\sin e + \sin\beta\cos e)\cos\varphi$$
$$+ \cos\lambda\cos\beta\sin\varphi\cos t - \sin\pi\cos H\cos\Omega$$

Diese Ausdrücke enthalten die vorhergehenden und mehrere andere, als bloſse besondere Fälle in sich. Setzt man z. B. in ihnen $t = 0$ und $\varphi = 90°$, und verändert man die Gröſsen α', h', Ω, H resp. in α', δ', t, φ, so erhält man die Gleichungen, welche aus der wahren Länge und Breite λ, β des Mondes unmittelbar die scheinbare Höhe h' und das scheinbare Azimut α' geben.

Verändert man die Gröſsen α', h', Ω, H, e resp. in λ', β', L, B, o, so erhält man die Gleichungen, welche aus der wahren Länge und Breite λ, β unmittelbar die scheinbare Länge und Breite geben.

Verändert man die Gröſsen α', h', λ, β, Ω, H, e resp. in α', δ', α, δ, t, φ, o, so erhält man die Gleichungen, welche aus der wahren Rectascension α und Declination δ diese scheinbaren Gröſsen α', δ' geben.

Verändert man diese Gröſsen λ, β, Ω, H, e resp. in α, h, o, $90 - r$ und ϱ, so erhält man die Gleichungen, welche aus dem wahren Azimut α und der wahren Höhe h diese scheinbaren Gröſsen α', h' geben u. s. w., so daſs die drei letzten Ausdrücke alle anderen in sich enthalten, durch welche man aus dem wahren Orte des Mondes den scheinbaren finden kann. Aehnliche Gleichungen wird man auch für die Bestimmung des wahren Ortes aus dem scheinbaren entwickeln, daher ich mich hier nicht länger dabei aufhalte. Daſs übrigens dieselben Gleichungen auch die Auflösung des im Anfange aufgestellten geometrischen Problems in seiner ganzen Allgemeinheit enthalten, ist für sich klar.

4. Problem. Dieser unmittelbare Uebergang von der Ecliptik auf den Horizont, zu welchem man gewöhnlich den Aequator als Brücke braucht, leitet gleichsam von selbst noch auf folgende Ausdrücke, die bei mehreren Untersuchungen ihren Nutzen haben können.

Behält man die Bezeichnungen von N. 3. bei, so findet man bekanntlich Länge und Breite aus Rectascension und Declination durch folgende Gleichungen

$$\cos\lambda\cos\beta = \cos\alpha\cos\delta,$$
$$\sin\lambda\cos\beta = \sin\alpha\cos\delta\cos e + \sin\delta\sin e,$$
$$\sin\beta = -\sin\alpha\cos\delta\sin e + \sin\delta\cos e.$$

Und eben so findet man umgekehrt Rectascension und Declination aus Länge und Breite durch die Gleichungen

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\cos\beta,$$
$$\sin\alpha\cos\delta = \sin\lambda\cos\beta\cos e - \sin\beta\sin e;$$
$$\sin\delta = \sin\lambda\cos\beta\sin e + \sin\beta\cos e.$$

Ganz auf ähnliche Art findet man auch die Rectascension α oder vielmehr den Stundenwinkel $t - \alpha$ und die Declination δ aus dem Azimut ϖ und der Höhe h durch die Ausdrücke:

$$\cos\delta\sin(t-\alpha) = \cos h\sin\varpi,$$
$$\cos\delta\cos(t-\alpha) = \sin h\cos\varphi + \cos h\sin\varphi\cos\varpi,$$
$$\sin\delta = \sin h\sin\varphi - \cos h\cos\varphi\cos\varpi,$$

und endich auch umgekehrt Azimut und Höhe aus Stundenwinkel und Declination durch die Ausdrücke

$$\cos h\sin\varpi = \cos t\sin(t-\alpha),$$
$$\cos h\cos\varpi = \cos\delta\sin\varphi\cos(t-\alpha) - \sin\delta\cos\varphi,$$
$$\sin h = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos(t-\alpha).$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke wird man nun auch leicht folgende zwei allgemeine Aufgaben auflösen.

I. Man suche Länge und Breite unmittelbar aus Azimut und Höhe.

Eliminirt man aus den vorhergehenden vier Systemen von Gleichungen die Gröfsen α und δ, so erhält man sofort

$$\begin{aligned}\cos\beta\cos\lambda = {} & (\cos\varpi\cos h\sin\varphi + \sin h\cos\varphi)\cos t \\ & + \sin t\sin\varpi\cos h,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\cos\beta\sin\lambda = {} & (\sin h\cos\varphi + \cos h\sin\varphi\cos\varpi)\sin t\cos e \\ & + (\sin h\sin\varphi - \cos h\cos\varphi\cos\varpi)\sin e \\ & - \cos t\sin\varpi\cos h\cos e,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\sin\beta = {} & -(\sin h\cos\varphi + \cos h\sin\varphi\cos\varpi)\sin t\sin e \\ & + (\sin h\sin\varphi - \cos h\cos\varphi\cos\varpi)\cos e \\ & + \cos t\sin\varpi\cos h\sin e.\end{aligned}$$

II. Man suche umgekehrt Azimut und Höhe aus Länge und Breite.

Eine ähnliche zweckmäfsige Elimination von α und δ aus den zwölf vorhergehenden Gleichungen wird geben

$$\begin{aligned}\cos h\sin\varpi = {} & -(\sin\lambda\cos\beta\cos e - \sin\beta\sin e)\cos t \\ & + \sin t\cos\lambda\cos\beta,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\cos h\cos\varpi = {} & -(\sin\lambda\cos\beta\sin e + \sin\beta\cos e)\cos\varphi \\ & + (\sin\lambda\cos\beta\cos e - \sin\beta\sin e)\sin t\sin\varphi \\ & + \cos t\sin\varphi\cos\lambda\cos\beta,\end{aligned}$$

$$\sin h = (\sin\lambda \cos\beta \sin e + \sin\beta \cos e) \sin\varphi$$
$$+ (\sin\lambda \cos\beta \cos e - \sin\beta \sin e) \sin t \cos\varphi$$
$$+ \cos t \cos\varphi \cos\lambda \cos\beta.$$

Noch wird es zuweilen nothwendig sein, die Fehler zu bestimmen, welche aus einer irrigen Annahme einiger dieser Größen in den anderen daraus abgeleiteten entstehen. Nennt man π den Winkel des Declinationskreises mit dem Breitenkreise, ρ den Winkel des Vertical- mit dem Declinationskreise, und endlich ξ den Winkel des Breiten- mit dem Verticalkreise, so erhält man durch Differentiation der vorhergehenden Gleichungen folgende Ausdrücke:

III. Fehler der Länge und Breite aus denen der Rectascension und Declination.

$$d\beta = d\delta \cos\pi - d\alpha \sin\pi \cos\delta,$$
$$d\lambda \,.\, \cos\beta = d\delta \sin\pi + d\alpha \cos\pi \cos\delta,$$

und umgekehrt:

$$d\delta = d\lambda \sin\pi \cos\beta + d\beta \cos\pi,$$
$$d\alpha \,.\, \cos\delta = d\lambda \cos\pi \cos\beta - d\beta \sin\pi.$$

IV. Fehler der Declination und des Stundenwinkels s aus denen der Höhe und des Azimuts.

$$d\delta = dh \cos\rho + d\omega \sin\rho \cos h,$$
$$ds \,.\, \cos\delta = - dh \sin\rho + d\omega \cos\rho \cos h,$$

und umgekehrt:

$$dh = - ds \sin\rho \cos\delta + d\delta \cos\rho,$$
$$d\omega \,.\, \cos h = ds \cos\rho \cos\delta + d\delta \sin\rho.$$

V. Fehler des Azimuts und der Höhe aus denen der Länge und Breite.

$$dh = d\lambda \cos\beta \sin\xi + d\beta \cos\xi,$$
$$d\omega \,.\, \cos h = - d\lambda \cos\beta \cos\xi + d\beta \sin\xi,$$

und umgekehrt:

$$d\beta = d\omega \cos h \sin\xi + dh \cos\xi,$$
$$d\lambda \,.\, \cos\beta = - d\omega \cos h \cos\xi + dh \sin\xi.$$

24.

Ueber einige Definitionen in der Geometrie.

(Von Herrn *Louis Olivier.*)

Einen geometrischen Satz definiren oder erklären, heifst: mit Hülfe schon vorhandener deutlicher Vorstellungen einen Begriff davon geben, welcher hindert, dafs man den Gegenstand mit anderen verwechsele. Gewöhnlich werden geometrische Gegenstände durch ihre Eigenschaften definirt. Man nimmt den Gegenstand als vorhanden und gegeben an, und individualisirt ihn durch Beschreibung seiner Verbindung mit anderen, oder durch Beschreibung seiner Eigenschaften.

Die Eigenschaften eines Gegenstandes und ihre Möglichkeit sind entweder an sichs elbst klar begreiflich, oder sie beruhen auf denen anderer. Z. B., dafs zwei Linien sich schneiden können, oder, dafs Linien Flächen und Flächen Körper einschliefsen können, ist an sich selbst klar; hingegen, dafs zwei Ebenen nur in einer geraden Linie sich schneiden können, beruhet schon auf den Eigenschaften der Ebene; dafs Parallelogramme, den gleichen Seiten gegenüber, gleiche Winkel haben, beruhet auf den Eigenschaften sich schneidender Parallelen, u. s. w. Nur diejenigen Definitionen, welche sich auf Eigenschaften beziehen, die an sich selbst klar sind, können also allen Lehrsätzen vorhergehen. Alle Definitionen mit Hülfe von Eigenschaften, welche von denen anderer Gegenstände abhängen, und deren Existenz also erst nachgewiesen werden mufs, können nur erst dann gegeben werden, wenn die Eigenschaften, auf welche sie sich beziehen, bewiesen worden sind; denn sonst kommt man in Gefahr, Gegenstände zu definiren, die gar nicht existiren. Es folgt daraus, dafs es nicht gut möglich ist, die Definitionen von zusammengesetzten geometrischen Figuren, die man untersuchen will, im Voraus zu geben; denn da eben der Zweck der Untersuchung darin bestehet, die Eigenschaften der Figuren zu finden, so kann man unmöglich Figuren definiren, ehe die Eigenschaften derjenigen, von welchen sie abhängen, oder aus welchen sie zusammengesetzt sind, untersucht worden sind.

Diese Regel pflegt häufig nicht beobachtet zu werden. Man findet Definitionen von geometrischen Figuren und Begriffen an der Spitze ganzer Abschnitte,

die deshalb nothwendig, einschliefslich, Lehrsätze enthalten müssen, welche erst in der Folge bewiesen werden. Selbst in dem Lehrbuche des Euclides ist dieses der Fall.

Nach der 29sten Definition z. B., im ersten Buche, ist dasjenige Dreieck spitzwinklig, welches drei spitze Winkel hat, das heifst, zufolge der 12ten Definition: drei Winkel, die kleiner sind als rechte. Es ist aber nicht an sich selbst klar, dafs ein solches Dreieck existire. In der That wird erst in der Folge bewiesen, dafs die drei Winkel eines Dreiecks zusammen immer zweien rechten gleich sind, und daraus folgt erst, dafs ein Dreieck mit drei spitzen Winkeln möglich ist. Eben, wie man sagt: ein spitzwinkliges Dreieck solle heifsen, welches drei spitze Winkel hat, könnte man z. B. auch sagen: dasjenige Fünfeck, welches fünf rechte Winkel hat, solle z. B. gleichwinklig heifsen; oder dasjenige Viereck, welches vier spitze Winkel hat, solle spitzwinklig heifsen, obgleich dergleichen Fünfecke und Vierecke gar nicht existiren.

Nach der 30sten Definition des ersten Buches soll diejenige Figur Quadrat heifsen, welche gleichseitig und rechtwinklig ist. Es fragt sich aber, ob eine Figur von vier Seiten vier rechte Winkel haben kann, und dann, ob sie zugleich gleichseitig sein kann; Beides sind erst Gegenstände von Lehrsätzen und Beweisen.

Auf ähnliche Art verhält es sich mit der 31sten und 33sten Definition des Oblongums und Rhomboïds.

In der 17ten Definition bedarf der Zusatz, dafs der Durchmesser den Kreis halbirt, des Beweises.

Die 5te und 6te Definition des vierten Buches pafst nur auf solche geradlinige Figuren, die um und in einen Kreis beschrieben werden können.

Nach der ersten Definition des sechsten Buches sollen ähnliche Figuren diejenigen heifsen, deren Winkel einzeln gleich, und in welchen die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind. Es ist aber nicht an sich selbst klar, dafs diese beiden Eigenschaften von Figuren zugleich Statt finden können. In der That wird erst späterhin bewiesen, dafs sie bei Dreiecken nothwendig immer zugleich Statt finden. Sie konnten also auch möglicher Weise als nicht coexistirend vorausgesetzt werden, weil eine solche Voraussetzung erst durch einen Beweis widerlegt werden mufste. Bei mehrseitigen Figuren können sie auch nur mit einander verbunden sein, sind es aber nicht nothwendig. Daher pafst die Verbindung der beiden Eigenschaften nicht zur Definition. Dafs die Figuren, von welchen die ersten Bücher handeln, auch wenn sie von mehr

als drei geraden Linien eingeschlossen werden, in Ebenen liegen sollen, muſs mehrentheils als vorausgesetzt betrachtet werden.

Nach der 3ten Definition im 11ten Buche, soll eine gerade Linie auf einer Ebene perpendiculair heiſsen, wenn sie auf allen geraden Linien, die in der Ebene durch den Durchschnitt der Ebene mit der Linie gehen, perpendiculair stehet. Es ist aber die Frage, ob eine solche Linie möglich ist. Die Möglichkeit folgt erst aus dem Beweise des vierten Lehrsatzes im 11ten Buche.

Die 9te und 10te Definition ähnlicher und gleicher Körper, daſs sie solche sein sollen, welche von ähnlichen oder gleichen Ebenen begrenzt werden, sind, was auch z. B. Legendre in der XIIten Anmerkung seiner Geometrie bemerkt hat, wirkliche Lehrsätze, die sogar recht schwierig zu beweisen sind, und allgemein erst in der neuesten Zeit bewiesen wurden. Selbst, wenn man mit Legendre annimmt, daſs Euclid nur solche Polyëder im Sinne gehabt habe, deren Körper-Winkel alle dreiseitig sind, bedarf der Satz, daſs dergleichen Körper, von gleichen und ähnlichen Ebenen umschlossen, gleich und ähnlich sind, erst noch des Beweises. Man kann z. B. nicht ohne Beweis sagen, daſs zwei Pyramiden congruiren, wenn die vier Dreiecke, welche die eine umschlieſsen, den vier Dreiecken, welche die andern begrenzen, gleich sind. Nimmt man an, daſs in den Abschriften des Euclides der Zusatz von der Gleichheit der Winkel, welche die umschlieſsenden Ebenen ähnlicher Polyëder mit einander machen, ausgelassen sei, so verhält es sich mit der Erklärung noch wie mit der ersten im 6ten Buche von der Aehnlichkeit der Figuren in der Ebene. Die Möglichkeit solcher Polyëder ist nicht an sich selbst klar.

Die 13te Definition im 11ten Buch erklärt ein Prisma für einen Körper, von dessen begrenzenden Ebenen zwei einander gegenüber, gleich und parallel, die übrigen aber Parallelogramme sind. Es bedarf aber des Beweises, daſs das Letzte möglich ist.

Die Erklärungen der fünf regulairen Körper Nr. 25. 26. 27. 28. 29. im 11ten Buche setzen die Möglichkeit solcher Körper voraus, die aber nicht von selbst einleuchtet.

Die Definitionen der Kugel, des Kegels und Cylinders, Nr. 14. 18. und 21. im 11ten Buche, sind dynamisch. Es wäre aber erst nachzuweisen, daſs dergleichen Erklärungen mit den übrigen, nicht dynamischen, in keinem Widerspruche stehen; denn läſst man diese Art zu definiren in der Geometrie zu, so kann auch das berühmte 11te Axiom, worauf die Parallelen-Theorie beruhet, bewiesen werden. Soll sie aber dort nicht gelten, so darf sie es auch hier nicht.

Da sich das Werk des Euclides im Uebrigen durch Consequenz und Schärfe der Begriffe in so hohem Grade auszeichnet, so ist zu vermuthen, dafs die Definitionen, welche Lehrsätze enthalten, ursprünglich vom Verfasser selbst nicht an die Spitze der Abschnitte gestellt wurden, sondern dafs sie nur durch die Abschriften und Uebertragungen dahin gerathen sind, und dafs Ergänzungen, welche fehlen, verloren gingen. Da die Euclidischen Definitionen sonst genau und strenge sind, so würde, um das Euclidische Werk auch in diesem Betracht von wahrscheinlich unverschuldeten Vorwürfen zu befreien, weiter nichts nöthig sein, als die Definitionen am gehörigen Orte, erst hinter die Lehrsätze, deren sie bedürfen, einzuschalten.

Abgesehen aber vom Euclidischen und jedem anderen Lehrbegriffe der Geometrie, ist es unstreitig gut, dafs man die Definitionen der Gegenstände, welche untersucht werden sollen, theils so einfach und bestimmt gebe, als es sich thun läfst, theils sie so weit vorrücke und so allgemein mache, als möglich. Je leichter und eher man erfährt, wovon die Rede ist, und je bestimmter und umfassender es ausgedrückt wird: um so besser ist es. Hat man nur erst klare Vorstellungen von dem, worauf es ankommt, so kann man in der Mathematik nicht leicht mehr irren; denn es sind alsdann nur noch Schlüsse übrig, welche in der Vernunft selbst liegen, die sich nie widerspricht. Hat die Vernunft einen Gegenstand erst richtig ergriffen, so fördert ihr Mechanismus das Resultat, wie von selbst, zu Tage. In Voraussetzungen kann man Fehler machen, die aus der Unvollkommenheit des menschlichen Erkennungsvermögens entstehen: in Schlüssen nicht mehr. Das ist eben die Unfehlbarkeit der Mathematik.

Wir wollen in diesem Sinne einige Vorschläge zu Definitionen machen, und dabei diejenigen von der Gleichheit, — vorzüglich aber von der Aehnlichkeit der Figuren, welche letztere besonders eine der schwierigeren zu sein scheint, zum Hauptgegenstande machen; die übrigen also nur in sofern berühren, als sie auf jene Bezug haben können.

1) Jeder begrenzte Raum heifse Körperraum, die Grenze eines Körperraumes Fläche, die Grenze einer Fläche Linie, die Grenze einer Linie Punct. Alles Ausgedehnte, als Körperraum, Fläche und Linie, heifse Figur. Eine eingeschlossene Fläche heifse Flächenfigur, eine umschlossene Ebene ebene Figur, ein umschlossener Körperraum Körper, ein von Ebenen umschlossener Körperraum Polyëder.

2) Dafs man sich eine und dieselbe Figur an beliebigen Orten im Raume

vorstellen kann, mufs als Grundsatz angenommen werden. Auch Euclid thut es, indem er z. B. Dreiecke aufeinander legt u. s. w.

Wenn man sich nach diesem Grundsatze eine und dieselbe Figur nach einander an verschiedenen Orten im Raume, an allen diesen Orten aber gleichsam die Spuren der Figur zurückgeblieben vorstellt, so entsteht eine beliebige Menge von Figuren, welche alle die Eigenschaft haben, dafs sie einen und denselben Ort im Raume einnehmen können. Es sind also Figuren möglich, deren Grenzen alle einen und denselben Ort im Raume einnehmen, oder die ineinander fallen oder congruiren, oder sich decken können. Dergleichen Figuren sollen gleich oder congruent heifsen. Weiter unten werden wir auf eine zweite Definition der Gleichheit der Figuren kommen.

3) Eine Linie von beliebiger Länge, die mit einer ihr gleichen Linie auf keine Weise einen Flächenraum einschliefsen kann, heifse gerade, jede andere, wenn sie weder selbst gerade, noch aus geraden zusammengesetzt ist, krumm. Diese Erklärung der geraden Linie kommt der Euclidischen, vermöge des zwölften Grundsatzes dieses Schriftstellers, am nächsten.

4) Eine Fläche, die mit einer ihr gleichen Fläche auf keine Weise einen Körperraum einschliefsen kann, heifse eben oder Ebene, jede andere, wenn sie weder selbst eben, noch aus Ebenen zusammengesetzt ist, krumm.

5) Die Neigung zweier sich schneidender gerader Linien in ihrem Durchschnitt heifse Winkel, der Durchschnittspunct Scheitel, die von zwei sich schneidenden geraden Linien eingeschlossenen, neben einander liegenden Winkel Nebenwinkel, gleiche Nebenwinkel rechte, Winkel, die kleiner als rechte sind, spitz, Winkel, die gröfser sind, stumpf.

6) Nachdem aus den Eigenschaften der Ebene bewiesen worden, dafs darin überall gerade Linien liegen können, nenne man gerade Linien in einer Ebene die sich nirgend begegnen, Parallelen. Ebenen, die sich nirgend begegnen nenne man parallel.

7) Nachdem bewiesen worden, dafs sich zwei Ebenen nur in einer geraden Linie schneiden können, nenne man den Winkel, welchen zwei beliebige, in den Ebenen auf ihren Durchschnitt durch einen und denselben Punct desselben gezogenen Perpendikel einschliefsen, Ebenen-Winkel oder Winkel der Ebenen, den Durchschnitt der Ebenen, Kante (*arête*), die Figur, welche drei und mehrere, durch einen und denselben Punct gehenden Ebenen bilden, nenne man drei-, vier- etc. seitige Körper-Ecke (*angle solide à trois, quatre etc. faces*), die einschliefsenden Ebenen, Seiten, ihre Durchschnitte

Kanten, die Winkel, welche die Ebenen mit einander machen, Seiten-Winkel (*angles des faces*), die Winkel zwischen den Kanten, Kanten-Winkel.

8) Ebene Figuren, die von drei, vier und mehreren geraden Linien umschlossen sind, nenne man Dreieck, Viereck, u. s. w., die umschliefsenden geraden Linien, Seiten der Figur, die Winkel, welche die Seiten mit einander machen, Winkel der Figur; gerade Linien, welche die Scheitel der Winkel verbinden, ohne Seiten der Figur zu sein, Diagonalen. Einzelnen, durch bestimmte Verhältnisse der Seiten und Winkel von anderen sich unterscheidenden Arten von Figuren können ihre Benennungen, wie z. B. Parallelogramm, Rechteck, Quadrat, regelmäfsiges Vieleck u. s. w., erst dann gegeben werden, wenn bewiesen worden, dafs die Verhältnisse, auf welche sich die Benennungen beziehen, möglich sind.

9) Die Ebenen, welche ein Polyëder einschliefsen, nenne man Seiten-Ebenen (*faces*), ihre Durchschnitte Kanten (*arêtes*), die Körperecken des Polyëders Ecken (*angles solides*), die Winkel, welche die Kanten miteinander machen, Kanten-Winkel (*angles des arêtes*), die Winkel, welche die Seiten-Ebenen mit einander machen, Seiten-Winkel (*angles des faces*), die Diagonalen in den Seiten-Ebenen Seiten-Diagonalen (*diagonales des faces*), gerade Linien, welche, ohne in einer Seiten-Ebene zu liegen, Ecken des Polyëders verbinden, Ecken-Diagonalen (*diagonales du polyèdre*), Ebenen, welche, ohne Seiten-Ebenen zu sein, Kanten des Polyëders mit Ecken verbinden (nachdem bewiesen worden, dafs durch eine gerade Linie und einen Punct aufserhalb derselben immer eine Ebene liegen kann), Diagonal-Ebenen (*plans diagonaux*). Nachdem ferner bewiesen worden, dafs in jedem Polyëder die Zahl der Seiten, Ecken und Kanten von einander abhängt (der bekannte Eulersche Satz, dafs die Summe der Zahl der Ecken und Seiten immer um zwei gröfser ist als die Zahl der Kanten), nenne man ein Polyëder, welches, um es allgemein auszudrücken, k Ecken, m Seiten und n Kanten hat, k eckiges m Seit, oder k ekiges n Kant, oder m seitiges k Eck, u. s. w. (*polyèdres à k angles solides et m faces etc.* Ich glaube, dafs sich dies im Deutschen kurz so ausdrücken läfst. D. H.). Einzelnen, durch bestimmte Verhältnisse der Flächen, Kanten-Winkel, und Seiten-Ebenen-Winkel von einander sich unterscheidenden Arten von Polyëdern, können ihre Benennungen, wie z. B. Würfel, Tetraëder, Prisma, regelmäfsiges Polyëder etc., wie oben, erst dann gegeben werden, wenn bewiesen worden, dafs die Verhältnisse, auf welche sich die Benennungen beziehen, möglich sind.

10) Der Definition (2.) gemäfs, sind in gleichen Figuren nothwendig alle ähnlich liegende gerade Linien, welche z. B. Ecken verbinden, und alle Winkel, die von solchen Linien oder von gleichliegenden Ebenen eingeschlossen werden, gleich grofs, denn wären irgend zwei gleichliegende Linien oder Winkel ungleich, so könnten sich die Figuren nicht mehr decken. Gleiche Figuren haben also nothwendig überall gleiche Seiten, Diagonalen und Winkel. Man kann aber umgekehrt, ohne im Voraus auszusprechen, was erst hernach bewiesen wird, nicht sagen, dafs eine Figur, in welcher alle gerade Linien und Winkel gleich sind denen in einer anderen, dieser gleich ist. Denn wenn man die Eigenschaften der Figuren untersucht, so findet man, dafs die Seiten und Diagonalen einer Figur in der Ebene, oder die Seiten und Diagonalen der Ebenen, welche eine Figur im Raume einschliefsen, nebst den Winkeln zwischen denselben, nicht allesammt willkürlich sind, sondern dafs immer einige von den übrigen, die ebenfalls vielleicht noch gewissen Bedingungen unterworfen sind, abhängen. Z. B. wenn in einem Dreieck die drei Seiten, oder zwei Seiten und der eingeschlossene, oder der der gröfseren gegenüberliegende Winkel, oder zwei Winkel und eine Seite eine bestimmte Gröfse haben, so sind die übrigen Stücke (*parties*) nicht mehr willkürlich, sondern hängen von den übrigen ab. Auch die gegebenen Stücke sind noch gewissen Bedingungen unterworfen. Z. B. von den drei Seiten eines Dreiecks dürfen zwei zusammen nicht kürzer sein, als die dritte; zwei gegebene Winkel dürfen beide nicht stumpf sein, u. dergl. Man mufs also die unabhängigen Stücke einer Figur von den abhängigen unterscheiden, und man könnte, wenn man die Gleichheit von Figuren durch ihre Seiten, Diagonalen und Winkel definiren wollte, nur sagen: Figuren sind gleich, wenn es ihre unabhängigen Seiten oder Diagonalen und Winkel, überhaupt ihre unabhängigen Stücke sind; denn alsdann sind die übrigen Stücke ebenfalls, und folglich alle Stücke nothwendig gleich. Man könnte die unabhängigen Linien einer Figur messende oder bestimmende Linien, die unabhängigen Winkel messende oder bestimmende Winkel (*lignes et angles déterminants*) nennen. Da aber, was so ausgesprochen wird, eigentlich nur ein Inbegriff von Resultaten ist, so ist es keine Definition, und man kann nur sagen: Gleiche Figuren sind, die sich decken. Die obige Unterscheidung unabhängiger Stücke einer Figur von den abhängigen ist aber nützlich und nothwendig, um ähnliche Figuren zu definiren; worauf wir jetzt kommen.

11) Man definire: Figuren sind ähnlich, wenn die messenden Linien

der einen, Gleichvielfache (*equimultiples*) der messenden Linien der anderen, und die messenden Winkel der einen den messenden Winkeln der anderen gleich sind. (Diese Definition hängt von keiner Eigenschaft der einzelnen Figuren ab, und ist also erlaubt. Denn mit unabhängigen Stücken können beliebige Figuren gebildet werden, und folglich auch Figuren, deren Winkel denen einer anderen gleich, und deren Linien Gleichvielfache von denen einer gegebenen Figur sind.

Diese Definition ähnlicher Figuren würde an die Stelle der Euclidischen treten, in sofern man die Erklärung, statt hinter die Untersuchung der Eigenschaften ähnlicher Figuren, vor dieselbe setzen wollte; welches offenbar besser wäre, weil alsdann um so eher allgemein bezeichnet würde, wovon die Rede ist. Die darauf folgende Untersuchung ähnlicher Figuren müfste alsdann zeigen, dafs auch die abhängigen Linien der einen Figur nothwendig Gleichvielfache von den abhängigen Linien der anderen, und zwar die nemlichen Vielfache wie die messenden Linien, und die abhängigen Winkel der einen Figur nothwendig den abhängigen Winkeln der anderen gleich sind.

Wollte man die Euclidische Definition beibehalten, so müfste man erst blos Figuren von der Art sich vorstellen, dafs die messenden Linien der einen, Gleichvielfache von den ähnlich liegenden Linien der anderen, und die messenden Winkel der einen den ähnlich liegenden Winkeln der anderen gleich sind. Von diesen Figuren müfste man dann beweisen, dafs auch die übrigen Linien der einen eben solchen Gleichvielfachen der übrigen Linien der anderen, und die übrigen Winkel der einen den übrigen Winkeln der anderen gleich sind, dafs also Figuren existiren, von der Art, dafs alle Linien der einen Gleichvielfache von ähnlich liegenden Linien der anderen, und alle Winkel der einen, ähnlich liegenden Winkeln der anderen gleich sind. Erst dann könnte man dergleichen Figuren ähnlich nennen. Die Definition stände also, statt vor dem Abschnitt, hinter demselben, was, wie leicht zu sehen, nicht so gut ist, als wenn man sie, wie vorhin, vor den Abschnitt setzt.

12) Aber auch die erste Definition ähnlicher Figuren (11.) hat noch die Schwierigkeit, dafs man erst vollständig nachweisen mufs, welche Stücke einer Figur unabhängig, und welche es nicht sind, welches besonders bei Polyëdern sehr schwierig, und, so viel mir bekannt, noch nirgend vollständig und allgemein geschehen ist. Da diese Nachweisung erst durch die Untersuchung gleicher Figuren gegeben werden kann, so kann man auf diese Weise von ähnlichen Figuren keine Definition eher geben, ehe nicht gleiche Figuren untersucht

sucht sind. Man könnte zwar definiren: Figuren sind ähnlich, wenn die nemlichen Linien und Winkel; von deren Gleichheit die Gleichheit der Figuren abhängt, erstere in der einen Figur Gleichvielfache von denen der anderen, letztere in beiden Figuren gleich groſs sind. Allein diese Definition wäre immer nur das Nemliche: sie wäre an die Frage gebunden, von welchen Stücken die Gleichheit zweier Figuren abhänge? und also erst dann völlig verständlich, wenn diese Frage beantwortet, das heiſst, wenn die Gleichheit der Figuren vollständig untersucht wäre.

Da man nun aber wünschen könnte, einen Begriff von ähnlichen Figuren schon früher, und vielleicht sogar schon mit der Definition von gleichen Figuren zugleich zu geben, so fragt es sich, ob und wie fern dieses möglich sei.

Man fällt leicht auf den Gedanken, die Erklärung gleicher Figuren durch Congruenz oder durch Decken, bei ähnlichen Figuren nachzuahmen und z. B. zu sagen: Figuren sind ähnlich, wenn sie, in eine parallele Lage gebracht, und aus einem und demselben Puncte gesehen, sich decken. Diese Erklärung ist auch für Figuren in der Ebene völlig zulänglich. Man kann unstreitig die Ebenen, in welchen sich zwei Figuren befinden, parallel mit einander legen. Deckt alsdann in irgend einer Lage die obere Figur, aus irgend einem Puncte gesehen, die untere, so kann man sie der unteren ähnlich nennen; denn diese Bedingung der Aehnlichkeit ist an keine Eigenschaft der Figuren selbst gebunden. Aber man kommt mit der Erklärung nicht aus, wenn eine Figur in verschiedenen Ebenen liegt, also z. B. bei Polyëdern. Denn die Seiten-Ebenen der Polyëder haben gegen einander bestimmte Neigungen, und da man nun nur eine Ebene der einen Figur mit einer Ebene der anderen willkürlich parallel legen kann, so hängt es schon von den Eigenschaften der Figur ab, ob auch zugleich die übrigen Ebenen der einen Figur mit den gleichliegenden Ebenen der anderen parallel sind. Wollte man zur Bedingung der Aehnlichkeit machen, daſs alle Ebenen ähnlicher Figuren in parallele Lagen müssen gebracht werden können, so hängt es wiederum von den Eigenschaften der Figur ab, ob auch alsdann z. B. die Kanten und Diagonale der einen Figur Gleichvielfache von denen der anderen sind, wie es die Aehnlichkeit wirklich erfordert. Die Definition kann daher ohne vorhergegangene Lehrsätze nicht bestehen, und ist folglich nicht willkürlich.

Nicht anders verhält es sich, wenn man, statt des Parallelismus der Ebenen einer Figur vielmehr den Parallelismus der Kanten oder Seiten und Diagonalen zur willkürlichen Bedingung der Aehnlichkeit machen,

und also z. B. sagen wollte: Aehnlich sind Figuren, deren Kanten, parallel gelegt, in irgend einer Lage, aus einem und demselben Punct gesehen, sich decken. Es muſs alsdann erst wieder bewiesen werden, daſs die Kanten alle parallel gelegt werden können, so daſs es mit der wirklichen Aehnlichkeit bestehe.

Anders dagegen verhält es sich, wenn man die Aehnlichkeit von Figuren weder durch die Lage von Ebenen, noch durch die Lage von Linien, sondern vielmehr durch die Lage von Puncten erklärt, und sagt: Figuren sind ähnlich, wenn alle ihre Ecken so gelegt werden können, daſs die Ecken der einen und die ähnlich liegenden Ecken der anderen in geraden Linien liegen, welche durch einen und denselben Punct gehen, und wenn zugleich die Entfernungen der Ecken der einen Figur von diesem Puncte Gleichvielfache sind von den Entfernungen der Ecken der anderen von dem nemlichen Puncte.

Diese Erklärung ähnlicher Figuren ist von jeder Eigenschaft der Figuren unabhängig, und kann folglich allen Lehrsätzen vorhergehen. Denn nach den Bedingungen für gerade Linien kann man unstreitig durch jede Ecke einer Figur und einen anderen bestimmten Punct beliebige gerade Linien legen, und in diesen Linien kann man, von dem bestimmten Punct aus, beliebige Längen, also auch solche nehmen, welche Gleichvielfache der Entfernungen des Puncts von den Ecken der ersten Figur sind. Diese Puncte kann man zu Ecken einer neuen Figur machen, und also völlig willkürlich eine neue Figur construiren, die man der gegebenen ähnlich nennt. In der That hat diese neue Figur alle Eigenschaften derjenigen, die nach Euclides wirklich der gegebenen ähnlich ist, nemlich: ähnlich liegende Linien der einen Figur sind Gleichvielfache der anderen, und ähnlich liegende Winkel der einen sind den Winkeln der anderen gleich. Dieses muſs hernach, wenn die Eigenschaften der ähnlich genannten Figuren untersucht werden, bewiesen werden, und wird in der That aus den Bedingungen der Definition selbst, mit Hülfe folgender drei Sätze gefunden, die also nur *a priori* zu beweisen sind:

1) Daſs wenn zwei Seiten eines Dreiecks Gleichvielfache von zwei Seiten eines anderen, und die eingeschlossenen Winkel in beiden Dreiecken gleich sind: daſs dann die dritte Seite des einen Dreiecks das nemliche Vielfache von der dritten Seite des anderen ist;

2) Daſs, wenn die drei Seiten des einen Dreiecks Gleichvielfache von den drei Seiten eines anderen sind, daſs dann die Winkel des einen Dreiecks den Winkeln des anderen gleich sind;

3) Dafs wenn die Kanten einer von Dreiecken umschlossenen Pyramide Gleichvielfache von den ähnlich liegenden Kanten einer anderen Pyramide sind, dafs alsdann auch alle Seitenwinkel der beiden Pyramiden gleich sind.

Mit Hülfe der drei Sätze ist der Beweis folgender:

Man stelle sich vier beliebige Puncte im Raume vor, die wir durch A, B, C, D bezeichnen wollen. Durch je zwei kann eine gerade Linie liegen, also können sechs gerade Linien, AB, AC, AD, BC, BD und CD Statt finden. Durch jede drei Linien kann eine Ebene liegen, also 4 Ebenen, ABC, ABD, ACD und BCD. Die 6 geraden Linien werden die Seiten der 4 Ebenen sein, und die Ebenen werden eine Pyramide einschliefsen, deren Ecken die Puncte A, B, C, D sind. Man stelle sich ferner 4 andere Puncte a, b, c, d im Raume vor, und lege durch dieselben, auf ähnliche Weise, Linien und Ebenen, so dafs eine zweite Pyramide $abcd$ entstehet. Nun werde vorausgesetzt, dafs die Puncte A und a, B und b, C und c, D und d so gelegt werden können, dafs sie mit irgend einem Puncte P im Raume in geraden Linien AaP, BbP, CcP und DdP liegen, und dafs

$$\frac{AP}{aP}=\frac{BP}{bP}=\frac{CP}{cP}=\frac{DP}{dP}$$

ist, wie es die Definition ähnlicher Figuren verlangt. Alsdann haben offenbar die Dreiecke APB und aPb, APC und aPc, APD und aPd, BPC und bPc, BPD und bPd, CPD und cPd gleiche Winkel zwischen gleichvielfachen Seiten. Wenn also nun (1.) bewiesen worden, dafs in solchen Dreiecken die dritten Seiten die nemlichen Gleichvielfachen sind, so folgt, dafs

$$\frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac}=\frac{AD}{ad}=\frac{BC}{bc}=\frac{BD}{bd}=\frac{CD}{cd}$$

ist. Die Seiten der Ebenen ABC, ABD, ACD und BCD sind also sämmtlich Gleichvielfache der Seiten der Ebenen abc, abd und bcd. Wenn daher ferner (2.) bewiesen worden, dafs die Winkel von Dreiecken, deren Seiten Gleichvielfache sind, gleich sind, so folgt, dafs die Kantenwinkel der beiden Pyramiden gleich sind. Und wenn drittens (3.) bewiesen worden, dafs auch die Seitenwinkel zweier dreiseitigen Pyramiden gleich sind, wenn die Kanten der einen Gleichvielfache sind von den Kanten der anderen, so folgt, blos aus der Definition, dafs alle Linien der einen Pyramide $ABCD$ Gleichvielfache sind von den ähnlich liegenden Linien der anderen $abcd$, und alle Winkel der ersten Pyramide gleich den ähnlich liegenden Winkeln der anderen. Nun kann man sich aber jedes Polyëder aus solchen dreiseitigen Pyramiden zusammenge-

32 *

setzt vorstellen, und wenn das Polyëder Ebenen von mehr als drei Seiten hat, so fallen blos vier und mehrere Ecken in eine Ebene. Der obige Beweis bleibt derselbe. Also folgen aus der Definition die Eigenschaften ähnlicher Figuren für jeden beliebigen Fall.

Da die Definition auch unverändert auf beliebige krumme Linien und Flächen paſst, und für diese sogar vielleicht die allgemeinste ist, weil sich krumme Linien und Flächen durch messende oder bestimmende Linien weniger gut definiren lassen, als Figuren, die von geraden Linien und Ebenen eingeschlossen sind, so scheint sie ihrem Gegenstand angemessen zu sein. Uebrigens enthält die Definition auch diejenige von gleichen Figuren einschlieſslich. Für den Fall gleicher Figuren liegt nemlich der Punct, in welchem sich die geraden Linien durch die Ecken vereinigen, unendlich entfernt, die geraden Linien durch ihn und die Ecken sind Parallelen, und die Entfernungen der Ecken zweier gleicher Figuren von einander sind einander gleich. Dieses ist die oben (2.) erwähnte zweite Definition gleicher Figuren. Die Definition paſst allgemein, auf alle Fälle

---

25.

Fortsetzung der geometrischen Betrachtungen (18. Heft 2.).

(Von Herrn *J. Steiner.*)

---

§. V. Fortsetzung der Folgerungen aus der gemeinschaftlichen Potenz bei Kreisen, die in einerlei Ebene liegen. (§. III. S. 173. Heft 2.)

20.

Wenn eine gerade Linie zwei, der Gröſse und Lage nach gegebene Kreise schneidet, und durch einen der beiden Aehnlichkeitspuncte derselben geht: so sind nach (7.) die nach den Durchschnittspuncten gehenden Radien der Kreise paarweise parallel, und nach (10.) ist das Product aus den Abständen zweier solcher Durchschnittspuncte, deren zugehörige Radien nicht parallel sind, von dem genannten Aehnlichkeitspunct, eine beständige Gröſse, welche wir die gemeinschaftliche Potenz der Kreise, in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct, genannt haben. Zum Beispiel: Zieht man aus dem äuſsern Aehnlichkeitspuncte A der beiden gegebenen Kreise m, M (Fig. 2.) die gerade Linie Ab_1bBB_1, welche die

Kreise in den Puncten b_1, b, B, B_1 schneidet: so sind sowohl die Radien mb_1 und MB, als auch mb und MB_1 parallel; und andererseits sind sowohl die Puncte b und B, als auch b_1 und B_1, in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct A potenzhaltend, d. h., das Product $Ab \times AB = Ab_1 \times AB_1$ ist eine beständige Gröfse a^2, wie auch immerhin die schneidende Linie ihre Lage ändern mag.

Es ist klar, dafs einem bestimmten Punct b oder b_1, nur ein einziger Punct B oder B_1 so entspricht, dafs beide zusammen, in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct A, potenzhaltend sind, d. h., dafs beide Puncte auf einerlei Seite von A liegen (im gegenwärtigen Fall), und dafs das Product $Ab \times AB$ oder $Ab_1 \times AB_1$ einer gegebenen Gröfse a^2 gleich ist: so dafs also jeder Punct B, welcher mit irgend einem Punct b, der in der Peripherie des Kreises m liegt, in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct A, potenzhaltend ist, nothwendig in der Peripherie des Kreises M liegt. Daher folgt der nachstehende Satz:

„Ist in einer Ebene ein beliebiger Punct A und ein Kreis m, der Lage und Gröfse nach, gegeben, und man zieht aus dem Punct eine gerade Linie, welche den Kreis in den Puncten b, b_1 schneidet, und nimmt in dieser Linie die Puncte B, B_1 so an, dafs sie mit jenen Puncten b, b_1 auf einerlei Seite von A liegen, und dafs das Product $Ab \times AB = Ab_1 \times AB_1$ einer gegebenen Gröfse a^2 gleich ist: so ist der geometrische Ort der Puncte B, B_1 die Peripherie eines bestimmten Kreises M, welcher mit dem gegebenen Kreise m den gegebenen Punct A zum Aehnlichkeitspunct, und, in Bezug auf diesen, die genannte Gröfse a^2 zur gemeinschaftlichen Potenz hat."

Aehnliches findet in Bezug auf den innern Aehnlichkeitspunct (I) (7.) zweier aufser einander liegender Kreise m, M, und bei zwei in einander liegenden, so wie auch bei zwei einander schneidenden Kreisen Statt.

21.

Haben die beiden Kreispaare m, M und m_1, M_1 (Fig. 3.) denselben Punct A zum Aehnlichkeitspunct, und, in Bezug auf denselben, gleiche und gleichartige (12.) gemeinschaftliche Potenzen: so folgt, dafs die Puncte, in welchen z. B. die Kreise M, M_1 einander schneiden, mit den Puncten, in welchen die Kreise m, m_1 einander schneiden, in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct A potenzhaltend sind. Denn schneiden die Kreise M, M_1 einander in den Puncten B und C: so folgt (20.), dafs z. B. derjenige Punct b, welcher mit dem Puncte B, in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct A, potenzhaltend ist, vermöge der Voraussetzung und vermöge des Kreispaars m, M, in der Peripherie des Kreises m, und vermöge des Kreispaars m_1, M_1, in der Peripherie des Kreises m_1 liegt,

folglich liegt er in beiden Kreisen m, $m_{\prime}$ zugleich, d. h. er ist einer ihrer Durchschnittspuncte. Daher folgt Nachstehendes:

„Haben zwei Kreispaare m, M und $m_{\prime}$, $M_{\prime}$ einen und denselben Punct A zum Aehnlichkeitspunct, und, in Bezug auf denselben, gleiche und gleichartige gemeinschaftliche Potenzen: so liegen sowohl die Durchschnittspuncte der Kreise M, $M_{\prime}$ mit denjenigen der Kreise m, $m_{\prime}$, als auch die Durchschnittspuncte der Kreise M, $m_{\prime}$ mit denjenigen der Kreise m, $M_{\prime}$, paarweise mit dem Aehnlichkeitspunct A in geraden Linien, d. h. AbB, AcC, AdD, AeE sind gerade Linien."

Es ist klar, daſs, wenn z. B. die Puncte B, C, in welchen die Kreise M, $M_{\prime}$ einander schneiden, zusammenfallen, daſs dann nothwendig auch die beiden Durchschnittspuncte b, c der Kreise m, $m_{\prime}$ zusammenfallen; woraus, als spezieller Fall des vorliegenden Satzes, der nachstehende folgt:

„Haben zwei Kreispaare m, M und $m_{\prime}$, $M_{\prime}$ einen und denselben Punct A zum Aehnlichkeitspunct, und in Bezug auf denselben gleiche und gleichartige gemeinschaftliche Potenzen, und zwei von diesen Kreisen, die nicht ein Paar bilden (z. B. M, $M_{\prime}$), berühren einander: so berühren auch die beiden übrigen Kreise (m, $m_{\prime}$) einander, und die beiden Berührungspuncte liegen mit dem Aehnlichkeitspuncte A in gerader Linie und sind in Bezug auf denselben potenzhaltend."

Nimmt man an, die beiden Kreise $m_{\prime}$, $M_{\prime}$ fallen in einen einzigen Kreis $M_{\prime}$ zusammen, so folgt ferner:

„Ist die Potenz eines Kreises $M_{\prime}$, in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct A zweier gegebenen Kreise m, M, gleich und gleichartig mit der gemeinschaftlichen Potenz der letztern Kreise, in Bezug auf denselben Punct: so berührt der Kreis $M_{\prime}$, wenn er einen der beiden Kreise m, M berührt, auch zugleich den andern, und es liegen die beiden Berührungspuncte mit dem Punct A in gerader Linie, und sind in Bezug auf denselben potenzhaltend."

22.

Aus dem Vorliegenden lassen sich unter andern nachstehende merkwürdige Folgerungen ziehen.

Es seien z. B. zwei beliebige, in einander liegende Kreise n, N (d. i. die Kreise $cdDC$ und $feEF$) (Fig. 4.) gegeben, AG sei ihre Linie der gleichen Potenzen (3.), und von den beiden beliebigen Kreisen m, M berühre jeder die beiden gegebenen Kreise ungleichartig: so folgt (13.), daſs der äuſsere Aehnlichkeitspunct A, der beiden Kreise m, M in der Linie GA liegt, und ferner folgt (12.), daſs die Potenz jedes der beiden gegebenen Kreise n, N, in

Bezug auf den Aehnlichkeitspunct A, gleich und gleichartig ist der gemeinschaftlichen Potenz der Kreise m, M, in Bezug auf denselben Punct. Daher folgt ferner, dafs, wenn der Kreis m_1 die drei Kreise n, N, m berührt, dafs alsdann auch derjenige Kreis M_1, — welcher mit dem Kreise m_1 den Punct A zum Aehnlichkeitspunct, und, in Bezug auf denselben, gleiche und gleichartige gemeinschaftliche Potenz hat, wie das Kreispaar m, M, — die drei Kreise n, N, M berührt (21.). Es ist klar, dafs ein Gleiches von einem folgenden Kreispaare m_2, M_2, welches sich an das Kreispaar m_1, M_1 anschliefst, gilt; u. s. w. Man zieht daraus folgende Sätze:

„Beschreibt man irgend zwei beliebige Kreise m, M, von denen jeder zwei, der Gröfse und Lage nach gegebene, in einander liegende Kreise n, N ungleichartig berührt: so liegt ihr äufserer Aehnlichkeitspunct A in der Linie der gleichen Potenzen (GA) der gegebenen Kreise; und beschreibt man ferner auf gleiche Weise die Kreispaare m_1, M_1; m_2, M_2; m_3, M_3; ......, welche sich an einander anschliefsen, d. h., welche einander der Ordnung nach berühren: so hat jedes dieser Kreispaare denselben Punct A zum äufsern Aehnlichkeitspunct."

Stellt man sich eine Reihe Kreise M, M_1, M_2, M_3, ... vor, von denen jeder die beiden gegebene Kreise n, N ungleichartig berührt, und welche einander der Reihe nach berühren, fortgesetzt, bis man wieder nach dem ersten Kreis M zurückkommt, und so weiter im Ring herum: so kehrt entweder die Reihe in sich selbst zurück oder nicht, d. h. 1) entweder gelangt man schon, wenn man zum ersten Mal zu dem Kreis M zurückkehrt, zu einem Kreise M_x, welcher sich dem Kreise M anschliefst, so dafs der darauf folgende Kreis M_{x+1} mit dem Kreise M zusammenfällt, oder man gelangt erst, wenn man zum zweiten, dritten, vierten ...... etc. Mal nach dem Anfangsgliede der Reihe zurückkehrt, zu einem solchen Kreise M_x, welcher sich gerade an den Kreis M anschliefst; oder 2) man gelangt nie, so lange man auch die Reihe fortsetzen mag, zu einem solchen Kreise, welcher sich dem Kreise M anschliefst, so dafs der Raum, in welchem sich die Reihe befindet, für die letztere incommensurabel ist. Da nun nach dem vorstehenden Satze die Kreise m, m_1, m_2, ..., respective mit den Kreisen M, M_1, M_2, ..., den Punct A zum äufsern Aehnlichkeitspunct haben: so folgt, dafs, wenn man in der letztern Reihe von Kreisen nach einem oder nach mehreren Umläufen, zu einem solchen Kreise M_x gelangt, welcher sich dem Kreise M anschliefst (ihn berührt), dafs dann auch in der erstern Reihe, der ebensovielte Kreis m_x, sich dem Anfangsgliede (m) dieser Reihe anschliefst, und dafs die

Reihe $m, m_1, m_2, \ldots\ldots m_x$ eben so viele Umläufe enthält, als die Reihe M, $M_1, M_2, \ldots\ldots M_x$. Daraus schliefst man folgenden merkwürdigen Satz:

„Ist der Zwischenraum zwischen zwei, der Gröfse und Lage nach gegebenen, in einander liegenden, Kreisen n, N, für eine bestimmte Reihe Kreise M, M_1, $M_2, \ldots\ldots M_x$, von denen jeder jene beiden ungleichartig berührt, und welche einander der Ordnung nach berrühren, commensurabel, d. h., besteht die Reihe aus $x+1$ Gliedern, welche u Umläufe bilden, und berührt der letzte Kreis M_x wiederum den ersten M: so ist derselbe Zwischenraum für jede beliebige Reihe Kreise $m, m_1, m_2, \ldots\ldots m_x$, wo man auch das Anfangsglied m annehmen mag, commensurabel; und es besteht die letztere Reihe ebenfalls aus $x+1$ Gliedern, welche u Umläufe bilden, wie jene erstere Reihe."

Es folgt aus diesem Satze zugleich: „dafs, wenn der genannte Zwischenraum für irgend eine bestimmte Reihe Kreise $M, M_1, M_2, \ldots\ldots$ incommensurabel ist, er alsdann für jede andere Reihe Kreise $m, m_1, m_2, \ldots\ldots$ ebenfalls incommensurabel ist."

Es ist noch zu bemerken, dafs, im Fall die genannte Reihe in sich zurückkehrt, d. i. commensurabel ist, und u die Zahl der Umläufe derselben bezeichnet, dafs dann die Zahl der Glieder der Reihe nicht kleiner sein kann als $2u+1$.

Aus dem Obigen folgt ferner: „dafs wenn z. B. der Kreis q die drei Kreise m, m_1, N berührt, dafs dann auch derjenige Kreis Q, — welcher mit ihm den Punct A zum äufsern Aehnlichkeitspunct, und in Bezug auf diesen, gleiche und gleichartige gemeinschaftliche Potenz hat, wie die Kreispaare m, M und m_1, M_1, — die drei Kreise M, M_1, N berührt; oder dafs also umgekehrt, die beiden Kreise q, Q, welche man in die beiden, einander entsprechenden, Arbelen (krummlinigen Dreiecke) bcd, BCD beschreibt, mit den Kreispaaren m, M und m_1, M_1 ein und denselben Punct A zum Aehnlichkeitspunct, und in Bezug auf diesen, gleiche und gleichartige gemeinschaftliche Potenz haben. Eben so haben diejenigen beiden Kreise o, O, welche man in die Arbelen bef und BEF beschreibt, den nemlichen Punct A zum äufsern Aehnlichkeitspunct, und in Bezug auf diesen, gleiche und gleichartige gemeinschaftliche Potenz, wie jedes der genannten Kreispaare. Und beschreibt man ferner in zwei neu entstandene, einander entsprechende Arbelen, wie z. B. in den Arbelos bhk, welcher zwifchen den drei Kreisen m, m_1, q liegt, und in den entsprechenden Arbelos BHK, welcher zwischen den drei Kreisen M, M_1, Q liegt, zwei Kreise r, R: so haben auch diese den nemlichen Punct A zum äufsern Aehnlichkeitspunct, u. s. w., von Geschlecht zu Geschlecht, bis in's Unendliche."

Alle

Alle die vorstehenden Sätze finden auf ganz gleiche Weise Statt, wenn anstatt der beiden in einander liegenden Kreise n, N, zwei aufser einander liegende Kreise gegeben sind, wie leicht zu sehen.

Ferner finden bei Kreisen, die in einer und derselben Kugelfläche liegen, so wie überhaupt bei ebenen Curven, die in einer und derselben Fläche zweiten Grades liegen, ähnliche Sätze Statt. Endlich finden auch analoge Sätze bei Kugeln im Raume Statt; von welchen Allem, nebst Mehrerem, an einem andern Ort.

23.

Da die Berührungspuncte d, D, in welchen der gegebene Kreis N die beiden Kreise m, M berührt, mit dem äufseren Aehnlichkeitspunct A der letzteren Kreise in gerader Linie liegen (8.): so folgt, dafs, wenn man in dem Puncte d an die beiden Kreise m, N (Fig. 5.) die Tangente da legt, welche die Linie der gleichen Potenzen AG der gegebenen Kreise n, N in dem Puncte a schneidet, dafs dann der Kreis m mit keinem anderen Kreise M oder μ, welcher die gegebenen Kreise n, N ungleichartig berührt, den Punct a zum Aehnlichkeitspunct haben kann; sondern dafs vielmehr der äufsere Aehnlichkeitspunct, welchen der Kreis m mit irgend einem jener Kreise gemein hat, entweder über oder unter dem Punct a (in der Linie AG) liegt, je nachdem sich der letztere Kreis (M oder μ) auf der einen oder auf der anderen Seite des Kreises m befindet. Z. B., der äufsere Aehnlichkeitspunct A der Kreise m, M liegt oberhalb, und der äufsere Aehnlichkeitspunct α der Kreise m, μ liegt unterhalb des Punctes a.

Da jede beliebige gerade Linie ApP, welche durch den äufseren Aehnlichkeitspunct A der beiden Kreise m, M geht, eine äufsere Aehnlichkeitslinie dieser Kreise ist (7.), d. h., die aus den Mittelpuncten m, M nach jener Linie gezogenen Parallelen mp, MP sich wie die Radien der Kreise m, M, oder, wenn man diese Radien durch r, R bezeichnet, wie r zu R verhalten, so ist $\frac{mp}{r} = \frac{MP}{R}$.

Eben so hat man, wenn man nach der Linie $\alpha\pi p$, welche durch den äufseren Aehnlichkeitspunct α der Kreise m, μ geht, die Parallelen mp, $\mu\pi$ zieht, und den Radius des Kreises μ durch ϱ bezeichnet: $\frac{mp}{r} = \frac{\mu\pi}{\varrho}$.

Zieht man nun die gerade Linie $a\pi_1 pP_1$: so schneidet sie offenbar von den Linien $\mu\pi$, MP die Stücke $\pi\pi_1$, PP_1 ab, so dafs folglich der Quotient $\frac{mp}{r}$ gröfser ist, als jeder der beiden Quotienten $\frac{\mu\pi_1}{\varrho}$ und $\frac{MP_1}{R}$. Daraus folgt, dafs

der Quotient des Kreises m (der dem Kreise m zugehörige Quotient) ein Gröſstes (Maximum) ist. Das heiſst:

„Zieht man aus irgend einem Punct a der Linie der gleichen Potenzen (AG) zweier gegebenen, in einander liegenden Kreise n, N, eine beliebige gerade Linie ap, und ferner aus den Mittelpuncten $m, \mu, M, \ldots$ beliebiger Kreise $m, \mu, M, \ldots$, von denen jeder die gegebenen Kreise ungleichartig berührt, nach jener Linie ap, in irgend einer Richtung, die Parallelen $mp, \mu\varkappa_1, MP_1, \ldots$, und dividirt diese durch die Radien $r, \varrho, R, \ldots$ der respectiven Kreise $m, \mu, M, \ldots$: so ist der Quotient desjenigen Kreises m (d. h. der Quotient, welcher zu diesem Kreise gehört), welcher mit dem Kreise N zusammen von der Tangente ad in einem und demselben Puncte d berührt wird, unter allen übrigen Quotienten der gröſste."

Aus ganz gleichen Gründen ist auf der anderen Seite der Linie ap: „der Quotient desjenigen Kreises m_1, welcher mit dem Kreise N zusammen von der Tangente ad_1 in einem und demselben Puncte d_1 berührt wird, unter den Quotienten aller diesseits liegenden Kreise der gröſste."

Nimmt man die zuerst betrachtete Seite der Linie ap als positiv, und die letztere als negativ an, so ist alsdann: „der Quotient des Kreises m, in Bezug auf die Linie ap, der gröſste positive, und der Quotient des Kreises m_1 ist der gröſste negative."

In Bezug auf eine andere Linie aber, welche die gegebenen Kreise n, N nicht schneidet, wie die Linie ap, ist von den Quotienten der beiden Kreise m, m_1, der eine unter allen übrigen der gröſste, und der andern der kleinste. Nemlich: in Bezug auf irgend eine Linie ap_1, welche den Winkel Aam theilt, ist der Quotient des Kreises m unter allen übrigen der kleinste, und der des Kreises m_1 unter allen der gröſste; dagegen ist in Bezug auf irgend eine Linie ap_2, welche den Winkel Gam_1 theilt, der Quotient des Kreises m unter allen übrigen der gröſste; und der des Kreises m_1 unter allen der kleinste.

Vermöge des Bisherigen kann nun nachstehende Aufgabe leicht und bequem gelöset werden.

Aufgabe.

„Wenn zwei beliebige, in einander liegende Kreise n, N, der Gröſse und Lage nach, gegeben sind: unter allen Kreisen $m, m_1, \mu, M, \ldots$, von denen jeder jene beiden ungleichartig berührt, denjenigen zu finden, dessen Quotient in Bezug auf eine gegebene gerade Linie (ap oder ap_1 oder ap_2) ein Maximum

oder ein Minimum ist, d. h. daſs, wenn man aus den Mittelpuncten $m, m_1, \mu, M, \ldots$ jener Kreise, nach der gegebenen geraden Linie, in irgend einer Richtung, Parallelen zieht, und diese durch die Radien der respectiven Kreise dividirt, daſs dann von diesen Quotienten dem gesuchten Kreise der gröſste oder der kleinste zugehöre."

Auflösung.

1) Man beschreibe einen willkürlichen Kreis K, welcher die gegebenen Kreise n, N in den Puncten b, b_1, B, B_1 schneidet, und ziehe die Sehnen bb_1, BB_1, welche derselbe mit den letztern Kreisen gemein hat, und welche Sehnen einander in einem bestimmten Puncte C schneiden.

2) Aus dem Puncte C fälle man auf die Axe nN der gegebenen Kreise das Loth CGa, welches die gegebene gerade Linie (ap oder ap_1 oder ap_2) in dem Punct a schneidet, und welches Loth die Linie der gleichen Potenzen der beiden gegebenen Kreise n, N ist (4.).

3) Aus dem Punct a lege man die Tangenten ae, ae_1, ad, ad_1 an die gegebenen Kreise n, N, welche die letzteren in den Puncten e, e_1, d, d_1 berühren, und beschreibe

4) diejenigen beiden Kreise m, m_1, von denen der erstere die gegebenen Kreise n, N in den Puncten e, d, und der letztere in den Puncten e_1, d_1 berührt (§. 1. Nr. 4.): so leisten diese, wie aus dem Obigen folgt, der vorgelegten Aufgabe Genüge.

Beschreibt man ferner diejenigen beiden Kreise ϱ, ϱ_1, von denen der erste die gegebenen Kreise n, N in den Puncten e_1, d, und der letztere in den Puncten e, d_1 berührt; so folgt aus ganz ähnlichen Gründen, daſs diese Kreise der Aufgabe Genüge leisten, wenn unter allen Kreisen $\varrho, \varrho_1, \ldots$, welche die gegebenen gleichartig (anstatt ungleichartig) berühren, diejenigen verlangt werden, deren Quotienten, in Bezug auf die gegebene gerade Linie, ein Maximum oder Minimum sein sollen.

Es ist noch zu bemerken, daſs Alles, was in dem Vorliegenden (23.), in Bezug auf die beiden ineinander liegenden Kreise n, N gesagt wurde, auch auf ganz ähnliche Weise, in Bezug auf zwei auſsereinander liegende Kreise Statt findet. Ferner finden analoge Sätze bei Kugeln im Raume Statt. Wären z. B. anstatt der Kreise n, N zwei Kugeln, und anstatt der geraden Linie ap (oder ap_1 oder ap_2) irgend eine Ebene gegeben, und man sollte unter allen Kugeln, welche die gegebenen beiden Kugeln berühren, diejenigen finden, deren Quotien-

ten, in Bezug auf die gegebene Ebene, ein Maximum oder Minimum sind: so wäre die Auflösung der vorliegenden der Kreise ganz ähnlich. Nemlich die Ebenen bb_1 und BB_1 der Berührungspuncte einer willkürlichen Kugel K und der gegebenen Kugeln m, M, schneiden einander in einer bestimmten geraden Linie C; die durch diese Linie C gehende und zur Axe MmG senkrecht stehende Ebene CGc schneidet die gegebene Ebene xx in einer bestimmten Linie c, und die durch diese Linie c an die gegebenen Kugeln gelegten Berührungsebenen berühren dieselben in den verlangten Puncten e, e_1, d, d_1, in welchen sie von den gesuchten Kugeln m, m_1, s, s_1 berührt werden.

§ VI. Verallgemeinerung eines von Pappus überlieferten (alten) Satzes.

24.

Pappus (*Collectiones mathematicae, libr. IV.* vom *XII.* bis zum *XVIII.* Theorem) beweist folgenden, wie er ihn nennt, alten Satz*):

„Beschreibt man eine Reihe Kreise $m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots m_x$ (Fig. 6. 7.), von denen jeder die beiden gegebenen, einander in B berührenden, Kreise M_1, M_2 berührt, und welche einander der Reihe nach berühren: so bilden die Quotienten, die entstehen, wenn man die aus den Mittelpuncten $m_1, m_2, m_3, \ldots m_x$ auf die Axe M_1M_2 gefällten Lothe $m_1P_1, m_2P_2, m_3P_3, \ldots m_xP_x$, durch die Radien $r_1, r_2, r_3, \ldots r_x$ der respectiven Kreise $m_1, m_2, m_3, \ldots m_x$ dividirt, folgende arithmetische Reihe:

a) Wenn der Mittelpunct m_1 des ersten Kreises m_1 der genannten Reihe in der Axe M_1M_2 der gegebenen Kreise liegt, so ist (Fig. 6.)

$$\frac{m_1P_1}{r_1},\ \frac{m_2P_2}{r_2},\ \frac{m_3P_3}{r_3},\ \frac{m_4P_4}{r_4},\ \ldots\ldots \frac{m_xP_x}{r_x}$$
$$= 0\ ,\quad 2\ ,\quad 4\ ,\quad 6\ ,\ \ldots\ldots (x-1).2$$

b) Wenn der erste Kreis m_1 der genannten Reihe die Axe M_1M_2 der gegebenen Kreise berührt, so ist (Fig. 7.):

$$\frac{m_1P_1}{r_1},\ \frac{m_2P_2}{r_2},\ \frac{m_3P_3}{r_3},\ \frac{m_4P_4}{r_4},\ \ldots\ldots \frac{m_xP_x}{r_x}$$
$$= 1\ ,\quad 3\ ,\quad 5\ ,\quad 7\ ,\ \ldots\ldots 2x-1."$$

Oder der eigentliche Satz, aus welchem diese beiden Fälle (a, b) blofse Folgerungen sind, ist der nachstehende (*Theorem XV. libr. IV.*):

---

*) „*Circumfertur in quibusdam libris antiqua propositio huiusmodi.*"

c) „Wenn zwei Kreise M_1, M_2 (Fig. 8.), die einander in B berühren, der Gröfse und Lage nach gegeben sind, und man beschreibt irgend zwei beliebige Kreise m_1, m_2, welche einander in b berühren, und von denen jeder jene beiden Kreise berührt, fället sodann aus den Mittelpuncten m_1, m_2 auf die Axe M_1M_2 der gegebenen Kreise die Lothe m_1P_1, m_2P_2, und dividirt diese Lothe durch die Radien r_1, r_2 der respectiven Kreise m_1, m_2: so ist der dem letztern Kreise (m_2) zugehörige Quotient um 2 gröfser als der erstere, d. h. es ist

$$\frac{m_1P_1}{r_1} + 2 = \frac{m_2P_2}{r_2},$$

oder, wie sich Pappus ausdrückt: das Loth m_1P_1 plus dem Durchmesser des zugehörigen Kreises m_1, verhält sich zu diesem Durchmesser, wie das Loth m_2P_2 zum Durchmesser des zugehörigen Kreises m_2, d. i., $\frac{m_1P_1 + 2r_1}{2r_1} = \frac{m_2P_2}{2r_2}$."

Bedient man sich der Hülfsmittel und Kunstausdrücke, welche in den vorhergehenden Paragraphen (I, II, III.) enthalten sind: so kann der Satz, wie folgt, bewiesen werden.

A. Die gerade Linie AB (Fig. 8.), welche die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 in dem Puncte B berührt, ist zugleich die Linie der gleichen Potenzen derselben. (§. I. Nr. 3.)

B. Da jeder der beiden Kreise M_1, M_2 die beiden Kreise m_1, m_2 gleichartig berührt, so folgt:

α) dafs die Linie BA (als Linie der gleichen Potenzen der Kreise M_1, M_2) durch den äufseren Aehnlichkeitspunct der Kreise m_1, m_2 geht (13.), und dafs daher der Punct A, in welchem die Axe m_1m_2 die Tangente BA schneidet, der äufsere Aehnlichkeitspunct der Kreise m_1, m_2 ist;

β) dafs ferner die aus den Mittelpuncten m_1, m_2 nach der Linie AB gezogenen Parallellinien sich verhalten wie die Radien r_1, r_2 der respectiven Kreise m_1, m_2 (7.), dafs also z. B. $Am_2 : Am_1 = r_2 : r_1$; und da AB, m_2P_2, m_1P_1 zu der Axe BM_1M_2 senkrecht, mithin unter sich parallel sind, dafs auch $BP_2 : BP_1 = r_2 : r_1$;

γ) dafs endlich jeder der beiden Kreise M_1, M_2, in Bezug auf den äufseren Aehnlichkeitspunct A der Kreise m_1, m_2, potenzhaltend ist, so dafs das Quadrat der Tangente AB gleich ist der gemeinschaftlichen Potenz der Kreise m_1, m_2, in Bezug auf ihren äufseren Aehnlichkeitspunct A (12.)

C. Da ferner auch das Quadrat der Linie Ab gleich ist der gemeinschaftlichen Potenz der Kreise m_1, m_2, in Bezug auf den Punct A (weil in dem Be-

rührungspunct b zwei potenzhaltende (12.) Puncte zusammen fallen): so folgt (γ), dafs $AB^2 = Ab^2$, und mithin auch $AB = Ab$ ist.

D. Nach der Voraussetzung sind die Radien $m_2 C$ und $m_1 D$ der Kreise m_1, m_2 parallel (senkrecht zur Axe BM_1M_2), daher liegen die drei Puncte DbC in gerader Linie (7.); und da $AB = Ab$ und $m_2 b = m_2 C$ (als Radien des Kreises m_2) und auch AB und $m_2 C$ parallel sind: so liegen auch die drei Puncte BCb in gerader Linie, und mithin ist $BCbD$ eine gerade Linie.

E. Zieht man nun noch die gerade Linie Bm_2E, so hat man:

$$ED : m_2 C = BP_1 : BP_2 = r_1 : r_2 \text{ (II, } \beta\text{)},$$

oder, wenn man bemerkt, dafs $m_2 C = r_2$,

$$ED : r_2 = r_1 : r_2$$

und folglich:

$$ED = r_1,$$

und da auch $m_1 D = r_1$,

$$m_1 E = 2r_1.$$

Nun ist ferner

$$EP_1 : m_2 P_2 = BP_1 : BP_2$$
$$= r_1 \quad : r_2 \text{ (II, } \beta\text{)},$$

oder da $EP_1 = m_1 P_1 + m_1 E = m_1 P_1 + 2r_1$, so ist:

$$m_1 P_1 + 2r_1 : m_2 P_2 = r_1 : r_2,$$

und folglich:

$$\frac{m_1 P_1}{r_1} + 2 = \frac{m_2 P_2}{r_2},$$

welches der obige Satz (c) ist.

Stellt man sich nun eine Reihe Kreise $m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots\ldots, m_x$ vor, von denen jeder die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 berührt, und welche einander der Reihe nach berühren: so hat man nach dem vorliegenden Satze:

$$\frac{m_2 P_2}{r_2} = \frac{m_1 P_1}{r_1} + 2,$$
$$\frac{m_3 P_3}{r_3} = \frac{m_2 P_2}{r_2} + 2 = \frac{m_1 P_1}{r_1} + 4,$$
$$\frac{m_4 P_4}{r_4} = \frac{m_3 P_3}{r_3} + 2 = \frac{m_1 P_1}{r_1} + 6,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{m_x P_x}{r_x} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{m_1 P_1}{r_1} + 2(x-1).$$

Oder, wenn man zur Abkürzung den Quotienten $\frac{m_1 P_1}{r_1} = q$, und die Lothe $m_2 P_2 = p_2$, $m_3 P_3 = p_3$, ..., $m_x P_x = p_x$ setzt, so ist:

$$\frac{p_2}{r_2} = q + 2;\ \frac{p_3}{r_3} = q + 4;\ \frac{p_4}{r_4} = q + 6;\ \ldots\ldots \frac{p_x}{r_x} = q + 2(x-1).$$

Setzt man $q = 0$, d. h., nimmt man an, der Mittelpunct m_1 des ersten Kreises liege in der Axe $M_1 M_2$ der gegebenen Kreise (Fig. 6.), so hat man:

$$\frac{p_2}{r_2} = 2;\ \frac{p_3}{r_3} = 4;\ \frac{p_4}{r_4} = 6;\ \ldots\ldots \frac{p_x}{r_x} = 2(x-1),$$

welches der obige spezielle Satz (a) ist.

Und setzt man $q = 1$, d. h., nimmt man an, der erste Kreis m_1 berühre die Axe $M_1 M_2$ der gegebenen Kreise (Fig. 7.), so hat man:

$$\frac{p_1}{r_1} = 1;\ \frac{p_2}{r_2} = 3;\ \frac{p_3}{r_3} = 5;\ \frac{p_4}{r_4} = 7;\ \ldots\ldots \frac{p_x}{r_x} = 2x - 1,$$

welches der obige spezielle Satz (b) ist.

Es ist klar, dafs der Hauptsatz (c) unverändert wahr bleibt, wenn auch der Kreis M_2 sich immer mehr ausdehnt, bis er zuletzt in die gerade Linie BA übergeht; und dafs dieser Satz ferner auch dann noch Statt findet, wenn der Kreis M_2 durch die gerade Linie BA gegangen ist, und auf der anderen Seite derselben wieder als eigentlicher Kreis zum Vorschein kommt, so dafs nun die beiden Kreise M_1 und M_2 einander äufserlich berühren. Wen diese Ableitungen nicht befriedigen, für den bemerken wir, dafs der Beweis für die abgeleiteten Fälle dem vorstehenden ganz ähnlich ist. P a p p u s beweist jeden Fall besonders.

25.

Wiewohl beim ersten Anblick des vorstehenden interessanten Satzes zu vermuthen, dafs derselbe einer gröfseren Ausdehnung fähig sein müsse: so findet sich doch nicht sogleich der Weg, auf welchem dieses Ziel leicht zu erreichen. Das nachstehende Verfahren, durch welches man den Endzweck zum Theil erreicht, ist ziemlich einfach, kann aber vielleicht, zumal da nun das Gesetz bekannt ist, noch auf einem anderen kürzeren Wege bewiesen werden. Das Hauptresultat, welches weiter unten bewiesen werden wird, ist:

„Das bestimmte Gesetz zwischen den Quotienten, die entstehen, wenn man aus den Mittelpuncten m_1, m_2 der beiden Kreise m_1, m_2 (Fig. 8.) auf irgend einen beliebigen Durchmesser eines der beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 (an-

statt auf die Axe BM_1M_2 (24)) Lothe fället, und diese durch die Radien r_1, r_2 der respectiven Kreise m_1, m_2 dividirt."

Wir bemerken hier beiläufig, daſs nun noch die folgende allgemeinere Aufgabe:

„Wenn man aus den Mittelpuncten m_1, m_2 der beiden Kreise m_1, m_2 auf irgend eine gerade Linie L, Lothe fällt, und dieselben durch die Radien r_1, r_2 der respectiven Kreise m_1, m_2 dividirt: ein Gesetz zwischen den beiden Quotienten, die dadurch entstehen, zu finden (24. c)", zu lösen übrig bleibt.

26.

Berühren sich die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 (Fig. 9.) in B, berührt ferner jeder der beiden Kreise m, M die beiden gegebenen, liegt der Mittelpunct M, des letztern, in der Axe M_1M_2, und bezeichnet man die Radien der vier Kreise M_1, M_2, M, m respective durch R_1, R_2, R, r, so ist:

$$AC = BC - BA \text{ oder } 2R = 2R_2 - 2R_1,$$

oder:

$$R = R_2 - R_1, \text{ und andererseits ist auch}$$
$$BM = R_2 + R_1.$$

Ferner ist:

$$BP : BM = r : R \ (24, \text{II}, \beta),$$

oder

$$BP : R_2 + R_1 = r : R_2 - R_1,$$

und folglich:

$$1) \ BP = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} \cdot r.$$

Setzt man zur Abkürzung das, aus dem Mittelpunct m auf die Axe M_1M_2M gefällte Loth $mP = p$, und $M_1P = U$, $M_2P = u$, $M_1m = L$, $M_2m = l$, so findet man leicht folgende Gleichungen:

$$2) \ L = R_1 + r; \ R_2 = l + r; \ BP = R_1 + U = R_2 + u.$$

Nun ist vermöge des rechtwinkligen Dreiecks M_2Pm:

$$l^2 = p^2 + u^2,$$

oder wenn man u aus (2.) und (1.) substituirt,

$$l^2 = p^2 + (BP - R_2)^2$$
$$= p^2 + \left(\frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} \cdot r - (l + r)\right)^2$$
$$= p^2 + \left(\frac{2R_1}{R_2 - R_1} \cdot r - l\right)^2,$$

woraus

woraus

$$l = \frac{\frac{\rho^2}{r^2} + \left(\frac{2R_1}{R_2 - R_1}\right)^2}{2 \cdot \frac{2R_1}{R_2 - R_1}} \cdot r,$$

oder, wenn man den Quotienten $\frac{\rho}{r} = q$ und $\frac{R_1}{R_2 - R_1} = \pi$ setzt,

$$3)\quad l = \frac{q^2 + 4\pi^2}{4\pi} \cdot r$$

folgt. Auf gleiche Weise findet man

$$4)\quad L = \frac{q^2 + 4(\pi + 1)^2}{4(\pi + 1)} \cdot r.$$

Aus der obigen Gleichung $l^2 = p^2 + u^2$ findet man ferner:

$$u^2 = l^2 - p^2 = (l + p)(l - p)$$
$$= \left(\frac{q^2 + 4\pi^2}{4\pi} \cdot r + qr\right)\left(\frac{q^2 + 4\pi^2}{4\pi} \cdot r - qr\right)$$
$$= \left(\frac{q^2 - 4\pi^2}{4\pi}\right)^2 \cdot r^2,$$

und folglich:

$$5)\quad u = \frac{q^2 - 4\pi^2}{4\pi} \cdot r,$$

und eben so:

$$6)\quad U = \frac{q^2 - 4(\pi + 1)^2}{4(\pi + 1)} \cdot r.$$

Endlich ergeben sich aus (2.) und (3.) unmittelbar folgende Werthe für die Radien der beiden gegebenen Kreise M_1, M_2:

$$7)\quad R_2 = \frac{q^2 + 4\pi(\pi + 1)}{4\pi} \cdot r,$$

$$8)\quad R_1 = \frac{q^2 + 4(\pi + 1)\pi}{4(\pi + 1)} \cdot r.$$

Man sieht aus (3.) und (5.), dafs die beiden Linien l und u immer zu dem Radius r commensurabel sind, sobald p zu r (d. i. q) und R_1 zu $R_2 - R_1$ (d. i. π) commensurabel ist. Bevor wir den Hauptgegenstand weiter verfolgen, wollen wir zuerst einige Fälle, wo die genannten Gröfsen respective commensurabel sind, betrachten. Z. B.

a) Nimmt man $\pi = 1$ oder d. i. $R_2 = 2R_1$ an, so hat man (3. u. 5.)

$$\frac{l}{r} = \frac{q^2 + 4}{4} \text{ und } \frac{L}{r} = \frac{q^2 + 16}{8},$$
$$\frac{u}{r} = \frac{q^2 - 4}{4} \text{ und } \frac{U}{r} = \frac{q^2 - 16}{8}.$$

Bezieht man diese Ausdrücke auf eine Reihe Kreise $m_1, m_2, m_3, \ldots$ (Fig. 10.), welche sich aneinander anschliefsen, und wo der Mittelpunct m_1 des ersten derselben in der Axe $M_1 M_2$ der gegebenen Kreise liegt, so hat q respective die Werthe (24, a) $= 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\ldots 2(n-1)$, und daher hat $\frac{l}{r}$ respective die Werthe $1, 2, 5, 10, \ldots (n-1)^2 + 1$; $\frac{L}{r}$ die Werthe $= 2, \frac{5}{2}, 4, \frac{13}{2}, \ldots \frac{(n-1)^2 + u}{2}$; $\frac{u}{r}$ die Werthe $= -1, 0, 3, 8, \ldots\ldots (n-1)^2 - 1$; und endlich hat $\frac{U}{r}$ respective die Werthe $= -2, -\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, \ldots \frac{(n-1)^2 - 4}{2}$; welches folgende Tabelle giebt.

Kreise.	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	....	m_n
$p:r=q=$	0	2	4	6	8	..... .	$2(n-2)$
$l:r=$	1	2	5	10	17	....	$(n-1)^2+1$
$L:r=$	2	$\frac{5}{2}$	4	$\frac{13}{2}$	10	....	$\frac{(n-1)^2+4}{2}$
$u:r=$	-1	0	3	8	15	....	$(n-1)^2-1$
$U:r=$	-2	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	6	....	$\frac{(n-1)^2-4}{2}$

Man sieht hieraus, dafs die vier Mittelpuncte M_1, M_2, m_2, m_3 ein Rechteck bestimmen, dessen Seiten $M_2 m_2$ und $M_2 M_1$ sich verhalten wie 4 : 3.

b) Nimmt man $R_2 = 3R_1$, so ist $x = \frac{R_1}{R_2 - R_1} = \frac{1}{2}$ und $\frac{l}{r} = \frac{q^2+1}{2}, \; \frac{L}{r} = \frac{q^2+9}{6}, \; \frac{u}{r} = \frac{q^2-1}{2}, \; \frac{U}{r} = \frac{q^2-9}{6}$.

Hiernach erhält man für eine Reihe Kreise $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots$ Fig. 11., welche sich der Ordnung nach berühren, und von denen der erste m_1 die Axe $M_1 M_2$ der gegebenen Kreise berührt, so dafs also q respective die Werthe $= 1, 3, 5, 7, \ldots 2n - 1$ hat (24. b), folgende Tabelle:

Kreise.	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	....	m_n
$p:r=q=$	1	3	5	7	9	....	$2n-1$
$l:r=$	1	5	13	25	41	....	$\frac{(2n-1)^2+1}{2}$
$L:r=$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{29}{3}$	$\frac{45}{3}$	....	$\frac{(2n-1)^2+9}{6}$
$u:r=$	0	4	12	24	40	....	$\frac{(2n-1)^2-1}{2}$
$U:r=$	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{36}{3}$	....	$\frac{(2n-1)^2-9}{6}$

c) Nimmt man an, der Kreis M_2 gehe, durch unendliche Vergröfserung, in die gerade Linie AB (Fig. 12.) (Tangente des Kreises M_1) über, so ist $R_2=\infty$, mithin $\pi=\frac{R_1}{\infty-R_1}=0$, und daher

$$\frac{l}{r}=\frac{q^2}{0}=\infty,\quad \frac{L}{r}=\frac{q^2+4}{4}$$
$$\frac{u}{r}=\frac{q^2}{0}=\infty,\quad \frac{U}{r}=\frac{q^2-4}{4}$$
$$\frac{R_2}{r}=\frac{q^2}{0}=\infty,\quad \frac{R_1}{r}=\frac{q^2}{4}\quad (7.\ 8.).$$

Für eine Reihe Kreise $m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots\ldots$, welche einander der Ordnung nach berühren, und von denen der erste m_1 die, zu der Axe BC senkrecht stehende, gerade Linie CD ist, erhält man, da q respective die Werthe $=0$, $2, 4, 6, \ldots\ldots 2(n-1)$ hat (24, a), folgende Tabelle:

Kreise.	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	....	m_n
$p:r=q=$	0	2	4	6	8	10	....	$2(n-1)$
$L:r=$	1	2	5	10	17	10	....	$(n-1)^2+1$
$U:r=$	-1	0	3	8	15	24	....	$(n-1)^2-1$
$R_1:r=$	0	1	4	9	16	25	....	$(n-1)^2$

Wie man sieht, ist hierbei die Reihe der Werthe von $\frac{R_1}{r}$ am auffallendsten.

27.

Es sei AC (Fig. 13.) irgend ein beliebiger Durchmesser eines der beiden gegebenen Kreise M_1, M_2, welche sich in B berühren, z. B. des Kreises M_2. Den Winkel AM_2M_1, welchen derselbe mit der Axe M_1M_2 bildet, wollen wir durch α, und das aus dem Mittelpunct M_1 auf den Durchmesser AC gefällte Loth M_1H durch h bezeichnen.

Von den Kreisen m, m_1, von denen jeder die beiden gegebenen Kreise berührt, sei der letztere ganz beliebig, dagegen liege der Mittelpunct m des ersteren in dem genannten Durchmesser AC. Aus den Mittelpuncten m, m_1 fälle man die Lothe $mP = p$, $m_1P_1 = p_1$ auf die Axe M_1M_2, und ferner aus dem Mittelpunct m_1 das Loth $m_1H_1 = h$ auf den Durchmesser AC. Die Radien der Kreise M_1, M_2, m, m_1 bezeichne man, wie oben, durch R_1, R_2, r, r_1, und setze zur Abkürzung:

$$\frac{M_1H}{R_1} \text{ oder } \frac{h}{R_1} = Q, \text{ und } \frac{R_1}{M_1M_2} \text{ oder } \frac{R_1}{R_2 - R_1} = \pi,$$

so ist

$$1) \quad \sin\alpha = \frac{M_1H}{M_1M_2} = \frac{h}{R_2 - R_1} = \pi \, . \, Q.$$

Bezeichnet man ferner die Winkel $H_1M_2m_1$ und $P_1M_2m_1$ durch β und γ, so ist, wie bekannt:

$$\sin\beta = \sin(\alpha - \gamma) = \sin\alpha \, . \cos\gamma - \cos\alpha \, . \sin\gamma,$$

oder

$$\frac{h_1}{m_1M_2} = \frac{P_1M_2}{m_1M_2} \, . \sin\alpha - \frac{m_1P_1}{m_1M_2} \, . \cos\alpha,$$

und folglich:

$$2) \quad h_1 = P_1M_2 \, . \sin\alpha - m_1P_1 \, . \cos\alpha.$$

Oder wenn man für P_1M_2 und m_1P_1, nach (26.), woselbst sie durch u und p bezeichnet sind, ihre Werthe $\frac{q_1^2 - 4\pi^2}{4\pi} r_1$ und q_1r_1 setzt, so kommt

$$3) \quad h_1 = \frac{q_1^2 - 4\pi^2}{4\pi} r_1 \, . \sin\alpha - q_1r_1 \, . \cos\alpha.$$

Diese Gleichung gilt für jeden beliebigen Kreis m_1, welcher die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 berührt. Für den Kreis m ist aber das Loth $h = 0$, daher hat man:

$$0 = \frac{q^2 - 4\pi^2}{4\pi} \, . r \, . \sin\alpha - qr \, . \cos\alpha,$$

und mithin:

$$4) \quad \cos\alpha = \frac{q^2 - 4\pi^2}{4\pi q} \, . \sin\alpha,$$

wo $q = \frac{mP}{r} = \frac{p}{r}$.

Wird dieser Werth von $\cos\alpha$ in die Gleichung (3.) substituirt, so kommt:

$$5)\quad \frac{h_1}{r_1} = \left(\frac{q_1^2 - 4\pi^2}{4\pi} - q_1 \cdot \frac{q^2 - 4\pi^2}{4\pi q}\right) \sin\alpha.$$

Setzt man in dieser Gleichung (5.) $\pi . Q$ statt $\sin\alpha$ (1.) und $q + 2n$ statt q_1, wo n die Stelle anzeigt, welche der Kreis m_1 nach dem Kreise m einnimmt, so erhält man:

$$\frac{h_1}{r_1} = \left(\frac{(q+2n)^2 - 4\pi^2}{4\pi} - (q + 2n)\frac{q^2 - 4\pi^2}{4\pi q}\right) . \pi . Q$$

$$= Q . n^2 + Q . \frac{q^2 + 4\pi^2}{4q} . 2n.$$

Bemerkt man aber, dafs nach (26, 3.) die Linie $mM_2 = l = \frac{q^2 + 4\pi^2}{4\pi} . r$ und $mP = p = qr$, also $\sin\alpha = \frac{mP}{mM_2} = p : l = qr : \frac{q^2 + 4\pi^2}{4\pi} r = \frac{4q\pi}{q^2 + 4\pi^2}$, und auch $\sin\alpha = \pi . Q$ (1.), folglich

$$\pi Q = \frac{4q\pi}{q^2 + 4\pi^2},$$

oder

$$Q\frac{q^2 + 4\pi^2}{4q} = 1,$$

so geht die vorliegende Gleichung in folgende über:

$$6)\quad \frac{h_1}{r_1} = Qn^2 + 2n,$$

das heifst:

„Man findet den Quotienten $(h_1 : r_1)$ für irgend einen Kreis m_1, welcher die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 berührt, in Bezug auf den angenommenen Durchmesser AC, aus der Stellenzahl n dieses Kreises m_1, von dem Kreise m angerechnet, und aus dem Quotienten $\frac{M_1H}{R_1} = Q$ des Kreises M_1, in Bezug auf denselben Durchmesser AC."

Liegt der Kreis m_1 auf der anderen Seite des Kreises m, wie z. B. der Kreis μ_1: so ist n als negativ zu betrachten, und man hat für diesen Fall:

$$7)\quad \frac{h_1}{r_1} = Q . n^2 - 2n.$$

Die beiden Formeln (6 und 7.) gelten auf ganz gleiche Weise, wenn man anstatt des Durchmessers AC, irgend einen beliebigen Durchmesser des Kreises M_1 annimmt; nur würde sich im letztern Falle der Quotient Q auf den Kreis M_2 beziehen.

Der obige alte Satz (24, c) ist ein spezieller Fall des vorliegenden Satzes

(6. und 7.); man erhält jenen, wenn man bei diesem $Q=0$ setzt, d. h. wenn der angenommene Durchmesser AC mit der Axe M_1M_2 zusammenfällt.

Bezeichnet man den Quotienten $\frac{h_1}{r_1}$ durch Q_1, und den Quotienten $h_x : r_x$ eines Kreises m_x, welcher die $(x-1)^{te}$ Stelle nach dem Kreise m_1 einnimmt, durch Q_x, so ist (6.):

$$Q_1 = Qn^2 + 2n$$
$$Q_x = Q(n+x-1)^2 + 2(n+x-1).$$

Wird aus diesen beiden Gleichungen n eliminirt, so findet man

$$8) \quad Q_x = Q(x-1)^2 \pm 2(x-1)\sqrt{(1+Q.Q_1)} + Q_1.$$

„Diese Gleichung zeigt, wie man aus dem gegebenen Quotienten Q_1 eines bestimmten Kreises m_1, aus dem Quotienten Q des gegebenen Kreises M_1, und aus der Zahl $x-1$, welche anzeigt, die wievielte Stelle irgend ein bestimmter Kreis m_x nach dem Kreise m_1 einnimmt: den Quotienten Q_x des Kreises m_x, in Bezug auf den nemlichen Durchmesser AC, finden kann."

Setzt man $x=2$, so hat man:

$$9) \quad Q_2 = Q \pm 2\sqrt{(1+QQ_1)} + Q_1.$$

„Diese Formel zeigt, wie man aus dem Quotienten Q des gegebenen Kreises M_1, in Bezug auf den Durchmesser AC, und aus dem Quotienten Q_1 irgend eines bestimmten Kreises m_1, in Bezug auf denselben Durchmesser, den Quotienten Q_2 desjenigen Kreises m_2, in Bezug auf den nemlichen Durchmesser, findet, welcher sich dem Kreise m_1 anschliefst (d. h. ihn berührt)."

Es sei z. B. $Q = \frac{M_1H}{M_1B} = 12$ und $Q_1 = \frac{m_1H_1}{r_1} = 24$, so ist:

$$\frac{m_2H_2}{r_2} = Q_2 = 12 \pm 2\sqrt{(1+12.24)} + 24$$
$$= 70 \text{ oder } = 2.$$

Zur Erläuterung der Bedeutung der gefundenen Formeln (6, 7, 8, 9), wollen wir dieselben noch auf einige bestimmte Reihen Kreise anwenden. Z. B.

a) Nimmt man an, der gegebene Kreis M_1 (Fig. 14.) berühre den genannten angenommenen Durchmesser AM_2C, so ist $Q=1$, und daher erhält man für eine Reihe Kreise: .... $\mu_3, \mu_2, \mu_1, m, m_1, m_2, m_3$, ..., d. h., für eine Reihe Kreise, welche sich zu beiden Seiten dem oben genannten Kreis m anschliefsen, und welche einander der Ordnung nach berühren, folgende Quotienten (wenn man die aus den Mittelpuncten: .... $\mu_2, \mu_1, m, m_1, m_2$, ... auf den Durchmesser AC gefällten Lothe durch die Radien .... $\varrho_2, \varrho_1, r, r_1, r_2$, ... der respectiven Kreise .... $\mu_2, \mu_1, m, m_1, m_2$, ... dividirt):

Kreise.	μ_n	.....	μ_3	μ_2	μ_1	m	m_1	m_2	m_3	.....	m_n
$\frac{h}{r} =$	n^2-2n	.....	3	0	-1	0	3	8	15	.....	n^2+2n

b) Setzt man $Q = 2$, so findet man für eine Reihe Kreise: ..... μ_2, μ_1, m, m_1, m_2, ... (Fig. 15.) folgende Quotienten:

Kreise.	μ_n	....	μ_4	μ_3	μ_2	μ_1	m	m_1	m_2	m_3	m_4	....	m_n
$\frac{h}{r} =$	$2n^2-2n$	....	24	12	4	0	0	4	12	24	40	....	$2n^2+2n$

u. s. w.

Es ist noch zu bemerken, dafs die Sätze und Formeln, welche wir bisher, in Bezug auf die beiden einander innerlich berührenden Kreise M_1, M_2 aufgestellt haben, auf ganz ähnliche Weise bei zwei sich äufserlich berührenden Kreisen Statt finden, und dafs sie ferner auch dann noch Statt finden, wenn der eine Kreis (M_2), durch unendliche Vergröfserung, in eine gerade Linie übergeht.

28.

Aus dem obigen alten Satze (24, c) lassen sich unter andern auch nachstehende interessante Folgerungen ziehen.

Liegen die Mittelpuncte dreier beliebigen Kreise M_1, M_2, m (Fig. 16.), welche einander, paarweise genommen, in den drei Puncten B, A, C berühren, in einer geraden Linie: so ist, vermöge des alten Satzes, das aus dem Mittelpuncte m_1 desjenigen Kreises m_1, welcher jene drei Kreise berührt, auf die Axe M_1M_2m gefällte Loth m_1P gleich dem doppelten Radius m_1D des Kreises m_1. Demnach ist

$$PD = Dm_1.$$

Es ist klar, dafs dasselbe Statt findet, wenn man sich, anstatt der genannten Kreise M_1, M_2, m, m_1, Kugeln denkt. Ferner ist leicht zu sehen, dafs jede Kugel, welche die drei gegebenen Kugeln M_1, M_2, m berührt, wo sie sich auch befinden mag, gleich der Kugel m_1 ist; und dafs ferner der Ort des Mittelpuncts einer solchen Kugel, welche die drei gegebenen Kugeln M_1, M_2, m berührt, ein Kreis ist, dessen Radius $= Pm_1$, und dafs die Ebene dieses Kreises, welche wir durch E bezeichnen wollen, in dem Punct P zu der Axe M_1M_2m senkrecht steht. Denkt man sich nun eine Reihe Kugeln m_1, m_2, m_3, ..., welche einander der Ordnung nach berühren, und von denen jede die drei gegebenen Kugeln M_1, M_2, m berührt: so folgt offenbar, da $PD = m_1D$, dafs die genannte

Ebene (E) mit jenen Kugeln ($m_1, m_2, m_3 \ldots.$) eine Durchschnittsfigur bildet, welche der (Fig. 17.) gleich ist. Nun ist aber leicht zu sehen, dafs man um einen bestimmten Kreis P (Fig. 17.) gerade sechs Kreise $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$, von denen jeder dem Kreise P gleich ist ($PD = Dm_1$), so herumlegen kann, dafs, jeder den Kreis P berührt, und dafs sie einander der Reihe nach berühren. Daraus folgt nachstehender Satz:

„Berühren irgend drei beliebige Kugeln M_1, M_2, m (Fig. 16.), deren Mittelpuncte in einer geraden Linie liegen, einander, paarweise genommen, in den drei Puncten B, A, C: so können in dem Raume, welcher zwischen den drei Kugelflächen liegt, sechs gleiche Kugeln $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ beschrieben werden, welche einander der Reihe nach berühren (die Kugel m_6 berührt die Kugel m_1), und von denen jede die drei gegebenen Kugeln M_1, M_2, m berührt."

Mittelst eines bestimmten Satzes bei Kugeln, welcher einem Satze bei Kreisen (22.) analog ist, folgt aus dem Vorliegenden leicht nachstehender sehr merkwürdiger Satz:

„W e n n i r g e n d d r e i b e l i e b i g e K u g e l n e i n a n d e r b e r ü h r e n u n d m a n b e s c h r e i b t e i n e R e i h e K u g e l n $m_1, m_2, m_3 \ldots.$, w e l c h e e i n a n d e r d e r O r d n u n g n a c h b e r ü h r e n, u n d v o n d e n e n j e d e j e n e d r e i K u g e l n b e r ü h r t: s o s c h l i e f s t s i c h i m m e r d i e s e c h s t e K u g e l d i e s e r R e i h e, w o m a n a u c h i m m e r h i n d i e e r s t e a n n n e h m e n m a g, g e r a d e a n d i e e r s t e a n. U n d f e r n e r l i e g e n d i e M i t t e l p u n c t e d i e s e r R e i h e K u g e l n i m m e r i n e i n e r u n d d e r s e l b e n E b e n e, u n d z w a r i n e i n e r u n d d e r s e l b e n C u r v e z w e i t e n G r a d e s."

Zum Beispiel: „Wenn die drei gegebenen Kugeln M_1, M_2, μ (Fig. 16.) einander, paarweise genommen, berühren: so kann in dem Raume, welcher zwischen diesen drei Kugelflächen liegt, eine Reihe von sechs Kugeln $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$, wo man auch die erste Kugel, oder das Anfangsglied dieser Reihe annehmen mag, so beschrieben werden, dafs sie einander der Ordnung nach berühren, und dafs jede die drei gegebenen Kugeln berührt; und die Mittelpuncte dieser sechs Kugeln liegen in einer bestimmten Ellipse."

Unter andern hierher gehörigen speziellen Fällen erwähnen wir nur folgenden:

„Wenn drei gleiche Kugeln einander, paarweise genommen, (äufserlich) berühren: so giebt es zwei bestimmte, mit einander parallele Ebenen A, B, von denen jede die drei gegebenen Kugeln berührt. Und beschreibt man in dem Raum, welcher sich zwischen den drei Kugeln befindet, eine Reihe Kugeln, von denen die erste die Ebene A und die drei gegebenen Kugeln, und dann jede folgende

gende die vorhergehende und die drei gegebenen Kugeln berührt: so wird die vierte Kugel dieser Reihe gerade die andere Ebene B berühren."

Nemlich die beiden Ebenen A, B sind als zwei unendlich große Kugeln zu betrachten, welche einander berühren (da sie parallel sind), und welche also, da sie ebenfalls die drei gegebenen Kugeln berühren, in der genannten Reihe Kugeln, die Stelle der fünften und sechsten Kugel vertreten.

29.

Durch Hülfe des alten Satzes kann ferner auch der Radius desjenigen Kreises, welcher drei gegebene, einander berührende Kreise berührt, aus den Radien dieser Kreise leicht gefunden werden.

Es seien die drei Kreise M_1, M_2, M_3 (Fig. 18.), welche einander berühren, gegeben. Der Kreis m berühre sie äußerlich und der Kreis M einschließend. Die Radien der fünf Kreise M_1, M_2, M_3, M, m sollen respective durch R_1, R_2, R_3, R, r bezeichnet werden.

Fället man aus den Mittelpuncten M_1, m auf die Axe M_2M_3 die Lothe $M_1H_1 = h_1$ und $mn_1 = p_1$, so ist nach (24, c)

$$\frac{p_1}{r} = \frac{h_1}{R_1} + 2,$$

woraus folgt:

$$\frac{p_1}{h_1} = \frac{r}{R_1} + \frac{2r}{h_1}.$$

Da man eine ähnliche Gleichung erhält, wenn man aus den Mittelpuncten M_2 und m auf die Axe M_1M_3, oder aus den Mittelpuncten M_3 und m auf die Axe M_1M_2 Lothe fällt, so hat man zusammengenommen folgende drei Gleichungen:

$$\frac{p_1}{h_1} = \frac{r}{R_1} + \frac{2r}{h_1},$$
$$\frac{p_2}{h_2} = \frac{r}{R_2} + \frac{2r}{h_2},$$
$$\frac{p_3}{h_3} = \frac{r}{R_3} + \frac{2r}{h_3},$$

welche addirt,

$$\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = r\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} + \frac{2}{h_3}\right)$$

geben. Der erste Theil dieser Gleichung ist aber nach einem bekannten Satze $= 1$; nemlich: „Wenn man die aus einem beliebigen Punct m auf die Seiten eines Dreiecks $M_1M_2M_3$ gefällten Lothe p_1, p_2, p_3, durch die correspondirenden Höhen h_1, h_2, h_3 des Dreicks dividirt: so ist die Summe der drei Quotienten allemal $= 1$." Die vorliegende Gleichung geht demnach in folgende über:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} + \frac{2}{h_3}.$$

Bemerkt man ferner, dafs die Höhe eines Dreiecks durch die Seiten desselben ausgedrückt werden kann, und dafs die Seiten des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ ihrer Gröfse nach $R_1 + R_2$; $R_2 + R_3$; $R_3 + R_1$ sind: so hat man z. B.

$$h_1 = \frac{\sqrt{(2(R_1 + R_2 + R_3) \cdot 2R_1 \cdot 2R_2 \cdot 2R_3)}}{4(R_2 + R_3)}$$
$$= \frac{\sqrt{(R_1 R_2 R_3 (R_1 + R_2 + R_3))}}{R_2 + R_3}.$$

Werden diese Werthe für h_1, h_2, h_3 in die obige Gleichung substituirt, so erhält man nach gehöriger Reduction folgende Gleichung:

$$1)\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + 2\sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_2 R_3}\right)}.$$

Diese Gleichung zeigt, wie man den Radius r desjenigen Kreises m, welcher drei gegebene, einander äufserlich berührende Kreise M_1, M_2, M_3, äufserlich berührt, aus den Radien R_1, R_2, R_3 der letztern Kreise finden kann.

Für den Kreis M, welcher die drei gegebenen Kreise einschliefsend berührt, hat man auf ähnliche Weise, wenn man die aus dem Mittelpunct M desselben auf die Axen $M_2 M_3$; $M_3 M_1$; $M_1 M_2$ gefällten Lothe MN_1, MN_2, MN_3 durch P_1, P_2, P_3 bezeichnet, folgende Gleichungen (24, c):

$$\frac{P_1}{R} + 2 = \frac{h_1}{R_1};\quad \frac{P_2}{R} + 2 = \frac{h_2}{R_2};\quad \frac{P_3}{R} + 2 = \frac{h_3}{R_3},$$

oder:

$$\frac{P_1}{h_1} = \frac{R}{R_1} - \frac{2R}{h_1},$$
$$\frac{P_2}{h_2} = \frac{R}{R_2} - \frac{2R}{h_2},$$
$$\frac{P_3}{h_3} = \frac{R}{R_3} - \frac{2R}{h_3}.$$

Die Summe dieser drei Gleichungen ist:

$$\frac{P_1}{h_1} + \frac{P_2}{h_2} + \frac{P_3}{h_3} = R\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} + \frac{2}{h_3}\right).$$

Bemerkt man, dafs der erste Theil dieser Gleichung, nach dem oben erwähnten Satze, gleich 1 ist, und setzt statt der Gröfsen h_1, h_2, h_3 (Höhen des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$) ihre oben angegebenen Werthe: so erhält man, nach gehöriger Reduction, folgende Gleichung:

$$2)\quad \frac{1}{R} = -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} + 2\sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_2 R_3}\right)},$$

welche zeigt, wie sich der Radius R desjenigen Kreises M, welcher die drei gegebenen, sich berührenden Kreise M_1, M_2, M_3 einschliefsend berührt, aus den Radien R_1, R_2, R_3 der letztern Kreise finden läfst.

Durch Verbindung der Gleichungen (1. und 2.) erhält man z. B. folgende Gleichungen:

$$\alpha)\quad \frac{1}{r}+\frac{1}{R}=4\sqrt{\left(\frac{R_1+R_2+R_3}{R_1R_2R_3}\right)}=4\sqrt{\left(\frac{1}{R_2R_3}+\frac{1}{R_1R_3}+\frac{1}{R_1R_2}\right)},$$

$$\beta)\quad \frac{1}{r}-\frac{1}{R}=\frac{2}{R_1}+\frac{2}{R_2}+\frac{2}{R_3},$$

$$\gamma)\quad \frac{1}{rR}=-\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{R_3^2}+2\,\frac{R_1+R_2+R_3}{R_1R_2R_3},\quad \text{u. s. w.}$$

Geht einer der gegebenen Kreise, z.B. der Kreis M_3, in eine gerade Linie über, so ist $R_3=\infty$, und daher gehen die Gleichungen (1. u. 2.) in folgende über:

$$3)\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+2\sqrt{\frac{1}{R_1R_2}},$$

$$4)\quad \frac{1}{R}=-\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+2\sqrt{\frac{1}{R_1R_2}}.$$

„Diese Gleichungen zeigen, wie der Radius (r oder R) eines Kreises (m oder M), welcher zwei sich äufserlich berührende Kreise M_1, M_2 und deren gemeinschaftliche Tangente berührt, aus den Radien der beiden letztern Kreise gefunden wird."

Nimmt man an, die drei gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3 seien einander gleich, so dafs $R_1=R_2=R_3$, so gehen die Gleichungen (1. u. 2.) in folgende über:

$$5)\quad \frac{1}{r}=\frac{3+2\sqrt{3}}{R_1}\quad\text{oder}\quad r=\frac{1}{3+2\sqrt{3}}\,.\,R_1,$$

$$6)\quad \frac{1}{R}=\frac{-3+2\sqrt{3}}{R_1}\quad\text{oder}\quad R=\frac{1}{-3+2\sqrt{3}}\,.\,R_1,$$

woraus folgt:

$$7)\quad r\,.\,R=\tfrac{1}{3}R_1^2.$$

Ist ferner $R_3=\infty$ und $R_1=R_2$, so folgt aus (1.):

$$\frac{1}{r}=\frac{4}{R_1}\quad\text{oder}\quad\frac{R_1}{r}=4,$$

welches mit (26, c) übereinstimmt.

Um die Symmetrie zwischen den vier Gröfsen r, R_1, R_2, R_3, welche in der Gleichung (1.) vorkommen, leichter übersehen zu können, setze man $\frac{1}{r}=q$; $\frac{1}{R_1}=q_1$; $\frac{1}{R_2}=q_2$; $\frac{1}{R_3}=q_3$, so dafs nach (1.):

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + 2\sqrt{(q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3)}.$$

Daraus folgt:

$$(q - q_1 - q_2 - q_3)^2 = 4(q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3),$$

oder nach gehöriger Rechnung

$$8)\quad q^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 2(qq_1 + qq_2 + qq_3 + q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3) = 0.$$

Setzt man ferner $\frac{1}{R} = Q$: so findet man auf ähnliche Weise aus der Gleichung (2.) die folgende:

$$9)\quad Q^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + 2(Qq_1 + Qq_2 + Qq_3 - q_1 q_2 - q_1 q_3 - q_2 q_3) = 0.$$

30.

Es lassen sich noch eine Menge Betrachtungen an die obigen anschließen. Zum Beispiel folgende:

A. Sind drei beliebige Kreise M, M_1, M_2 (Fig. 19.), die einander, paarweise genommen, in den Puncten B, C, A berühren, und deren Mittelpuncte in einer geraden Linie liegen, der Größe und Lage nach gegeben: so kann, wie aus dem alten Satze (24.) folgt, derjenige Kreis μ, welcher jene drei Kreise berührt, leicht gefunden werden, wie folgt:

„Man errichte aus den Mittelpuncten M, M_1 die beiden geraden Linien MG und M_1H senkrecht zu der Axe M_1M_2M, nehme $MG = AC = 2R$ und $M_1H = BC = 2R_1$, und ziehe die geraden Linien BG und AH, so schneiden sich diese im Mittelpunct μ des gesuchten Kreises μ (24, V.)."

B. Jeder von den beliebigen Kreisen m, m_1, m_2 berühre die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2; die geraden Linien MD, mP, m_1P_1, m_2P_2 seien zu der Axe M_1M_2 senkrecht, und ebenso die gerade Linie B_1B, welche die gegebenen Kreise M_1, M_2 in B berührt; die Radien der Kreise M, m, m_1, m_2 sollen respective durch R, r, r_1, r_2 bezeichnet werden.

Da die Kreise M, m, m_1, m_2 die Linie der gleichen Potenzen BB_1 der beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 gemeinschaftlich zur Aehnlichkeitslinie haben (13.), d. h., die Parallelen aus den Mittelpuncten M, m, m_1, m_2 nach der Linie BB_1 sich wie die Radien der respectiven Kreise M, m, m_1, m_2 verhalten, so hat man (wie 24, B, β):

$$a)\quad \frac{BM}{R} = \frac{BP}{r} = \frac{BP_1}{r_1} = \frac{BP_2}{r_2} = \ldots.$$

Zieht man aus B durch die Mittelpuncte m, m_1, m_2 die geraden Linien

BmD, Bm_1D_1, Bm_2D_2, so folgt ferner, weil die geraden Linien MD_2; PE_2, P_1F_2, P_2m_2 parallel sind, dafs:

$$\text{b)} \quad \frac{MD_2}{R} = \frac{PE_2}{r} = \frac{P_1F_2}{r_1} = \frac{P_2m_2}{r_2}.$$

Eben so ist:

$$\text{c)} \quad \frac{MN}{R} = \frac{Pn}{r} = \frac{P_1n_1}{r_1} = \frac{P_2n_2}{r_2},$$

und mithin, wenn $MN = R$, auch:

$$\text{d)} \quad Pn = \text{r}; \; P_1n_1 = r_1; \; P_2n_2 = r_2.$$

Ferner ist:

$$\text{e)} \quad \frac{D_1D_2}{R} = \frac{E_1E_2}{r} = \frac{m_1F_2}{r_1}.$$

Nimmt man an, dafs die Kreise m_1, m_2 einander berühren, so ist $m_1F_2 = 2r_1$ (24, V.), folglich in diesem Fall:

$$\text{f)} \quad m_1F_2 = 2r_1; \; E_1E_2 = 2r; \; D_1D_2 = 2R.$$

Zieht man aus B durch den Berührungspunct b der beiden Kreise m_1, m_2 die gerade Linie $Bbf_2e_2d_2$, so ist ferner (24, V.):

$$\text{g)} \quad m_1f_2 = f_2F_2 = r_1; \; E_1e_2 = e_2E_2 = r; \; D_1d_2 = d_2D_2 = R.$$

Aus dem Vorliegenden folgt, unter anderm, Nachstehendes:

α) Wenn der Quotient *) eines unbekannten Kreises m_1, in Bezug auf die Axe M_1M_2 gegeben ist, so findet man nach (b) eine gerade Linie BE_1D_1, in welcher der Mittelpunct des unbekannten Kreises liegt. Ist nemlich der gegebene Quotient $= q_1$, so nehme man $MD_1 = q_1 \,.\, R$ und ziehe die Linie BD_1, oder man nehme, wenn der Kreis m gegeben ist, $PE_1 = q_1 \,.\, r$ und ziehe die Linie BE_1, so liegt in dieser Linie (BE_1D_1) der Mittelpunct m_1 des gesuchten Kreises m_1.

β) Nimmt man in der Linie Pm irgend zwei Puncte E_1, E_2 so an, dafs $E_1E_2 = 2r$, und zieht die geraden Linien BE_1, BE_2: so liegen in diesen beiden Linien die Mittelpuncte m_1, m_2 zweier bestimmten Kreise m_1, m_2, die sich und die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 berühren, und zwar geht die gerade Linie Be_2, wenn e_2 die Mitte der Linie E_1E_2 ist (g.), durch den Berührungspunct b jener beiden Kreise m_1, m_2. Ein Gleiches findet Statt, wenn man in der Linie MD zwei Puncte annimmt, anstatt in der Linie Pm. Hiernach ist leicht eine

---

*) Zur Abkürzung nehmen wir jetzt den Ausdruck: „Quotient eines Kreises, in Beziehung auf eine gerade Linie," in dem beschränktern Sinne, als: „das aus dem Mittelpunct des Kreises auf die gerade Linie gefällte Loth, dividirt durch den Radius des Kreises."

Reihe Kreise m_1, m_2, m_3, m_4, ... zu beschreiben, welche einander der Ord-nung nach berühren, und von denen jeder die beiden gegebenen Kreise M_1, M berührt.

C. Legt man in den Endpuncten des Durchmessers AB eines gegebene Kreises M (Fig. 20.) die Tangenten AD und BC an den Kreis, zieht durch eine willkürlichen Peripheriepunct E die beiden geraden Linien AEC und BE und legt in dem Punct E die Tangente FEG an den Kreis: so ist das Dreie BEC bei E rechtwinklig und die Tangenten GB und GE sind einander gleic folglich ist auch $GE = GB = GC$. Eben so ist $FA = FD$. Das heifst:

„Legt man an einen gegebenen Kreis M zwei parallele Tangenten AD u BC, die den Kreis in A und B berühren, zieht z. B. aus dem Berührungspun A eine beliebige gerade Linie AC, welche den Kreis in E schneidet, und le in diesem Durchschnittspunct eine Tangente FEG an den Kreis: so halbirt die letztere Tangente die Tangente BC in G."

Da ferner die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABC und DAB ähnli sind, so ist:

$$AD \times BC = AB \times AB,$$

das heifst:

„Legt man in den Endpuncten eines Durchmessers AB eines gegeben Kreises M, zwei Tangenten an den Kreis, und zieht aus denselben Puncten B durch einen beliebigen Peripheriepunct E des Kreises zwei gerade Lini AEC, BED: so ist das Rechteck aus den Stücken BC, AD, welche die le tern beiden Linien von jenen Tangenten abschneiden, gleich dem Quadrat d Durchmessers AB des Kreises."

Da aber, wie vorhin bemerkt, $BG = GC$ und $AF = FD$ ist, so ist, we man den Radius des Kreises durch R bezeichnet:

$$BG \times AF = \tfrac{1}{4}AB \times AB = R^2,$$

das heifst:

„Legt man an einen gegebenen Kreis M zwei parallele BG, AF und ei beliebige Tangente GEF: so schneidet die letztere von den beiden ersteren zv Stücke BG, AF ab, deren Rechteck dem Quadrat des Halbmessers des Krei gleich ist *)."

*) Bei einer andern Gelegenheit wollen wir zeigen, dafs die hier (C.) vom Kreise wiesenen bekannten Sätze auf analoge Weise bei jeder andern Curve zweiten Grades, al dafs folgende allgemeinere Sätze Statt finden:

D. Es seien die beiden Kreise M_1, M_2 (Fig. 21.), die einander in B berühren, gegeben. Ein beliebiger Kreis m berühre die gegebenen in den Puncten d, c und der Kreis M, dessen Mittelpunct in der Axe M_1M_2 liegt, berühre dieselben in den Puncten D, C, und endlich berühre die gerade Linie AB dieselben in dem

---

1) „Legt man zwei beliebige parallele Tangenten AD und BC an irgend eine gegebene Curve zweiten Grades, welche diese Curve in den Puncten A und B berühren, und zieht z. B. aus dem Punct A die gerade Linie AEC, welche die Curve in E schneidet und die Tangente BC in C begrenzt, und legt in dem Punct E eine dritte Tangente GEF an die Curve: so halbirt diese letztere Tangente die Tangente BC in G."

Hieraus ergiebt sich, wie leicht zu sehen, ein sehr einfaches Verfahren, in einem gegebenen Punct E an irgend eine Curve zweiten Grades eine Tangente zu legen, wenn nur eine der beiden Axen derselben gegeben ist. Z. B. es sei (Fig. 23.) AB eine Axe irgend einer Curve zweiten Grades, und E sei irgend ein gegebener Peripheriepunct, in welchem eine Tangente an diese Curve gelegt werden soll: so errichte man im Endpunct B die gerade Linie BC senkrecht zur Axe AB, ziehe die gerade Linie AE, welche jenen Perpendikel in C trifft, und halbire den Abschnitt BC in G: so ist die gerade Linie GE die gesuchte Tangente.

2) „Legt man an irgend eine gegebene Curve zweiten Grades zwei beliebige parallele BG, AF und eine dritte willkürliche Tangente GEF, so schneidet die letztere von den beiden ersteren zwei Stücke BG und AF ab, deren Rechteck dem Quadrat desjenigen Halbmessers der Curve gleich ist, welcher mit den beiden ersteren Tangenten parallel ist."

Aus (1.) folgt ferner:

3) „Stellt man sich beliebig viele Curven zweiten Grades vor, von denen jede zwei gegebene Parallelen AD und BC in denselben Puncten A und B berührt, zieht aus A irgend eine Linie AC, welche die Curven respective in den Puncten E, E_1, E_2, ... schneidet, und legt in diesen Puncten E, E_1, E_2, ... Tangenten an die Curven: so schneiden alle diese Tangenten einander in der Mitte G der Tangente BC. Und umgekehrt: Legt man aus irgend einem Punct G der Tangente BC an jene Curven Tangenten: so liegen die Berührungspuncte E, E_1, E_2, ... aller dieser Tangenten mit dem Punct A zusammen in einer geraden Linie."

Aus diesem Satze (3.) folgert man leicht den nachstehenden:

4) „Stellt man sich anstatt der Curve M (Fig. 20.) irgend eine beliebige Fläche zweiten Grades, anstatt der Tangente BC eine Ebene, welche jene Fläche in B berührt, und anstatt des Puncts G, irgend eine in der Ebene BC liegende gerade Linie vor, und zieht alsdann irgend eine gerade Linie GEH, welche die Linie G und den Durchmesser BA der Fläche schneidet und zugleich die Fläche in E berührt: so ist der Ort des Berührungspunctes E eine ebene Curve (zweiten Grades), und die Ebene (EA) dieser Curve geht durch den Punct A und schneidet die Ebene BC in einer bestimmten geraden Linie C, welche mit der Linie G parallel ist, und welche doppelt so weit von dem Puncte B entfernt ist, als die Linie G." U. s. w.

Wir bemerken nur noch, daſs man auf dieselbe einfache Weise in irgend einem gegebenen Punct E, an irgend eine beliebige Fläche zweiten Grades eine Berührungsebene legen kann, sobald irgend zwei von den drei Axen der Fläche gegeben sind, so wie solches für den analogen Fall bei Curven zweiten Grades so eben gezeigt worden.

Punct B. Aus dem Früheren folgt, dafs die drei geraden Linien Mm, Dd, Cc einander in einem bestimmten Punct A, welcher in der Linie BA (als Linie der gleichen Potenzen der gegebenen Kreise M_1, M_2) liegt, und welcher der äufsere Aehnlichkeitspunct der beiden Kreise M, m ist, schneiden (8, 13.). Ferner folgt, dafs sowohl die Puncte D und d als auch C und c, in Bezug auf den Aehnlichkeitspunct A, potenzhaltend sind (21.), so dafs also

$$Ad \times AD = Ac \times AC,$$

und dafs folglich die vier Puncte D, C, c, d in der Peripherie eines bestimmten Kreises μ liegen.

Legt man an den Kreis M_2 in dem Punct d die Tangente Gd, so halbirt diese die Tangente AB in G (C.); und aus gleichen Gründen geht die Tangente Gc, welche man im Puncte c an den Kreis M_1 legt, durch die Mitte G der Tangente AB. Da die beiden Tangenten Gd und Gc zugleich den Kreis m berühren, so steht die gerade Linie Gm auf der Sehne dc senkrecht und halbirt sie, und da die Kreise m und μ diese Sehne gemein haben, so liegen die drei Puncte G, m, μ in einer geraden Linie.

Zieht man ferner noch die geraden Linien BmN und $M\mu N$, so folgt, da $BG = GA$, die beiden Linien $M\mu$ und BA parallel sind, und die drei Linien BN, $G\mu$, AM einander in einem und demselben Punct m schneiden, dafs:

$$M\mu = \mu N \text{ ist.}$$

Bemerkt man, dafs, wenn R, r die Radien der Kreise M, m bezeichnen, und mP mit NM parallel, mithin senkrecht zu der Axe $M_1 M_2$ ist, dafs dann (B, b):

$$\frac{NM}{R} = \frac{mP}{r} = q,$$

so ist

$$NM = q \,.\, R,$$

und folglich

$$M\mu = (\tfrac{1}{2}MN) = \tfrac{1}{2}q \,.\, R.$$

Hiernach kann folgende Aufgabe leicht gelöset werden.

Aufgabe.

„Einen Kreis m zu beschreiben, welcher zwei gegebene, einander in B berührende Kreise M_1, M_2, berührt, und dessen Quotient, in Bezug auf die Axe $M_1 M_2$ (d. h. das Verhältnifs seines Radius r zu dem aus seinem Mittelpuncte m auf die Axe $M_1 M_2$ gefällten Lothe mP) gegeben ist."

Auflö-

Auflösung.

Es sei der gegebene Quotient $\frac{mP}{r} = q$. Man errichte aus der Mitte M der Linie CD die zu der Axe M_1M_2CD senkrechte Linie $M\mu_1$, nehme $M\mu = q.MD = q.R$, und ziehe hierauf um den Punct μ einen Kreis μ, welcher durch die Puncte D, C geht: so schneidet derselbe die gegebenen Kreise M_1, M_2 aufserdem noch in denjenigen beiden Puncten c, d, in welchen sie von dem gesuchten Kreis m berührt werden, so dafs also die geraden Linien M_2d und M_1c einander im Mittelpunct m des gesuchten Kreises schneiden.

Ferner ergiebt sich aus dem Obigen ein einfaches Verfahren, eine Reihe Kreise $m, m_1, m_2, \ldots$ zu beschreiben, von denen jeder die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 berührt, und welche einander der Ordnung nach berühren. Denn da von den Quotienten $q, q_1, q_2, \ldots$, welche dieser Reihe Kreise, in Bezug auf die Axe M_1M_2, respective zugehören, jeder folgende um Zwei gröfser ist als der vorhergehende (24, c): so stehen die Mittelpuncte $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ der Kreise $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ um den Radius $MD = R$ von einander ab, weil z. B.

$$M\mu = \tfrac{1}{2}q.R \text{ und } M\mu_1 = \tfrac{1}{2}q_1.R = \tfrac{1}{2}(q+2).R,$$

mithin

$$M\mu_1 - M\mu = \mu\mu_1 = R.$$

„Um also die genannte Reihe Kreise zu construiren, nehme man die Puncte $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ so an, dafs $\mu\mu_1 = \mu_1\mu_2 = \ldots = R = MD$, und ziehe um diese Puncte Kreise $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$, von denen jeder durch die beiden Puncte D, C geht: so schneidet der erste dieser Kreise die gegebenen Kreise M_1, M_2 in den Puncten c, d, in welchen dieselben von dem Kreise m berührt werden; der zweite Kreis μ_1 schneidet die gegebenen in den Puncten c_1, d_1, in welchen dieselben von dem zweiten Kreise m_1 der genannten Reihe Kreise berührt werden; u. s. w."

E. Legt man in dem Punct D die Tangente DF an den Kreis M_2, so ist leicht zu sehen, dafs die Mittelpuncte M_2, μ der beiden Kreise M_2, μ, welche einander in den Puncten D, d schneiden, mit dem Punct F, in welchem die in den Puncten D, d an den Kreis M_2 gelegten Tangenten DF, dF einander schneiden, in einer geraden Linie $M_2\mu F$ liegen. Eben so liegen die drei Puncte M_2, μ_1, F_1, so wie auch M_2, μ_2, F_2, u. s. w., in geraden Linien $M_2\mu_1F_1$, $M_2\mu_2F_2, \ldots$, wenn nemlich der Kreis μ_1 den Kreis M_2 in demselben Punct d_1 schneidet, in welchem derselbe von der Tangente F_1d_1 berührt wird; u. s. w. Legt man ferner in den Puncten C und $c, c_1, c_2, \ldots$, in welchen der Kreis M_1 von den Kreisen $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ geschnitten wird, Tangenten CE, cE, c_1E_1, $c_2E_2, \ldots$ an den Kreis M_1, so liegen aus gleichen Gründen sowohl die drei Puncte M_1, E, μ, als auch M_1, E_1, μ_1 u. s. w. in geraden Linien.

Nun sind die Abstände der Mittelpuncte $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$, wenn sie sich auf eine Reihe an einander sich anschliefsender Kreise $m, m_1, m_2, \ldots$ beziehen, einander gleich (D.), d. h., es ist $\mu\mu_1 = \mu_1\mu_2 = \ldots = R$; demnach ist auch, da die Linien $M\mu$, DF und CE parallel sind:

$$a)\quad EE_1 = E_1E_2 = E_2E_3 = \ldots\ldots$$

und

$$b)\quad FF_1 = F_1F_2 = F_2F_3 = \ldots\ldots$$

Und ferner ist:

$$M_2M : M_2D = \mu\mu_1 : FF_1,$$

oder wenn man die Radien der Kreise M_1, M_2 durch R_1, R_2 bezeichnet, und bemerkt, dafs $M_2D = R_2$, $M_2M = R_1$ und $\mu\mu_1 = R = MD = R_2 - R_1$, so hat man:

$$R_1 : R_2 = R_2 - R_1 : FF_1,$$

und folglich:

$$c)\quad FF_1 = \frac{R_2}{R_1}(R_2 - R_1).$$

Aus ähnlichen Gründen ist:

$$d)\quad EE_1 = \frac{R_1}{R_2}(R_2 - R_1).$$

Der Sinn der Sätze (a, b, c, d), in Worten ausgesprochen, ist folgender:

„Beschreibt man eine Reihe Kreise $m, m_1, m_2, \ldots$ von denen jeder zwei gegebene, einander in B berührende Kreise M_1, M_2 berührt, und welche einander der Ordnung nach berühren, und legt man in den Puncten $d, d_1, d_2, \ldots$, in welchen dieselben den Kreis M_2 berühren, Tangenten dF, d_1F_1, $d_2F_2 \ldots$ an den letztern: so schneiden diese Tangenten, die in dem Endpunct D des Durchmessers BD an denselben Kreis M_2 gelegte Tangente DF so, dafs die Abschnitte FF_1, F_1F_2, $F_2F_3, \ldots$, alle einander gleich sind, und zwar jeder gleich der bestimmten Gröfse $\frac{R_2}{R_1}(R_2 - R_1)$ ist. Und eben so schneiden die in den Puncten $c, c_1, c_2, \ldots$, in welchen die Reihe Kreise $m, m_1, \ldots$ den Kreis M_1 berühren, an den letztern gelegten Tangenten cE, $c_1E_1 \ldots$, die in dem Punct C an denselben Kreis gelegte Tangente CE in gleiche Stücke EE_1, E_1E_2, $E_2E_3, \ldots$, von denen jedes der bestimmten Gröfse $\frac{R_1}{R_2}(R_2 - R_1)$ gleich ist."

Aus dem Vorigen ergiebt sich ferner ein Verfahren, die genannte Reihe an einander sich anschliefsende Kreise $m, m_1, m_2, \ldots$ zu construiren. Denn nimmt man in der Tangente DF die Puncte $F, F_1, F_2, \ldots$ so an, dafs $FF_1 = F_1F_2 \ldots = \frac{R_2}{R_1}(R_2 - R_1)$, und zieht um dieselben respective mit den Radien FD, F_1D, $F_2D, \ldots$ Kreise $F, F_1, F_2, \ldots$, welche den gegebenen Kreis M_2 zum zwei-

ten Mal in den Puncten d, d_1, d_2, ... schneiden: so sind diese diejenigen Puncte, in welchen der Kreis M_2 von den gesuchten Kreisen m, m_1, m_2, ... berührt wird. U. s. w.

Da, wie oben gezeigt worden, $M_2 \mu F$ und $M_2 \mu_1 F_1$ gerade Linien sind, so folgt ferner, daſs

$$DF : DF_1 = M\mu : M\mu_1,$$

oder, da (D.) $M\mu = \frac{1}{2}q \,.\, MD$ und $M\mu_1 = \frac{1}{2}q_1 \,.\, MD$, so ist

$$\text{e)} \quad \frac{DF}{DF_1} = \frac{q}{q_1}.$$

F. Legt man in den Endpuncten des Durchmessers AB eines gegebenen Kreises M (Fig. 22.) Tangenten AD, BC an den Kreis, und ferner aus einem beliebigen Punct G der Tangente BC eine dritte Tangente GE_1, welche den Kreis in E_1 berührt, zieht aus demselben Punct G eine beliebige Secante GE_2E, welche den Kreis in den Puncten E_2, E schneidet, und legt endlich in den letztern Puncten E_2, E Tangenten E_2F_2, EF an den Kreis: so folgt, daſs die letztern beiden Tangenten einander in der Linie BE_1, in N, schneiden (5.). Geht ferner durch den Punct N die Linie ONP parallel mit AD und BC: so sind die Dreiecke BHE_2 und ONE_2 einander ähnlich, und da die Seiten HB und HE_2, als Tangenten des Kreises, einander gleich sind, so ist auch

$$NE_2 = NO.$$

Eben so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BCE und PNE und aus der Gleichheit der Seiten BC und CE, daſs auch

$$NE = NP;$$

folglich, da NE und NE_2, als Tangenten des Kreises, einander gleich sind, ist auch

$$NO = NP.$$

Wenn aber $NO = NP$ ist, so folgt, da die Linien OP und AD parallel sind, wenn man die geraden Linien BED, BE_1D_1, BE_2D_2 zieht, welche die Tangente AD in den Puncten D, D_1, D_2 schneiden, daſs auch:

$$\text{a)} \quad DD_1 = D_1D_2.$$

Und da nach (C.) $AF = FD$, $AF_1 = F_1D_1$ und $AF_2 = F_2D_2$ ist, so folgt ferner, daſs:

$$\text{b)} \quad FF_1 = F_1F_2.$$

Aus diesen beiden Sätzen (a, b) ergeben sich unmittelbar folgende:

$$\text{c)} \quad 2AD_1 = AD + AD_2,$$

$$\text{d)} \quad 2AF_1 = AF + AF_2.$$

Diese vier Sätze (a, b, c, d) in Worten ausgesprochen, lauten wie folgt:

„Legt man zwei parallele Tangenten BC, AD an einen gegebenen Kreis M, nimmt in der ersten einen beliebigen Punct G an, legt aus demselben die

Tangente GE_1F_1, welche den Kreis in E_1 berührt, und zieht aus dem nemlichen Punct G eine willkürliche Secante GE_2E, welche den Kreis in den Puncten E_2, E schneidet; zieht ferner aus dem Berührungspunct B die geraden Linien BED, BE_1D_1, BE_2D_2, welche die Tangente AD in den Puncten D, D_1, D_2 schneiden: so befindet sich immer der Punct D_1 in der Mitte zwischen den beiden Puncten D und D_2, wie auch immerhin die Secante GE_2E, von dem Puncte G aus, ihre Richtung ändern mag. Und legt man ferner in den Puncten E, E_2 die Tangenten EF, E_2F_2 an den Kreis: so liegt ebenfalls der Punct F_1 stets in der Mitte zwischen den Puncten F und F_2, welche Lage die durch den angenommenen Punct G gehende Secante GE_2E auch haben mag. Daraus folgt, dafs sowohl die Summe der beiden Abschnitte $AD + AD_2$, als auch die Summe der beiden Abschnitte $AF + AF_2$ constant bleibt, so lange die Secante GE_2E durch denselben Punct G geht, sonst aber ihre Richtung beliebig ändert *)."

---

*) An einem andern Orte wird sich zeigen, dafs alle diese Eigenschaften nicht blos dem Kreise, sondern auch den übrigen Kegelschnitten zukommen; dafs nemlich folgende allgemeinere Sätze Statt finden: (Zur Erleichterung und um der Vorstellung zu Hülfe zu kommen, fasse man (Fig. 22.) in's Auge, stelle sich aber, anstatt des Kreises M, irgend eine Curve zweiten Grades vor, von welcher Curve AB nicht blos Axe, sondern ein beliebiger Durchmesser ist.)

„Legt man in den Endpuncten eines beliebigen Durchmessers AB irgend einer Curve zweiten Grades zwei Tangenten BC und AD; ferner aus einem in der ersten Tangente (BC) willkürlich angenommenen Punct G eine dritte Tangente GE_1F_1, welche die Curve in E_1 berührt, und die Tangente AD in F_1 schneidet, zieht aus dem nemlichen Punct G eine willkürliche Secante GE_2E, welche die Curve in den Puncten E_2, E schneidet; zieht ferner aus dem Berührungspunct B, der ersten Tangente BC, die geraden Linien BE, BE_1, BE_2, welche die zweite Tangente AD in den Puncten D, D_1, D_2 schneiden: so liegt immer der Punct D_1 in der Mitte zwischen den Puncten D und D_2, welche Lage auch die Secante GE_2E, von welcher die Puncte D_2 und D abhängig sind, haben mag. Und legt man ferner in den Puncten E, E_2 eine vierte und fünfte Tangente EF und E_2F_2 an die Curve, welche die zweite Tangente AD in den Puncten F, F_2 schneiden: so ist der Punct F_1 stets in der Mitte zwischen den beiden Puncten F und F_2, welche Lage die aus dem bestimmten Punct G gezogene Secante GE_2E auch haben mag. Daher folgt ferner: dafs sowohl die Summe der beiden Abschnitte AD und AD_2, als auch die Summe der beiden Abschnitte AF und AF_2, constant bleibt, so lange die Secante GE_2E durch den nemlichen Punct G geht."

Da nicht nur die Linie AD, sondern auch jede andere Linie (wie z. B. OP), welche mit der Tangente BG parallel ist, von den drei Linien BE, BE_1, BE_2 so geschnitten wird, so dafs, wenn d, d_1, d_2 die respectiven Durchschnittspuncte sind, $dd_1 = d_1d_2$ ist: so lassen sich mit Hülfe dieser Eigenschaft und mit Bezug auf einen Satz über die Projection einer ebenen Curve, die in einer Fläche zweiten Grades liegt, welcher im ersten Heft, Seite 45. (V.) dieses Journals mitgetheilt worden, leicht folgende interessante allgemeine Sätze über die Flächen zweiten Grades ableiten.

Es ist noch zu bemerken, daſs die obigen beiden Sätze (c, d) immer Statt finden, selbst wenn der eine Durchschnittspunct E der Secante GE_2E in den andern Halbkreis, unterhalb des Durchmessers AB, fällt, nur sind in diesem Falle die betreffenden Abschnitte AD und AF negativ zu nehmen, so daſs

---

Zum leichtern Verständniſs stelle man sich anstatt der Curve M (Fig. 22.), irgend eine Fläche zweiten Grades vor; anstatt der Tangenten BG, AD, zwei Ebenen, welche die Fläche in den Endpuncten eines beliebigen Durchmessers AB berühren, und welche Ebenen demnach parallel sind; anstatt der willkürlichen dritten Tangenten GE_1, eine willkürliche Ebene, welche die Fläche in dem Punct E_1 berührt, und die Ebene BG in einer bestimmten geraden Linie G schneidet; anstatt der Secante GE_2E, eine Ebene, welche durch die Linie G geht und die Fläche in einer Curve EE_2 schneidet; anstatt der Tangenten NE, NE_2, alle möglichen Tangenten aus dem Punct N an die Flächen M, d. h. denjenigen Kegel N, welcher die Fläche in der Curve EE_2 berührt; und endlich anstatt der geraden Linien BE, BE_2, alle möglichen Linien aus B durch die Peripherie der Curve EE_2, d. h. einen Kegel, dessen Scheitel B ist, und welcher durch die Curve EE_2 geht, und die Ebene AD in einer bestimmten Curve DD_2 schneidet: so lassen sich die gedachten Sätze, wie folgt, aussprechen.

„Legt man irgend zwei parallele BG, AD und eine dritte beliebige Berührungsebene GE_1 an irgend eine gegebene Fläche M zweiten Grades, welche die letztere respective in den Puncten B, A und E_1 berühren; ferner durch die Durchschnittslinie G, der ersten (BG) und dritten Berührungsebene (GE_1), eine willkürliche Ebene GE_2E, welche die Fläche in einer gewissen Curve EE_2 schneidet; läſst ferner aus dem Berührungspunct B (als Scheitel) durch die Curve EE_2 einen Kegel gehen, welcher die Ebene AD in einer bestimmten Curve DD_2 schneidet; und läſst endlich durch die beiden Berührungspuncte B, E_1 die gerade Linie BE_1D_1 gehen, welche die Ebene AD in dem Puncte D_1 trifft: so ist immer der Punct D^1 der Mittelpunct der genannten Curve DD_2. Noch mehr: Läſst man in der Vorstellung die Ebene GE_2E ihre Lage so verändern, daſs sie sich um die gerade Linie G bewegt: so sind die verschiedenen Curven DD_2, welche dadurch in der Ebene AD nach einander entstehen, alle einander ähnlich, ähnlichliegend nnd concentrisch, nemlich D_1 ist ihr gemeinschaftlicher Mittelpunct. Auch bewegt sich dabei, wie bekannt ist, der Scheitel N des Kegels N, welcher die Fläche M in der Curve EE_2 berührt, in der unveränderlichen geraden Linie BE_1N. Ferner folgt unmittelbar, daſs also nicht allein die Ebene AD, sondern auch jede andere Ebene, welche mit der Ebene BG parallel ist, die genannten Kegel, aus dem Punct B durch die nach einander entstehenden Curven EE_2, in ähnlichen, ähnlichliegenden concentrischen Curven schneidet, und daſs immer die gerade Linie BE_1 durch den gemeinsamen Mittelpunct dieser Curven geht." Ferner kann man noch folgenden besondern Satz herausheben:

„Projicirt man aus irgend einem Punct B in irgend einer gegebenen Fläche M zweiten Grades, eine beliebige ebene Curve EE_2, welche in derselben Fläche liegt, auf eine Ebene (z. B. DD_2), welche mit der in dem Punct B an die Fläche gelegten Berührungsebene BG parallel ist: so geht immer diejenige Linie BN, welche den genannten Punct B mit dem Scheitel desjenigen Kegels N verbindet, welcher die Fläche in der genannten Curve EE_2 berührt, durch den Mittelpunct der Projection (der durch die Projection entstandenen Curve)."

γ) $2AD_1 = AD_2 - AD$,
δ) $2AF_1 = AF_2 - AF$.

G. Aus dem Vorhergehenden (*E*) und (*F*) kann unmittelbar noch Folgendes abgeleitet werden.

Angenommen, die beiden gegebenen, einander in *B* berührenden Kreise M_1, M_2 (Fig. 24.), würden von irgend zwei beliebigen Kreisen m, m_2 berührt, und die Linie BG berührte die gegebenen Kreise in *B*, d. h., sei ihre Linie der gleichen Potenzen: so liegt, wie oben schon öfter erwähnt, der äufsere Aehnlichkeitspunct *G*, der Kreise m, m_2 in der genannten Linie BG, und die Puncte *E*, E_2, in welchen der Kreis M_2 die Kreise m, m_2 berührt, liegen mit dem Aehnlichkeitspunct *G* in gerader Linie GE_2E. Nimmt man ferner an, der Kreis m_1 berühre die gegebenen Kreise so, dafs z. B. die Tangente F_1E_1G, welche er im Berührungspunct E_1 mit dem Kreis M_2 gemein hat, ebenfalls durch den genannten Punct *G* geht; ferner berühre die gerade Linie AF den Kreis M_2 im Endpunct *A* des Durchmessers BA, die geraden Linien EF, E_2F_2 berühren denselben in den genannten Puncten E, E_2; und endlich würden die Quotienten der Kreise m, m_1, m_2, in Bezug auf die Axe M_1M_2, d. h. die aus den Mittelpuncten m, m_1, m_2 auf die Axe M_1M_2 gefällten Lothe, dividirt durch die Radien der respectiven Kreise m, m_1, m_2, durch q, q_1, q_2 bezeichnet: so ist nach (E, e):

$$\frac{AF}{AF_1} = \frac{q}{q_1} \text{ und } \frac{AF_2}{AF_1} = \frac{q_2}{q_1},$$

und folglich

$$\frac{AF + AF_2}{AF_1} = \frac{q + q_2}{q_1}.$$

Berücksichtigt man aber (F, d.), wonach der erste Theil dieser Gleichung $= 2$ ist, so folgt dafs

$$2 = \frac{q + q_2}{q_1},$$

oder

$$2q_1 = q + q_2.$$

Der Sinn dieser Gleichung, oder dieses Satzes, ist folgender:

„Nimmt man in der Linie der gleichen Potenzen BG zweier gegebenen Kreise M_1, M_2, welche einander in *B* berühren, einen beliebigen Punct *G* an, zieht aus demselben eine willkürliche Linie Gm_2m, und beschreibt diejenigen beiden Kreise m, m_2, deren Mittelpuncte in dieser Linie liegen, und von denen jeder die beiden gegebenen Kreise berührt: so ist die Summe der Quotienten (q, q_2) der beiden Kreise m, m_2, in Bezug auf die Axe M_1M_2 constant, so lange die Linie Gm_2m durch denselben Punct *G* geht, wie sie auch übrigens ihre

Lage ändern mag. Und zwar ist die genannte Summe der Quotienten gleich dem doppelten Quotienten $2q_1$ desjenigen Kreises m_1, welcher z. B. den Kreis M_2 in demselben Punct E_1 berührt, in welchem dieser nemliche Kreis von der aus dem angenommenen Punct G an ihn gelegten Tangente GE_1 berührt wird."

Es ist noch zu erinnern, daſs, wenn der Kreis m unterhalb der Axe BM_1M_2A fällt, alsdann sein Quotient als negativ anzusehen ist, so daſs für diesen Fall

$$2q_1 = q_2 - q.$$

Endlich ist noch des besondern Falles zu erwähnen, wenn die genannte Linie aus dem Punct G durch die Mitte M der Linie CA geht. Nemlich in diesem Falle liegen in der Linie Gm_2M die Mittelpuncte M, m_2 zweier Kreise M, m_2, welche die gegebenen Kreise berühren, und deren Quotienten, in Bezug auf die Axe M_1M_2, respective 0, $2q_1$ sind, so daſs also der Quotient des Kreises m_2 gerade doppelt so groſs ist, als der des Kreises m_1.

31.

In dem Vorhergehenden sind unter andern auch die Mittel, folgende Aufgabe zu lösen, enthalten.

Aufgabe.

„Wenn zwei beliebige Kreise M_1, M_2 (Fig. 26.), die einander in B berühren, und irgend ein beliebiger Durchmesser eines dieser beiden Kreise, z. B. der Durchmesser DE des Kreises M_2 gegeben sind: so soll man einen Kreis m_1 beschreiben, welcher die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 berührt, und dessen Quotient, in Bezug auf den gegebenen Durchmesser DE (d. h., das aus dem Mittelpunct m_1 auf den Durchmesser DE gefällte Loth m_1P_1, dividirt durch den Radius des Kreises m_1), gegeben ist."

Auflösung.

Der Quotient des gegebenen Kreises M_1, in Bezug auf den gegebenen Durchmesser DE, ist als gegeben zu betrachten; er sei $= Q$; ferner sei der gegebene Quotient des gesuchten Kreises $m_1 = q$: so ist nach (27, F.):

$$q = Qx^2 + 2x,$$

wo nemlich x anzeigt, die wievielte Stelle der Kreis m_1, unter den Kreisen, die die gegebenen Kreise berühren, nach demjenigen Kreise m, dessen Mittelpunct m in dem gegebenen Durchmesser DE liegt, einnimmt, d. h., wo der Quotient des Kreises m_1, in Bezug auf die Axe M_1M_2, um $2x$ gröſser ist, als der Quotient desjenigen Kreises m, welcher die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 be-

rührt, und dessen Mittelpunct in dem gegebenen Durchmesser DE liegt, in Bezug auf die nemliche Axe $M_1 M_2$. Man findet aus dieser Gleichung

$$x = -\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\left(q + \frac{1}{Q^2}\right)}.$$

Ist nun μ der Mittelpunct desjenigen Kreises μ, welcher durch die vier Puncte A, C, D, d geht, d. h., welcher durch die beiden Puncte A, C geht, in welchen die Axe $M_1 M_2$ die Kreise M_2, M_1 schneidet, und durch die beiden Puncte D, d, in welchen der genannte Kreis m die gegebenen Kreise M_2, M_1 berührt; und ist ferner μ_1 der Mittelpunct desjenigen Kreises μ_1, welcher durch die nemlichen beiden Puncte A, C, und durch diejenigen beiden Puncte D_1, d_1 geht, in welchen der gesuchte Kreis m_1 die beiden gegebenen Kreise M_2, M_1 berührt: so ist nach (30, D):

$$\mu\mu_1 = M\mu_1 - M\mu = x . MA = \left(-\frac{1}{Q} + \sqrt{\left(q + \frac{1}{Q^2}\right)}\right) \times MA.$$

„Man beschreibe daher zuerst einen Kreis μ, welcher durch die drei gegebenen Puncte A, C und D geht, nehme hierauf in der zu der Axe $M_1 M_2$ senkrechten Linie $M\mu\mu_1$ den Punct μ_1 so an, daſs

$$\mu\mu_1 = \left(-\frac{1}{Q} + \sqrt{\left(q + \frac{1}{Q^2}\right)}\right) \times MA,$$

und ziehe um diesen Punct einen Kreis μ_1, welcher durch die Puncte A, C geht: so schneidet dieser Kreis μ_1 die beiden gegebenen Kreise M_1, M_2 auſserdem noch in den beiden Puncten d_1, D_1, in welchen dieselben von dem gesuchten Kreise m_1 berührt werden."

Zum Schlusse ist zu bemerken, daſs alle obigen Betrachtungen und Sätze (30, 31.), auf gleiche Weise Statt finden, wenn man anstatt der denselben zu Grunde liegenden, einander innerlich berührenden Kreise M_1, M_2, zwei, einander äuſserlich berührende Kreise annimmt.

Berlin, im März 1826.

26.

Allgemeine Theorie der Epicykeln.

(Von Herrn *L. Rabe.*)

1. Wenn in der Peripherie eines Kreises sich der Mittelpunct eines zweiten Kreises bewegt, so nennt man diesen zweiten Kreis Epicykel. Bewegt sich nun noch in der Peripherie dieses Epicykel, mit Beibehaltung der vorigen Bewegung, der Mittelpunct eines dritten Kreises, so ist der letzte Kreis ein Epicykel des Epicykel, und man nennt ihn zweiten Epicykel, wenn man den ersteren, ersten Epicykel genannt hat. Bewegt sich, die bereits statt habende Bewegung mitgerechnet, noch der Mittelpunct eines vierten Kreises auf der Peripherie des zweiten Epicykel, so ist der letzte Kreis ein dritter Epicykel; und wenn man die Aufeinandersetzung der Kreise, nach Art der früheren, beliebig annimmt, wo nemlich der Mittelpunct eines nächstfolgenden Kreises in der Peripherie seines nächstvorangehenden sich bewegt, so wird im Allgemeinen der $(n+1)^{te}$ Kreis der n^{te} Epicykel genannt.

Nimmt man nun noch an, daſs in der Peripherie des n^{ten} Epicykel ein Punct sich bewegt, so ist der Zweck gegenwärtiger Untersuchung, die Art der Bewegung dieses Punktes zu bestimmen, oder die Art der Curve auszumitteln, welche der Punct, durch auf so mannigfaltige Art zusammengesetzte Bewegung, beschreiben wird.

2. Um uns in der Folge einfacher ausdrücken zu können, wollen wir folgende Bezeichnungen einführen. Es sollen durch

$$(0),\ (1),\ (2),\ (3),\ (4),\ \text{u. s. w.}$$

der Ordnung nach, der erste ruhende Kreis, der erste, zweite, dritte, vierte, ... Epicykel vorgestellt werden.

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ \text{u. s. w.}$$

seyen analog ihre Radien.

Im Mittelpuncte des (0) schneiden sich drei auf einander folgende Coordinatenachsen x; y; z; und es seyen die Ebenen der xy, der xz, der yz, die Ebenen, welche durch die Achsen der x und y, durch die Achsen der x und z und durch die Achsen der y und z gehen.

$$n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ \text{u. s. w.}$$

sollen die Neigungen der Ebenen, in welchen die (0), (1), (2), (3), (4), ... fallen, mit der Ebene der xy vorstellen.

$$k_0,\ k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ \text{u. s. w.}$$

sind die Winkel der Knotenlinien analoger Ebenen in der Ebene der xy mit der Achse der x.

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \text{u. s. w.}$$

seyen die Winkel der Knotenlinien analoger Ebenen in der Ebene der xy, für eine bestimmte Epoche t mit den Radien $r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots\ldots$

$$x_0, y_0, z_0;\quad x_1, y_1, z_1;\quad x_2, y_2, z_2;\quad x_3, y_3, z_3;\quad \text{u. s. w.}$$

stellen die Coordinaten der Durchschnittspuncte der Peripherien der (0), (1), (2), (3), ... mit den Radien $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$, ebenfalls für die Epoche t, vor.

3. Macht man noch die Voraussetzung, daſs die Winkel, die r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 ...... mit den Coordinatenachsen x; y; z; bilden, durch

$$(r_0x),\ (r_1x),\ (r_2x),\ (r_3x),\ (r_4x),\ \text{u. s. w.}$$
$$(r_0y),\ (r_1y),\ (r_2y),\ (r_3y),\ (r_4y),\ \text{u. s. w.}$$
$$(r_0z),\ (r_1z),\ (r_2z),\ (r_3z),\ (r_4z),\ \text{u. s. w.}$$

bezeichnet werden, so hat man:

$$x_0 = r_0 \cos(r_0x),$$
$$y_0 = r_0 \cos(r_0y),$$
$$z_0 = r_0 \cos(r_0z).$$

Eben so

$$x_1 - x_0 = r_1 \cos(r_1x),$$
$$y_1 - y_0 = r_1 \cos(r_1y),$$
$$z_1 - z_0 = r_1 \cos(r_1z);$$

ferner

$$x_2 - x_1 = r_2 \cos(r_2x),$$
$$y_2 - y_1 = r_2 \cos(r_2y),$$
$$z_2 - z_1 = r_2 \cos(r_2z);$$

u. s. w.

so bekommt man sofort folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= r_0\,[\cos\alpha_0 \cos k_0 + \sin\alpha_0 \sin k_0 \cos n_0],\\
y_0 &= r_0\,[\cos\alpha_0 \sin k_0 - \sin\alpha_0 \cos k_0 \cos n_0],\\
z_0 &= r_0 \sin\alpha_0 \sin n_0,\\
x_1 - x_0 &= r_1\,[\cos\alpha_1 \cos k_1 + \sin\alpha_1 \sin k_1 \cos n_1],\\
y_1 - y_0 &= r_1\,[\cos\alpha_1 \sin k_1 - \sin\alpha_1 \cos k_1 \cos n_1],\\
z_1 - z_0 &= r_1 \sin\alpha_1 \sin n_1,\\
x_2 - x_1 &= r_2\,[\cos\alpha_2 \cos k_2 + \sin\alpha_2 \sin k_2 \cos n_2],\\
y_2 - y_1 &= r_2\,[\cos\alpha_2 \sin k_2 + \sin\alpha_2 \cos k_2 \cos n_2],\\
z_2 - z_1 &= r_2 \sin\alpha_2 \sin n_2,
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Man erhält demnach für die Coordinaten des Durchschnittspunctes des r_n mit der Peripherie des (n), oder für die Coordinaten des in der Peripherie des n^{ten} Epicykel sich bewegenden Punctes, folgende Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
x_n = {} & r_0\,[\cos\alpha_0 \cos k_0 + \sin\alpha_0 \sin k_0 \cos n_0]\\
& + r_1\,[\cos\alpha_1 \cos k_1 + \sin\alpha_1 \sin k_1 \cos n_1]\\
& + r_2\,[\cos\alpha_2 \cos k_2 + \sin\alpha_2 \sin k_2 \cos n_2]\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + r_n\,[\cos\alpha_n \cos k_n + \sin\alpha_n \sin k_n \cos n_n],\\
y_n = {} & r_0\,[\cos\alpha_0 \sin k_0 - \sin\alpha_0 \cos k_0 \cos n_0]\\
& + r_1\,[\cos\alpha_1 \sin k_1 - \sin\alpha_1 \cos k_1 \cos n_1]\\
& + r_2\,[\cos\alpha_2 \sin k_2 - \sin\alpha_2 \cos k_2 \cos n_2]\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + r_n\,[\cos\alpha_n \sin k_n - \sin\alpha_n \cos k_n \cos n_n],\\
z_n = {} & r_0 \sin\alpha_0 \sin n_0\\
& + r_1 \sin\alpha_1 \sin n_1\\
& + r_2 \sin\alpha_2 \sin n_2\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + r_n \sin\alpha_n \sin n_n.
\end{aligned}
$$

Setzt man, um diesen Ausdrücken einfachere Formen zu geben:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tang} A_0 &= \frac{\operatorname{cotang} k_0}{\cos n_0} \quad \text{und} \quad \sin a_0 = \frac{\cos k_0}{\sin A_0},\\
\operatorname{tang} B_0 &= -\frac{\operatorname{tang} k_0}{\cos n_0} \quad \text{und} \quad \sin b_0 = \frac{\sin k_0}{\sin B_0},\\
\operatorname{tang} C_0 &= 0 \quad \text{und} \quad \sin c_0 = \sin n_0,
\end{aligned}
$$

mit den ganz analogen Bedeutungen der Gröſsen

$$A_1,\ B_1,\ C_1;\quad A_2,\ B_2,\ C_2;\quad A_3,\ B_3,\ C_3;\quad \text{u. s. w.},$$
$$a_1,\ b_1,\ c_1;\quad a_2,\ b_2,\ c_2;\quad a_3,\ b_3,\ c_3;\quad \text{u. s. w.},$$

wenn man nemlich k_0 und n_0, der Ordnung nach, in

$$k_1 \text{ und } n_1;\quad k_2 \text{ und } n_2;\quad k_3 \text{ und } n_3;\quad \text{u. s. w.}$$

übergehen läfst, so wird man ohne Mühe erhalten:

$$x_n = r_0 \sin a_0 \sin(A_0 + \alpha_0) + r_1 \sin a_1 \sin(A_1 + \alpha_1) + r_2 \sin a_2 \sin(A_2 + \alpha_2) + \text{u. s. w.},$$
$$y_n = r_0 \sin b_0 \sin(B_0 + \alpha_0) + r_1 \sin b_1 \sin(B_1 + \alpha_1) + r_2 \sin b_2 \sin(B_2 + \alpha_2) + \text{u. s. w.},$$
$$z_n = r_0 \sin c_0 \sin(C_0 + \alpha_0) + r_1 \sin c_1 \sin(C_1 + \alpha_1) + r_2 \sin c_2 \sin(C_2 + \alpha_2) + \text{u. s. w.}$$

4. Seyen nun der Ordnung nach

$$G_0,\quad G_1,\quad G_2,\quad G_3,\quad G_4,\quad \text{u. s. w.}$$

die Geschwindigkeiten der Mittelpuncte von

(1), (2), (3), (4), u. s. w.

in den Peripherien von

(0), (1), (2), (3), u. s. w.,

und G_n sey die Geschwindigkeit des in der Peripherie des n^{ten} Epicykel sich bewegenden Punctes, so ist, wenn man unter dt ein Element der Zeit versteht, und die Aenderung der Winkel α_0, α_1, α_2, α_3, ..., während dieses Zeitelementes dt, durch:

$$d\alpha_0,\quad d\alpha_1,\quad d\alpha_2,\quad d\alpha_3,\quad d\alpha_4,\quad \text{u. s. w.}$$

bezeichnet werden, wie bekannt,

$$G_0 = \frac{r_0\, d\alpha_0}{dt},\quad G_1 = \frac{r_1\, d\alpha_1}{dt},\quad G_2 = \frac{r_2\, d\alpha_2}{dt};\quad \text{u. s. w.},$$

daher:

$$\frac{G_1}{G_0} = \frac{r_1\, d\alpha_1}{r_0\, d\alpha_0},\quad \frac{G_2}{G_0} = \frac{r_2\, d\alpha_2}{r_0\, d\alpha_0},\quad \text{u. s. w.}$$

Wird noch, der Kürze wegen, gesetzt:

$$g_1 = \frac{r_0}{r_1}\cdot\frac{G_1}{G_0},\quad g_2 = \frac{r_0}{r_2}\cdot\frac{G_2}{G_0},\quad g_3 = \frac{r_0}{r_3}\cdot\frac{G_3}{G_0},\quad \text{u. s. w.},$$

so hat man aus diesen und den vorhergehenden Gleichungen

$$d\alpha_1 = g_1\, d\alpha_0,\quad d\alpha_2 = g_2\, d\alpha_0,\quad d\alpha_3 = g_3\, d\alpha_0,\quad \text{u. s. w.},$$

und diese Gleichungen so integrirt, dafs, für $\alpha_0 = 0$, die Gröfsen α_1, α_2, α_3, α_4, ... die constanten Werthe

$$\beta_1,\quad \beta_2,\quad \beta_3,\quad \beta_4,\quad \beta_5,\quad \text{u. s. w.}$$

annehmen, so hat man folgende Gleichungen:

$$\alpha_1 = g_1 \alpha_0 + \beta_1,\quad \alpha_2 = g_2 \alpha_0 + \beta_2,\quad \alpha_3 = g_3 \alpha_0 + \beta_3,\quad \text{u. s. w.}$$

Man hat also statt der letzten drei Gleichungen in 3., wenn man dort die hier für

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$ gefundenen Werthe hineinsubstituirt, folgende, blofs von α_0 abhängigen Coordinaten des beweglichen Punctes in der Peripherie des n^{ten} Epicykel:

$$\left.\begin{aligned}
x_n = {} & r_0 \sin a_0 \sin(A_0 + \alpha_0) \\
& + r_1 \sin a_1 \sin(A_1 + \beta_1 + g_1 \alpha_0) \\
& + r_2 \sin a_2 \sin(A_2 + \beta_2 + g_2 \alpha_0) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + r_n \sin a_n \sin(A_n + \beta_n + g_n \alpha_0), \\
y_n = {} & r_0 \sin b_0 \sin(B_0 + \alpha_0) \\
& + r_1 \sin b_1 \sin(B_1 + \beta_1 + g_1 \alpha_0) \\
& + r_2 \sin b_2 \sin(B_2 + \beta_2 + g_2 \alpha_0) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + r_n \sin b_n \sin(B_n + \beta_n + g_n \alpha_0), \\
z_n = {} & r_0 \sin c_0 \sin(C_0 + \alpha_0) \\
& + r_1 \sin c_1 \sin(C_1 + \beta_1 + g_1 \alpha_0) \\
& + r_2 \sin c_2 \sin(C_2 + \beta_2 + g_2 \alpha_0) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + r_n \sin c_n \sin(C_n + \beta_n + g_n \alpha_0).
\end{aligned}\right\} \quad \text{(I.)}$$

5. Diese Gleichungen (I.) enthalten die Auflösung unserer Aufgabe. Man kann fürs erste mittelst derselben, bei Festsetzung aller in ihnen vorkommenden constanten Gröfsen, für jedes beliebige α_0, oder für alle Werthe von α_0, zwischen den Grenzen $\alpha_0 = 0$ und $\alpha_0 = 360°$, die Lage des, in dem letzten Epicykel sich bewegenden Punctes, gegen die drei festgesetzten Coordinatenebenen bestimmen, und zweitens kann man durch Elimination von α_0, aus je zweien der Gleichungen (I.), die Gleichungen der Projectionen der, vom besagten Puncte beschriebenen Curve, auf die Ebenen der xy, der xz, und der yz erhalten.

Im Folgenden wollen wir für einige besondere Fälle aus den allgemeinen Gleichungen (I.) die Curven aufsuchen.

Erster besonderer Fall.

Es sey $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g_5 = \ldots\ldots\ldots = g_n = 1$,

so gehen obige Gleichungen (I.) in folgende über:

$$x_n = r_0 \sin a_0 \sin(A_0 + \alpha_0) + r_1 \sin a_1 \sin(A_1 + \beta_1 + \alpha_0) + r_2 \sin a_2 \sin(A_2 + \beta_2 + \alpha_0) + \text{u.s.w.}$$
$$y_n = r_0 \sin b_0 \sin(B_0 + \alpha_0) + r_1 \sin b_1 \sin(B_1 + \beta_1 + \alpha_0) + r_2 \sin b_2 \sin(B_2 + \beta_2 + \alpha_0) + \text{u.s.w.}$$
$$z_n = r_0 \sin c_0 \sin(C_0 + \alpha_0) + r_1 \sin c_1 \sin(C_1 + \beta_1 + \alpha_0) + r_2 \sin c_2 \sin(C_2 + \beta_2 + \alpha_0) + \text{u.s.w.}$$

Wenn nun $\varphi(\alpha_0)$ irgend eine Function von α_0 vorstellt, so ist, wie bekannt,

$$\varphi(\alpha_0) = \varphi^0(\alpha_0) + \frac{d\,.\,\varphi^0(\alpha_0)}{d\alpha_0}\,\frac{\alpha_0}{1} + \frac{d^2\varphi^0(\alpha_0)}{d\alpha_0^2}\,\frac{\alpha_0^2}{1\,.\,2} + \text{u. s. w.}$$

Wendet man dieses Theorem auf die drei letzten Gleichungen an, und setzt überdies noch abkürzend:

$$A = r_0 \sin a_0 \sin A_0 + r_1 \sin a_1 \sin(A_1 + \beta_1) + r_2 \sin a_2 \sin(A_2 + \beta_2) + \text{u. s. w.},$$
$$'A = r_0 \sin a_0 \cos A_0 + r_1 \sin a_1 \cos(A_1 + \beta_1) + r_2 \sin a_2 \cos(A_2 + \beta_2) + \text{u. s. w.},$$
$$B = r_0 \sin b_0 \sin B_0 + r_1 \sin b_1 \sin(B_1 + \beta_1) + r_2 \sin b_2 \sin(B_2 + \beta_2) + \text{u. s. w.},$$
$$'B = r_0 \sin b_0 \cos B_0 + r_1 \sin b_1 \cos(B_1 + \beta_1) + r_2 \sin b_2 \cos(B_2 + \beta_2) + \text{u. s. w.},$$
$$C = r_0 \sin c_0 \sin C_0 + r_1 \sin c_1 \sin(C_1 + \beta_1) + r_2 \sin c_2 \sin(C_2 + \beta_2) + \text{u. s. w.},$$
$$'C = r_0 \sin c_0 \cos C_0 + r_1 \sin c_1 \cos(C_1 + \beta_1) + r_2 \sin c_2 \cos(C_2 + \beta_2) + \text{u. s. w.},$$

so hat man

$$\left.\begin{array}{l} x_n = A \cos \alpha_0 + 'A \sin \alpha_0, \\ y_n = B \cos \alpha_0 + 'B \sin \alpha_0, \\ z_n = C \cos \alpha_0 + 'C \sin \alpha_0. \end{array}\right\} \quad (a).$$

Eliminirt man aus ihnen die Gröfse α_0, so erhält man im Allgemeinen zwei besondere Gleichungen, zwischen je zwei der veränderlichen Coordinaten eines Punctes der Curve, und diese zwei Gleichungen drücken die Relationen der Coordinaten eines jeden Punctes dieser Curve aus.

Sind nun x; y; z; die Coordinaten eines beliebigen Punctes dieser Curve, so sind, wenn man folgende Abkürzungen einführt:

$$A^2 + 'A^2 = D^2,$$
$$\frac{BA + 'B'A}{D^2} = E \quad \text{und} \quad \frac{CA + 'C'A}{D^2} = 'E,$$
$$\frac{'AB + 'BA}{D^2} = F \quad \text{und} \quad \frac{'AC + 'CA}{D^2} = 'F,$$

die Gleichungen für die Projectionen der Curve auf die Ebenen der xy und der xz,

$$y = Ex \pm F\sqrt{D^2 - x^2},$$
$$z = 'Ex \pm 'F\sqrt{D^2 - x^2}.$$

Transformirt man das Coordinatensystem so, dafs man die Ebene der xy um den Winkel φ, gegen ihre ursprüngliche Lage, durch die Achse der x dreht, so ist, wenn die Coordinaten eines bestimmten Punctes gegen das alte Coordinatensystem x; y; z; waren, und gegen das neue x'; y'; z'; sind,

$$x = x',$$
$$y = y' \cos \varphi + z' \sin \varphi,$$
$$z = z' \cos \varphi + y' \sin \varphi.$$

Führt man diese neuen Coordinaten x', y', z' in die letzten zwei Gleichungen der Curve ein, und sind ebenfalls die Coordinaten von was immer für einen Punct dieser Curve, in Bezug auf diese neuen Coordinatenachsen, x', y', z, so sind die Gleichungen der Projectionen auf die Ebenen der $x'y'$ und $x'z'$:

$$y' = x'(E\cos\varphi - {}'E\sin\varphi) \pm (F\cos\varphi - {}'F\sin\varphi)\sqrt{D^2 - x'^2},$$

$$z' = x'(E\sin\varphi + {}'E\cos\varphi) \pm (F\sin\varphi + {}'F\cos\varphi)\sqrt{D^2 - x'^2}.$$

Der Winkel φ, sieht man, ist eine ganz willkürliche Gröſse. Bestimmt man ihn so, daſs man annimmt:

$$F\sin\varphi + {}'F\cos\varphi = 0,$$

wodurch φ immer einen möglichen Werth hat, so geben die letzten zwei Gleichungen wenn man abkürzend setzt:

$$\sqrt{F^2 + {}'F^2} = G,$$

$$\frac{EF + {}'E{}'F}{G} = I \quad \text{und} \quad \frac{{}'EF - {}'FE}{G} = {}'I,$$

folgende Gleichungen unserer Curve:

$$y' = Ix' \pm G\sqrt{D^2 - x'^2},$$

$$z' = {}'Ix'.$$

Diese zwei Gleichungen zeigen, daſs die so erhaltene Curve eine ebne Curve ist, und wir wollen daher noch ihre Gleichung in der Ebene suchen, in welche sie fällt.

Transformirt man zu diesem Zwecke das Coordinatensystem so, daſs wir in der Ebne der $x'z'$ die Achse der x' um den Winkel ψ gegen ihre ursprüngliche Lage verschieben, und heiſst man die Coordinaten eines Punctes für dieses System x'', y'', z'', so hat man

$$x' = x''\cos\psi + z''\sin\psi$$

$$y' = y''$$

$$z' = z''\cos\psi - x''\sin\psi$$

Führt man diese neuen Coordinaten in die letzten zwei Gleichungen der Curve ein, so erhält man folgende Gleichungen für die Projectionen der Curve auf die Ebenen der $x''y''$ und $x''z''$:

$$x'' = \frac{(1 - {}'I\,\text{tang}\,\psi)\left[Iy'' \pm G\sqrt{D^2(I^2 + G^2) - y''^2}\right]}{\left[\cos\psi(1 - {}'I\,\text{tang}\,\psi) + \sin\psi(I + \text{tang}\,\psi)\right]\left[I^2 + G^2\right]},$$

$$z'' = \frac{x''({}'I + \text{tang}\,\psi)}{1 - {}'I\,\text{tang}\,\psi}.$$

Soll nun die Curve ganz in die neue Coordinatenachse $x''y''$ fallen, so muſs $z'' = 0$ seyn.

Man hat dann, wenn man abkürzend setzt:

$$D^2 (I^2 + G^2) = K^2$$

$$\frac{I\sqrt{1 + {'I}^2}}{I^2 + G^2} = L \quad \text{und} \quad \frac{G\sqrt{1 + {'I}^2}}{I^2 + G^2} = M,$$

folgende Gleichung für die gesuchte Curve:

$$x'' = Ly'' \pm M\sqrt{K^2 - y''^2}.$$

Verschiebt man noch diese Achse der x'' in der Ebene der $x''y''$ um den Winkel ι, und sind dann x''', y''', die Coordinaten eines Punctes der Curve, so hat man erstens

$$x'' = x''' \cos\iota + y''' \sin\iota,$$
$$y'' = y''' \cos\iota - x''' \sin\iota.$$

Nimmt man den Winkel ι so an, daſs man hat:

$$\operatorname{tang}\iota = \frac{1 - L^2 - M^2 \pm \sqrt{(1 - L^2 - M^2)^2 + 4L^2}}{2L},$$

so erhält man, wenn man abkürzend setzt:

$$a = \frac{KM}{\sqrt{(\cos\iota - L\sin\iota)^2 + M^2 \sin^2\iota}},$$

$$b = \frac{KM}{\sqrt{(\sin\iota + L\cos\iota)^2 + M^2 \cos^2\iota}},$$

als Gleichung der gesuchten Curve:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (a).$$

Also eine Ellipse, deren halbe groſse und kleine Achsen a und b sind.

Zweiter besonderer Fall.

Es sey mit der Annahme aus dem ersten besonderen Fall noch diese vereinigt, daſs die Ebenen, in welche (0), (1), (2), (3) ..... fallen, nur eine einzige Ebene bilden, und zwar sey es die der xy, so setze man in den Gleichungen (a)

$$n_0 = n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = \ldots\ldots = n_n = 0,$$
$$k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = \ldots\ldots = k_n = 0.$$

Dann geben jene Gleichungen, wenn man abkürzend setzt:

$$N = r_0 + r_1 \cos\beta_1 + r_2 \cos\beta_2 + r_3 \cos\beta_3 + \text{u. s. w.},$$
$${'N} = \quad r_1 \sin\beta_1 + r_2 \sin\beta_2 + r_3 \sin\beta_3 + \text{u. s. w.},$$

folgende Ausdrücke für die Coordinaten des beweglichen Punctes im letzten Epicykel:

$$x_n = N\cos\alpha_0 - {'N}\sin\alpha_0,$$
$$y_n = -N\sin\alpha_0 - {'N}\cos\alpha_0,$$

Elimi-

Eliminirt man ebenfalls hier die Gröfse α_0, so erhält man dadurch die Relation zwischen den Coordinaten eines jeden Punctes der von diesem beweglichen Puncte beschriebenen Curve. Sind hier ebenfalls x und y die Coordinaten eines beliebigen Punctes dieser Curve, und setzt man, abkürzend:

$$\sqrt{N^2 + 'N^2} = r,$$

so ist die Gleichung dieser Curve

$$y = \sqrt{(r^2 - x^2)} \quad (\beta).$$

Die so erhaltene Curve, ersieht man aus letzter Gleichung, ist ein Kreis, dessen Halbmesser r ist.

Dritter besonderer Fall.

Es sey, nebst der Annahme für den ersten besonderen Fall, die folgende ebenfalls vereinigt, nemlich, wenn man hat:

$$0 = r_0 \sin a_0 \sin A_0 + r_1 \sin a_1 \sin(A_1 + \beta_1) + r_2 \sin a_2 \sin(A_2 + \beta_2) + \text{u. s. w.},$$
$$0 = r_0 \sin b_0 \sin B_0 + r_1 \sin b_1 \sin(B_1 + \beta_1) + r_2 \sin b_2 \sin(B_2 + \beta_2) + \text{u. s. w.},$$
$$0 = r_0 \sin c_0 \sin C_0 + r_1 \sin c_1 \sin(C_1 + \beta_1) + r_2 \sin c_2 \sin(C_2 + \beta_2) + \text{u. s. w.};$$

d. h., wenn in den Gleichungen (a) die Gröfsen

$$A = B = C = 0$$

sind, so gehen jene Gleichungen (a) in folgende über:

$$x_n = 'A \sin \alpha_0,$$
$$y_n = 'B \sin \alpha_0,$$
$$z_n = 'C \sin \alpha_0,$$

Aus diesen Gleichungen α_0 eliminirt, erhält man die Gleichungen der, von dem in der Peripherie des letzten Epicykel beweglichen Punctes, beschriebenen Curve, und diese Gleichungen sind, wenn man mit x, y, z, die Coordinaten von was immer für einen Punct dieser Curve bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{'C}{'A}\,x, \\ y &= \frac{'B}{'A}\,x. \end{aligned}\right\} (\gamma).$$

Also, die so beschriebene Curve ist eine gerade Linie, deren Projectionen auf die Ebenen der xz und xy durch die letzten zwei Gleichungen vorgestellt werden.

Ferner hat man eine geradlinige Bewegung für den beweglichen Punct in der Peripherie des letzten Epicykel, wenn man in den Gleichungen (a) annimmt:

$$'A = 'B = 'C = 0,$$

wo dann die Projectionen dieser Geraden auf die Ebenen der xz und xy sind:

Sucht man aber die Lage des Planeten gegen die der Erde, und sind ξ, ν, ζ, die Coordinaten des Planeten, wenn man den Ursprung der Coordinaten in den Mittelpunct der Erde verlegt, so hat man:

$$\xi = x - X,$$
$$\nu = y - Y,$$
$$\zeta = z - Z.$$

Werden in diesen Gleichungen die Werthe für x, y, z, und X, Y, Z, aus den obigen Gleichungen, substituirt, so erhält man:

$$\xi = r \cos u - R \cos (U - k),$$
$$\nu = r \sin u \cos n - R \sin (U - k),$$
$$\zeta = r \sin u \sin n.$$

Es ist aber, wie bekannt, die Gleichung der Ellipse:

$$r = \frac{f}{1 - e \cos (u - h)},$$

wo f der halbe Parameter, e die Excentricität, und h das Argument der Breite des Apheliums bedeuten, und eben so:

$$R = \frac{F}{1 - E \cos (U - H)},$$

wo hier die grofsen Buchstaben dasselbe bedeuten für die Erdbahn, was die kleinen Buchstaben für die Planetenbahn ausgedrückt haben.

Man hat also, wenn man in die letzten drei Gleichungen die Werthe für r und R einführt:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{f \cos u}{1 - e \cos (u - h)} - \frac{F \cos (U - k)}{1 - E \cos (U - H)}, \\ \nu &= \frac{f \sin u \cos n}{1 - e \cos (u - h)} - \frac{F \sin (U - k)}{1 - E \cos (U - H)}, \\ \zeta &= \frac{f \sin u \sin n}{1 - e \cos (u - h)}. \end{aligned}\right\} \text{(II.)}$$

Diese Gleichungen drücken für jeden Stand der Erde in ihrer Bahn, und des Planeten in seiner Bahn, die Coordinaten des letzteren in Bezug auf die erstere aus.

Da also die Coordinaten eines jeden Ortes des Planeten in seiner geocentrischen Bewegung von zwei Variablen abhängen, so erhält man, durch Elimination der Gröfsen u und U, aus der Gleichung (II), eine einzige Gleichung zwischen den drei veränderlichen Coordinaten eines Punctes; und eine Gleichung zwischen ξ, ν, ζ, oder den Coordinaten eines Punctes, gehört im Allgemeinen irgend einer krummen Oberfläche zu.

Wir folgern also hieraus, daſs alle geocentrischen Orte des Planeten sich auf irgend einer krummen Oberfläche befinden. Wollte man also, als Hypothese, bloſs die Gleichungen (I) aus 4, statt jener (II) zur Bestimmung der geocentrischen Orte der Planeten gebrauchen, d. h., wollte man eine epicyklische Bewegung der wirklich Statt findenden, von der Erde aus gesehenen Bewegung des Planeten substituiren, so zeigen die vorhergehenden Betrachtungen, daſs eine solche Annahme unmöglich bestehen könnte.

Die scheinbare Bewegung der Sonne aber ließe sich allenfalls durch eine epicyklische Bewegung ersetzen, denn geocentrisch bewegt sich die Sonne in einer Ellipse, und die Gleichung (α) aus 5 zeigt, daſs, unter der dort angeführten Bedingung, eine epicyklische Bewegung eine Ellipse hervorbringen kann.

Diese Gleichung (α) aus 5 ist aber unter der Bedingniſs gefunden worden, wenn die Epicykeln in verschiedenen Ebenen liegen. Die Annahme der Alten aber, wie bereits erwähnt wurde, war, daſs alle Epicykel sich in einer und derselben Ebene befinden, und diese Annahme giebt, wie es aus Gleichung (β) in 5 erhellt, einen Kreis; es konnte mithin die Hypothese der Alten nicht einmal dazu gebraucht werden, um sich die scheinbare Bewegung der Sonne zu erklären.

27.

Ueber Gauſs neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden.

(Von Herrn Prof. Dr. *C. G. J. Jacobi.*)

1.

In den *Principiis* von Newton liest man eine Methode, wie man durch eine Anzahl gegebener Puncte eine parabolische Curve legen könne. Diese Aufgabe erscheint analytisch als Interpolationsproblem, aus mehreren Gliedern einer Reihe das allgemeine zu finden. Es ist der bekanntere Fall, wenn die Intervallen der Ordinaten der gegebenen Puncte gleich groſs sind, oder analytisch ausgedrückt, wenn die Werthe des reihenden Elements, für welche auch die Werthe der entsprechenden Glieder der Reihe gegeben sind, eine arithmetische Progression bilden. Aber der elegante, mit Unrecht weniger gekannte, Algorithmus, den

Newton giebt, erstreckt sich schon auf den allgemeineren Fall, wenn jene Intervallen der Ordinaten der gegebenen Puncte, oder jene Werthe des reihenden Elements irgend beliebige sind. Newton hat hiervon eine Anwendung auf die Quadraturen gemacht. Durch mehrere Puncte der zu quadrirenden Curve, für welche die Ordinaten berechnet worden sind, legt er die parabolische Curve, und deren Quadratur zwischen denselben Grenzen, zwischen denen die gegebene Curve quadrirt werden sollte, giebt einen Näherungswerth.

Newton hat von jenem Interpolationsproblem und seiner Anwendung auf die Quadraturen ferner in einem Tractätchen gehandelt, welches *Methodus Differentialis* betitelt ist, und zuerst der Amsterdamer *) Ausgabe seiner *Principia*, v. J. 1723, nebst anderen Abhandlungen angehängt gefunden wird. Hier rathet er unter andern, zum Behuf der leichteren Berechnung der Integrale, für jede Zahl der berechneten Ordinaten, deren Intervalle er gleich groſs annimmt, Tafeln anzufertigen, von denen er auch selbst einen Anfang giebt, welchen hernach *Roger Cotes* in seiner *harmonia mensurarum* fortgesetzt hat.

Aber Gauſs hat in den Göttinger Commentarien gezeigt, daſs man durch schickliche Wahl der Abscissen, für welche die Ordinaten berechnet werden, den Grad der Näherung auf das Doppelte treiben kann; und da solche Bestimmung unabhängig von der Natur der zu quadrirenden Curve geschieht, so ist es möglich, auch nach der so vervollkommneten Methode Tafeln zu verfertigen, von denen auch Gauſs eine Probe gegeben hat. Gauſs gelangt zu seinen Resultaten auf dem Wege einer schwierigen Induction, die durch die sogenannte Kästnersche Methode, wenn etwas für die Zahl n gilt, es auch für die Zahl $n+1$ zu erweisen, zur Allgemeinheit erhoben werden kann. Es ist also noch ein directer Beweis zu wünschen. Die groſse Einfachheit und Eleganz der Gauſsischen Resultate, läſst einen einfachen Weg vermuthen. Auf einem solchen einfachen und directen Wege zu jenen Resultaten zu gelangen, mit denen Gauſs die Wissenschaft bereichert hat, ist der Zweck dieser Abhandlung.

2.

Es sey das Integral $\int y\,dx$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=1$ zu nehmen. Andere Grenzen werden leicht auf diese zurückgeführt. Es seyen

---

*) Von dieser Ausgabe ist die Curiosität zu erzählen, daſs sie auf Kosten des berühmten Philologen *Richard Bentley* veranstaltet worden ist, der in seinen englischen und lateinischen Predigten oft die Principia seines genauen Freundes Newton anpries, als ein Bollwerk gegen die Irreligiosität, und eine Offenbarung der Gröſse Gottes.

ferner die Werthe von x, für welche y bekannt ist, $a', a'', a''', \ldots\ldots, a^{(n)}$, so daſs, wenn man $y = f(x)$ setzt, die entsprechenden Werthe von y werden: $f(a'), f(a''), f(a'''), \ldots\ldots, f(a^{(n)})$. Man bilde das Product $(x-a')(x-a'')(x-a''')\ldots\ldots(x-a^{(n)})$, und nenne es $\varphi(x)$, so hat man, wenn $y = f(x)$ eine ganze rationale Function vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, durch Zerfällung in Partialbrüche:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(a')}{\varphi'(a')(x-a')} + \frac{f(a'')}{\varphi'(a'')(x-a'')} + \frac{f(a''')}{\varphi'(a''')(x-a''')} + \ldots + \frac{f(a^{(n)})}{\varphi'(a^{(n)})(x-a^{(n)})},$$

wo wir mit $\varphi'(a^{(m)})$ den Werth von $\varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$, für $x = a^{(m)}$, bezeichnen. Vermittelst dieser Formel findet man, durch Multiplication mit φx, sogleich y aus den speciellen Werthen für $x = a'$, $x = a''$, $x = a'''$, $\ldots\ldots$ $x = a^{(n)}$. Uebersteigt aber y den $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad, so giebt der Ausdruck zur rechten Seite des Gleichheitszeichens, welchen wir G nennen wollen, nur den ächten Bruch, der in dem unächten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ steckt; so daſs, wenn $f(x)$ z. B. vom $(n+p)^{\text{ten}}$ Grade ist, und man $f(x) = U + V.\varphi(x)$ hat, wo U höchstens vom $(n-1)^{\text{ten}}$, V vom p^{ten} Grade ist, $G = \frac{U}{\varphi(x)}$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{U}{\varphi(x)} + V = G + V$. Entwickelt man G und den Bruch $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nach den absteigenden Potenzen von x, so enthält $G = \frac{U}{\varphi(x)}$ die negativen, V die positiven Potenzen von x, die sich in der Entwickelung von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ befinden. Setzt man daher $f(x) =$

$$a + a'x + a''x^2 + \ldots + a^{(n)}x^n + a^{(n+1)}x^{(n+1)} + \ldots + a^{(2n)}x^{2n} + \text{u. s. w.},$$

$$\text{und } \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{A'}{x^n} + \frac{A''}{x^{n+1}} + \frac{A'''}{x^{n+2}} + \ldots\ldots + \frac{A^{(n+1)}}{x^{2n}} + \text{u. s. w.},$$

so findet man $V =$

$$a^{(n)}A' + a^{(n+1)}(A'x + A'') + a^{(n+2)}(A'x^2 + A''x + A''') + \ldots\ldots$$
$$+ a^{(2n-1)}(A'x^{n-1} + A''x^{n-2} + \ldots + A^{(n)}) + \text{u. s. w.}$$

3.

Newton's Näherungsmethode besteht darin: statt $y = f(x)$ die Function $U = G.\varphi(x)$ zu substituiren. Der Fehler oder die Differenz der Integrale der gegebenen und substituirten Function wird dann $\Delta =$

$$\int y\,dx - \int U dx = \int \varphi(x)\,V dx.$$

Es wird jetzt die Aufgabe gestellt, die Gröſsen $a', a'', a''', \ldots\ldots, a^{(n)}$,

so zu bestimmen, daſs der Fehler Δ möglichst gering, oder die Näherung möglichst genau werde. In den Fällen, wo die Näherungsmethode mit Glück angewendet werden soll, müssen die Coëfficienten der für y gesetzten Reihe rasch abnehmen. Je mehr daher von den ersten Coëfficienten dieser Reihe, welche die hauptsächlichsten sind, in dem Ausdruck für den Fehler Δ verschwinden, desto kleiner wird er im Allgemeinen, und desto gröſser die Näherung. Da nun schon, was auch die Gröſsen, a', a'', a''', ..., $a^{(n)}$ waren, im Ausdrucke für $\Delta = \int \varphi(x) \cdot V dx$, wie aus dem für V gefundenen Ausdrucke erhellt, die Coëfficienten a, a', a'', ..., $a^{(n-1)}$ nicht mehr vorkommen, so wollen wir, vermittelst schicklicher Bestimmung jener Gröſsen, auch noch die mit $a^{(n)}$, $a^{(n+1)}$, ..., $a^{(2n-1)}$, behafteten Glieder verschwinden machen, wodurch ein doppelter Grad der Näherung erreicht wird. Es wird dieses immer möglich seyn, da die Zahl der willkürlichen Gröſsen und der zu erfüllenden Bedingungen dieselbe ist. Man sieht sogleich aus dem für V gefundenen Ausdruck, daſs hierzu eine solche Bestimmung von $\varphi(x)$ erfordert wird, daſs die Integrale:

$$\int \varphi(x)\,dx,\quad \int x\varphi(x)\,dx,\quad \int x^2\varphi(x)\,dx,\quad \ldots\ldots,\quad \int x^{n-1}\varphi(x)\,dx,$$

zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, zwischen denen das Integral $\int y\,dx$ genommen werden soll, verschwinden. Diese Bestimmung ist jetzt die Aufgabe.

4.

Es läſst sich durch eine bekannte Reductionsformel das Integral $\int x^m \varphi(x)\,dx$ auf die vielfachen Integrale von $\varphi(x)$ zurückführen. Man hat nemlich allgemein:

$$\begin{aligned}
\int uv\,dx &= u\int v\,dx - \int du \int v\,dx,\\
\int du\int v\,dx &= du\int^2 v\,dx - \int d^2u\int^2 v\,dx,\\
\int d^2u\int^2 v\,dx &= d^2u\int^3 v\,dx - \int d^3u\int^3 v\,dx,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\int d^m u\int^m v\,dx &= d^m u\int^{m+1} v\,dx - \int d^{m+1}u\int^{m+1} v\,dx,
\end{aligned}$$

wo man jede Formel aus der vorhergehenden erhält, indem man $\frac{du}{dx}$ statt u, und $\int v\,dx$ statt v setzt. Hieraus folgt sogleich:

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - du\int^2 v\,dx + d^2u\int^3 v\,dx - \ldots\ldots (-1)^m d^m u\int^{m+1} v\,dx$$
$$+ (-1)^{m+1}\int d^{m+1}u\int^{m+1} v\,dx.$$

Setzt man $u = x^m$, $v = \varphi(x)$, so erhält man hieraus:

$$\int x^m\varphi(x)\,dx = x^m\int\varphi(x)\,dx - m x^{m-1}\int^2\varphi(x)\,dx^2 + m(m-1)\,x^{m-2}\int^3\varphi(x)\,dx^3$$
$$- \ldots\ldots (-1)^m\, m(m-1)\,(m-2)\ldots\ldots 1\int^{m+1}\varphi(x)\,dx^{m+1}.$$

Giebt man dem m nach einander die Werthe $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n-1$, so erhält man:

$\int\varphi(x)\,dx$

$\int\varphi(x)dx \quad = \int\varphi(x)dx,$
$\int x\varphi(x)dx = x\int\varphi(x)dx - \int^2\varphi(x)dx^2,$
$\int x^2\varphi(x)dx = x^2\int\varphi(x)dx - 2x\int^2\varphi(x)dx^2 + 2\int^3\varphi(x)dx^3,$
. . . .
$\int x^{n-1}\varphi(x)dx = x^{n-1}\int\varphi(x)dx - (n-1)x^{n-2}\int^2\varphi(x)dx^2 + (n-1)(n-2)x^{n-3}\int^3\varphi(x)dx^3$
$- \ldots\ldots (-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1\int^n\varphi(x)dx^n.$

Diese Formeln sind bekannt. Man sieht aus ihnen, dafs wenn $\int\varphi(x)dx$ $\int x\varphi(x)dx$, $\int x^2\varphi(x)dx$, ..., $\int x^{n-1}\varphi(x)dx$, zwischen gewissen Grenzen verschwinden sollen, zwischen denselben Grenzen auch $\int\varphi(x)dx$, $\int^2\varphi(x)dx^2$, $\int^3\varphi(x)dx^3$, ..., $\int^n\varphi(x)dx^n$ verschwinden müssen, und umgekehrt.

5.

Unsere Aufgabe ist also jetzt darauf zurückgeführt, die Function $\varphi(x)$ so zu bestimmen, dafs ihr 1ten, 2ten, 3ten, ..., n^{tes} Integral, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, verschwinden; d. h., wenn man die aufeinanderfolgenden Integrale bis zum n^{ten} so bestimmt, dafs sie für $x = 0$ verschwinden, so sollen sie auch für $x = 1$ verschwinden.

Man setze $\int^n\varphi(x)dx^n = \Pi(x)$, die aufeinander folgenden Integrale so bestimmt, dafs jedes für $x = 0$ verschwindet, so kann man jetzt die Aufgabe so ausdrücken, eine Function $\Pi(x)$ zu finden, die für $x = 0$ und für $x = 1$, zugleich mit ihrem 1ten, 2ten, 3ten, ..., $(n-1)^{\text{ten}}$ Differentiale verschwindet. Dieses erheischt, dafs die Function $\Pi(x)$ die Factoren x^n und $(x-1)^n$ habe, und umgekehrt, jede Function, die den Factor $x^n(x-1)^n$ hat, erfüllt die verlangten Bedingungen. Es mufs daher gesetzt werden $\Pi(x) = x^n(x-1)^n M$. Da nun $\varphi(x) = (x-a')(x-a'')(x-a''')\ldots\ldots(x-a^{(n)})$, also eine ganze rationale Function von der n^{ten} Ordnung ist, so ist $\Pi(x) = \int^n\varphi(x)dx^n$ eine ganze rationale Function von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung, woraus folgt, dafs M für unsern Fall eine Constante ist. Auf diese Weise erhält man $\varphi(x) = \dfrac{M d^n x^n (x-1)^n}{dx^n} =$

$$x^n - \frac{n^2}{2n}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2.2n(2n-1)}x^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)}x^{n-3}$$
$$+ \ldots\ldots (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1}{2n(2n-1)(2n-2)\ldots\ldots(n+1)},$$

wo $M = \dfrac{1}{2n(2n-1)(2n-2).(m+1)}$ gesetzt worden ist.

Die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$, für $\varphi(x)$ den eben gefundenen Ausdruck gesetzt, geben dann die Gröfsen $a', a'', a''', \ldots\ldots, a^{(n)}$, so bestimmt,

dafs der Grad der Näherung der möglichst gröfste sei. Da aus der Lehre von den Gleichungen bekannt ist, dafs wenn die Wurzeln einer Gleichung $\Pi(x) = 0$ alle reel sind, auch alle Wurzeln einer Gleichung $\frac{d^m \Pi(x)}{dx^m} = 0$ reël sind, und zwischen den Wurzeln jener Gleichung liegen, so folgt hieraus, da die Wurzeln der Gleichung $\Pi(x) = 0$, oder der Gleichung $x^n(x-1)^n = 0$ alle reel sind, und zwar n von ihnen $= 0$, die anderen $= 1$, dafs auch die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$, oder die Gröfsen α', α'', α''', ..., $\alpha^{(n)}$ alle reel sind, und zwischen 0 und 1 liegen; wie es auch Gaufs in den berechneten Beispielen gefunden hat. —

6.

In unserer, (§ 4) gefundenen Formel:

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - du\int^2 v\,dx + d^2u\int^3 v\,dx - \ldots\ldots (-1)^m d^m u \int^{m+1} v\,dx$$
$$- (-1)^{m+1}\int d^{m+1}u \int^{m+1} v\,dx,$$

setze man $m = n - 1$, $u = V$, $v = \varphi x$, so erhält man, da die n ersten Integrale von $v = \varphi x$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ verschwinden, und

$$\int^n \varphi(x)\,dx^n = \frac{x^n(x-1)^n}{2n(2n-1)\ldots\ldots(n+1)},$$

$$\Delta = \int \varphi(x) V\,dx = \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)(2n-2)\ldots.(n+1)}\int x^n(x-1)^n \frac{d^n V}{dx^{n-1}},$$

welches Integral zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ zu nehmen ist.

Man setze ferner in der angeführten Formel $u = t^{m+1}$, und es verschwinde t für $x = l$, so wird auch u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, ..., $\frac{d^m u}{dx^m}$, für $x = l$, verschwinden. Es seyen ferner die Integrale $\int v\,dx$, $\int^2 v\,dx^2$, $\int^3 v\,dx^3$, ...,$\int^{m+1} v\,dx^{m+1}$ so genommen, dafs sie insgesammt für $x = 0$ verschwinden; so verschwinden $u\int v\,dx$, $du\int^2 v\,dx$, $d^2u\int^3 v\,dx$, ..., $d^m u\int^{m+1} v\,dx$, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l$. Man erhält demnach, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l$,

$$\int uv\,dx = \int t^{m+1} v\,dx = (-1)^{m+1}\int d^{m+1} t^{m+1} \int^{m+1} v\,dx.$$

Setzt man jetzt $t = 1 - x$, $l = 1$, $m = n - 1$, $v = x^n \frac{d^n V}{dx^n}$, so erhält man, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$:

$$\int (1-x)^n x^n \frac{d^n V}{dx^{n-1}} = 1.2.3\ldots.n\int\int^n x^n \frac{d^n V}{dx^n} dx^{n+1} = 1.2.3\ldots.n\int^{n+1} x^n d^n V dx.$$

Man erhält auf diese Weise:

$$\Delta = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}{2n(2n-1)\ldots\ldots(n+1)} \int^{n+1} x^n d^n V dx,$$

wo die auf einander folgenden Integrale so zu nehmen sind, dafs sie für $x = 0$ verschwinden, und, nach beendigter Integration, $x = 1$ zu setzen ist. Unter dieser Form ist der Fehler Δ am leichtesten zu berechnen.

7.

Vermöge des (§ 2) findet man $\frac{d^n V}{dx^n} =$

$$\begin{aligned}
& a^{(2n)}\, n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1 A' \\
& + a^{(2n+1)}\Big((n+1)n(n-1)\ldots\ldots 2A'x + n(n-1)(n-2)\ldots\, 1A''\Big) \\
& + a^{(2n+2)}\Big((n+2)(n+1)n\ldots\ldots 3A'x^2 + (n+1)n(n-1)\ldots 2A''x + n(n-1)(n-2)\ldots 1A'''\Big) \\
& + a^{(2n+3)}\Big((n+3)(n+2)(n+1)\ldots 4A'x^3 + (n+2)(n+1)n\ldots 3A''x^2 + (n+1)n(n-1)\ldots 2A'''x \\
& \qquad + n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1A^{IV}\Big)
\end{aligned}$$

u. s. w.

Hieraus ergiebt sich $\Delta =$

$$\frac{1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots n^2}{(n+1)^2(n+2)^2\ldots(2n)^2(2n+1)} \left\{ \begin{aligned}
& a^{(2n)} A' + a^{(2n+1)}\left(\frac{(n+1)^2}{2n+2} A' + A''\right) + \\
& a^{(2n+2)}\left(\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{1.2.(2n+2)(2n+3)} A' + \frac{(n+1)^2}{2n+2} A'' + A'''\right) + \\
& a^{(2n+3)}\left(\frac{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2}{1.2.3.(2n+2)(2n+3)(2n+4)} A' + \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{1.2.(2n+2)(2n+3)} A'' \right. \\
& \qquad \left. + \frac{(n+1)}{2n+2} A''' + A^{IV}\right) \\
& \text{u. s. w.}
\end{aligned} \right\}$$

Diese ersten Glieder des Fehlers Δ können zur Correctur dienen. Die Gröfsen A', A'', A''', A^{IV} u. s. w. bilden eine wiederkehrende Reihe, da sie aus der Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{\varphi(x)} =$

$$\frac{1}{x^n - \frac{n^2}{2n} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2.2n(2n-1)} x^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)} x^{n-3} + \ldots (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}}$$

entstanden sind, welche wir (§ 2)

$$\frac{A'}{x^n} + \frac{A''}{x^{n+1}} + \frac{A'''}{x^{n+2}} + \frac{A^{IV}}{x^{n+3}} + \text{u. s. w.}$$

gesetzt hatten. Sie werden durch die Gleichungen gefunden:

$1 = A'$,

$0 = A' \frac{n^2}{2n} - A''$,

$0 = A' \frac{n^2(n-1)^2}{1.2.2n(2n-1)} - A'' \frac{n^2}{2n} + A'''$,

$0 = A' \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)} - A'' \frac{n^2(n-1)^2}{1.2.2n(2n-1)} + A''' \frac{n^2}{2n} - A^{IV}$

u. s. w.

Diese Resultate stimmen genau mit den von Gauſs gefundenen überein. —

28.

Die unbestimmt scheinenden Werthe einiger Functionen zu finden.

(Von Herrn *Louis Olivier.*)

Wenn p und q beliebige Functionen von x sind, und es ist:

$$z = \frac{p}{q},$$

so ist der Werth von z, welcher, wenn p und q für irgend einen Werth von x beide zugleich verschwinden, unbestimmt zu seyn scheint, bekanntlich gleich $\frac{dp}{dq}$, sofern die Differentiale nicht unendlich, und nicht etwa ebenfalls Null sind.

Man kann den Fall, wenn p und q für irgend einen Werth von x beide zugleich unendlich sind, in welchem Falle der Werth von z ebenfalls unbestimmt zu seyn scheint, auf den vorigen bringen. Es ist nemlich $\frac{p}{q} = \frac{1}{q} : \frac{1}{p}$, und in diesem Bruche sind $\frac{1}{q}$ und $\frac{1}{p}$ beide zugleich Null, wenn p und q beide zugleich unendlich sind. Der Werth von z ist also $= d\left(\frac{1}{q}\right) : d\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{dq}{q^2} : \left(-\frac{dp}{p^2}\right) = \frac{p^2 dq}{q^2 dp}$, das heiſst: es ist $\frac{p}{q} = \frac{p^2 dq}{q^2 dp}$, wenn p und q beide zugleich,

für irgend einen Werth von x unendlich sind. Daraus folgt:

$$\frac{p}{q} = \frac{dp}{dq} = z.$$

Also ist $z = \frac{dp}{dq}$ für p und $q = \infty$.

Sind etwa in dem Bruch $\frac{dp}{dq}$, Zähler und Nenner wieder beide zugleich unendlich, so kann man mit dem Bruch $\frac{dp}{dq}$ von Neuem so verfahren, wie vorhin mit $\frac{p}{q}$.

Es sey z. B. $p = \log x$, $q = x$, so sind p und q beide unendlich, für $x = \infty$, also ist $\frac{\log x}{x} = \frac{d \,.\log x}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$, für $x = \infty$.

Es sey $p = a^x$, $q = x$, so sind p und q ebenfalls beide unendlich für $x = \infty$, insofern $a > 1$ ist. Also ist $\frac{a^x}{x} = \frac{d(a^x)}{dx} = a^x \log a = a^\infty \log a = \infty$, für $x = \infty$.

Von der Function

$$z = p^q,$$

deren Werth ebenfalls unbestimmt zu seyn scheint, wenn $p = \infty$ und $q = 0$, oder wenn $p = 0$, $q = \infty$, oder wenn $p = 1$ und $q = \infty$ ist, kann man den Werth im unbestimmt scheinenden Falle mit Hülfe desjenigen eines **Bruches** finden. Es ist nemlich $\log z = q \log p = \log p : \frac{1}{q}$, also

$$z = e^{(\log p) : \frac{1}{q}}.$$

Ist also $p = \infty$, $q = 0$, so ist der Bruch $(\log p) : \left(\frac{1}{q}\right) = \frac{\infty}{\infty}$, also, dem Obigen zufolge, sein Werth $= -\frac{dp}{p} : \frac{dq}{q^2} = \frac{-q^2 dp}{p dq}$, folglich:

$$z = e^{\frac{-q^2 dp}{p dq}}.$$

Ist $p = 0$, $q = \infty$, so ist $(\log p) : \left(\frac{1}{q}\right) = \frac{-\infty}{0} = -\infty$, also

$$z = e^{-\infty} = 0.$$

Ist $p = 1$, $q = \infty$, so ist der Bruch $(\log p) : \left(\frac{1}{q}\right) = \frac{0}{0}$, also sein Werth $= -\frac{dp}{p} : \frac{1}{q^2} = -\frac{q^2 dp}{p\,dq}$, und wie vorhin:

$$z = e^{-\frac{q^2 dp}{p\,dq}}.$$

Es sey z. B. $p = x$, $q = \frac{1}{x}$, so ist $p = \infty$, $q = 0$, für $x = \infty$, also vermöge des ersten Falles, $z = e^{+\frac{1}{x^2} : x \cdot \frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$. Also ist:

$$x^{\frac{1}{x}} = 1, \text{ für } x = \infty.$$

Es sey $p = \log x$, $q = \frac{1}{x}$, so ist $p = \infty$, $q = 0$, für $x = \infty$, also wiederum vermöge des ersten Falles:

$$z = e^{+\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} : \log x \cdot \frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x \log x}} = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^0 = 1.$$

Also ist

$$(\log x)^{\frac{1}{x}} = 1, \text{ für } x = \infty.$$

Es sey $p = \frac{1}{x}$, $q = x$, so ist $p = 0$, $q = \infty$, für $x = \infty$. Also ist, vermöge des zweiten Falles,

$$\left(\frac{1}{x}\right)^x = 0, \text{ für } x = \infty.$$

Es sey $p = 1 + \frac{a}{x}$, $q = nx$, so ist $p = 1$, $q = \infty$, für $x = \infty$. Also ist, vermöge des dritten Falles,

$$z = e^{-n^2x^2 \cdot -\frac{a}{x^2} : \left(1 + \frac{a}{x}\right)^n} = e^{\frac{na}{1 + \frac{a}{x}}} = e^{na}.$$

Also ist

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}, \text{ für } x = \infty.$$

29.

Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m.(m-1)}{1\;.\;2}.x^2+\frac{m.(m-1).(m-2)}{1\;.\;2\;.\;3}.x^3+\ldots\ldots \text{ u. s. w.}$$

(Von Herrn *N. H. Abel.*)

1.

Untersucht man das Raisonnement, dessen man sich gewöhnlich bedient, wo es sich um unendliche Reihen handelt, genauer, so wird man finden, dafs es im Ganzen wenig befriedigend, und dafs also die Zahl derjenigen Sätze von unendlichen Reihen, die als streng begründet angesehen werden können, nur sehr geringe ist. Man wendet gewöhnlich die Operationen der Analysis auf die unendlichen Reihen eben so an, als wären die Reihen endlich. Dieses scheint mir ohne besonderen Beweis nicht erlaubt. Sind z. B. zwei Reihen mit einander zu multipliciren, so setzt man

$$(u_0+u_1+u_2+u_3+\text{u. s. w.})\,(v_0+v_1+v_2+v_3+\text{u. s. w.})$$
$$=u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_2)+\text{u. s. w.}$$
$$\ldots\ldots+(u_0v_n+u_1v_{n-1}+u_2v_{n-2}+\ldots\ldots+u_nv_0)+\text{u. s. w.}$$

Diese Gleichung ist vollkommen richtig, wenn die beiden Reihen

$$u_0+u_1+\ldots\ldots \text{ und } v_0+v_1+\ldots\ldots$$

endlich sind. Sind sie aber unendlich, so müssen sie erstlich nothwendig convergiren, weil eine divergirende Reihe keine Summe hat, und dann mufs auch die Reihe im zweiten Gliede ebenfalls convergiren. Nur mit dieser Einschränkung ist der obige Ausdruck richtig. Irre ich nicht, so ist diese Einschränkung bis jetzt nicht berücksichtigt worden. Es soll in gegenwärtigem Aufsatze geschehen. Eben so sind eine Menge ähnlicher Operationen zu rechtfertigen nöthig, z. B. das gewöhliche Verfahren, eine Gröfse durch eine unendliche Reihe zu dividiren, eine unendliche Reihe zu einer Potenz zu erheben, den Logarithmus, den Sinus, Cosinus davon zu nehmen, u. s. w.

Ein anderes Verfahren, welches man häufig in der Analysis antrifft, und welches nur zu oft auf Widersprüche führt, ist das: divergirende Reihen zur Berechnung numerischer Werthe von Reihen zu gebrauchen. Eine divergirende Reihe kann nie einer bestimmten Gröfse gleich sein: sie ist blos ein Ausdruck, mit gewissen Eigenschaften, die sich auf die Operationen beziehen, denen die

Reihe unterworfen ist. Die divergirenden Reihen können zuweilen mit Nutzen als Symbole dienen, diese oder jene Sätze kürzer auszudrücken; aber man darf sie nie an die Stelle bestimmter Gröfsen setzen. Thut man es, so kann man beweisen, was man will: Unmöchliches sowohl als Mögliches.

Eine der merkwürdigsten Reihen der algebraischen Analysis ist folgende:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\;.\;2}x^2+\frac{m.(m-1)(m-2)}{1\;.\;2\;\;.\;\;3}x^3+\ldots..+\frac{m(m-1)\ldots.m-(n-1)}{1\;.\;2\;\ldots\ldots\ldots.\;n}x^n$$

u. s. w.

Ist m eine ganze, positive Zahl, so läfst sich die Summe dieser Reihe, welche in diesem Falle endlich ist, bekanntlich durch $(1+x)^m$ ausdrücken. Ist m keine ganze Zahl, so geht die Reihe in's Unendliche fort, und sie wird convergiren oder divergiren, je nachdem die Gröfsen m und x diese oder jene Werthe haben. In diesem Falle setzt man nun ebenfalls die Gleichung

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}.x+\frac{m.(m-1)}{1\;.\;2}.x^2+\text{u. s. w.}\ldots\ldots;$$

aber dann drückt die Gleichheit weiter nichts aus, als dafs die beiden Ausdrücke

$$(1+x)^m,\; 1+\frac{m}{1}.x+\frac{m.(m-1)}{1\;.\;2}.x^2+\ldots\ldots$$

gewisse Eigenschaften gemein haben, von welchen, für gewisse Werthe von m und x, die numerische Gleichheit der Ausdrücke abhängt. Man nimmt an, dafs die numerische Gleichheit immer Statt finden werde, wenn die Reihe convergent ist; dies ist aber bis jetzt noch nicht bewiesen worden. Es sind selbst nicht alle Fälle untersucht worden, wo die Reihe convergent ist. Selbst wenn man die Existenz der obigen Gleichung voraussetzte, müfste dennoch der Werth von $(1+x)^m$ gesucht werden; denn der Ausdruck hat im Allgemeinen unendlich viele verschiedene Werthe, während die Reihe $1+mx+$ u. s. w. nur einen einzigen hat.

Der Zweck dieser Abhandlung ist, die Ausfüllung einer Lücke zu versuchen, und zwar durch die vollständige Auflösung folgenden Problems:

„Die Summe der Reihe

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\;.\;2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\;.\;2\;\;.\;\;3}x^3+\text{u. s. w.}$$

„für alle diejenigen reellen oder imaginairen Werthe von x und m zu finden, „für welche die Reihe convergirt."

II.

Wir wollen zuerst einige nothwendige Sätze über die Reihen aufstellen.

Die

Die vortreffliche Schrift von *Cauchy* „*Cours d'analyse de l'école polytechnique*", welche von jedem Analysten gelesen werden sollte, der die Strenge bei mathematischen Untersuchungen liebt, wird uns dabei zum Leitfaden dienen.

Erklärung. Eine beliebige Reihe

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_m \text{ u. s. w.}$$

soll convergent heifsen, wenn, für stets wachsende Werthe von m, die Summe $v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_m$ sich immerfort einer gewissen Gränze nähert. Diese Grenze soll Summe der Reihe heifsen. Im entgegengesetzten Falle soll die Reihe divergent heifsen, und hat alsdann keine Summe. Aus dieser Erklärung folgt, dafs, wenn eine Reihe convergiren soll, es nothwendig und hinreichend sein wird, dafs, für stets wachsende Werthe von m, die Summe $v_m + v_{m+1} + \ldots\ldots + v_{m+n}$ sich Null immerfort nähert, welchen Werth auch n haben mag.

In irgend einer beliebigen Reihe wird also das allgemeine Glied v_m sich Null stets nähern *).

Lehrsatz I. Wenn man durch $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \ldots\ldots$ eine Reihe positiver Gröfsen bezeichnet, und der Quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$ für stets wachsende Werthe von m, einer Grenze α sich nähert, die gröfser ist als 1: so wird die Reihe

$$\varepsilon_0 \varrho_0 + \varepsilon_1 \varrho_1 + \varepsilon_2 \varrho_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_m \varrho_m + \ldots\ldots,$$

worin ε_m eine Gröfse ist, die für stets wachsende Werthe von m, sich Null nicht nähert, nothwendig divergiren.

Lehrsatz II. Wenn in einer Reihe von positiven Gröfsen, wie $\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 \ldots\ldots + \varrho_m$, der Quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, für stets wachsende Werthe von m, sich einer Grenze α nähert, welche kleiner ist als 1, so wird die Reihe

$$\varepsilon_0 \varrho_0 + \varepsilon_1 \varrho_1 + \varepsilon_2 \varrho_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_m \varrho_m,$$

worin ε_0, ε_1, ε_2 u. s. w. Gröfsen sind, die die Einheit nicht übersteigen, nothwendig convergiren.

In der That kann man, der Voraussetzung zufolge, m immer grofs genug annehmen, dafs $\varrho_{m+1} < \alpha\varrho_m$, $\varrho_{m+2} < \alpha\varrho_{m+1}, \ldots\ldots \varrho_{m+n} < \alpha\varrho_{m+n-1}$ ist. Hieraus folgt $\varrho_{m+k} < \alpha^k . \varrho_m$, und mithin

$$\varrho_m + \varrho_{m+1} + \ldots\ldots + \varrho_{m+n} < \varrho_m (1 + \alpha + \ldots\ldots + \alpha^n) < \frac{\varrho_m}{1-\alpha},$$

*) Anmerkung. Der Kürze wegen soll in dieser Abhandlung unter ω eine Gröfse verstanden werden, die kleiner sein kann, als jede gegebene, noch so kleine Gröfse.

und folglich um so mehr

$$\varepsilon_m \varrho_m + \varepsilon_{m+1} \varrho_{m+1} + \ldots\ldots + \varepsilon_{m+n} \varrho_{m+n} < \frac{\varrho_m}{1-\alpha}.$$

Da aber $\varrho_{m+k} < \alpha^k \varrho_m$ und $\alpha < 1$; so ist klar, dafs sich ϱ_m, und folglich auch die Summe

$$\varepsilon_m \varrho_m + \varepsilon_{m+1} \varrho_{m+1} + \ldots\ldots + \varepsilon_{m+n} \varrho_{m+n}$$

Null nähern wird.

Folglich ist die obige Reihe convergent.

Lehrsatz III. Bezeichnet man durch t_0, t_1, t_2 ...... t_m eine Reihe von beliebigen Gröfsen, und die Gröfse $p_m = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots\ldots + t_m$ ...... ist stets kleiner als eine bestimmte Gröfse δ; so hat man

$$r = \varepsilon_0 t_0 + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + \ldots\ldots \varepsilon_m t_m < \delta \cdot \varepsilon_0,$$

wo ε_0, ε_1, ε_2 positive, abnehmende Gröfsen bezeichnen.

In der That ist

$$t_0 = p_0,\ t_1 = p_1 - p_0,\ t_2 = p_2 - p_1, \text{ u. s. w.},$$

also

$$r = \varepsilon_0 p_0 + \varepsilon_1 (p_1 - p_0) + \varepsilon_2 (p_2 - p_1) + \ldots\ldots + \varepsilon_m (p_m - p_{m-1}),$$

oder auch

$$r = p_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + p_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \ldots\ldots + p_{m-1}(\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1}) + p_m \varepsilon_m.$$

Da aber $\varepsilon_0 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, ... positiv sind, so ist die Gröfse r offenbar kleiner als $\delta \cdot \varepsilon_0$.

Erklärung. Eine Function $f(x)$ soll **stetige Function** von x, zwischen den Grenzen $x = o$, $x = b$ heifsen, wenn für einen beliebigen Werth von x, zwischen diesen Grenzen, die Gröfse $f(x - \beta)$ sich für stets abnehmende Werthe von β, der Grenze $f(x)$ nähert.

Lehrsatz IV. Wenn die Reihe

$$f(\alpha) = v_0 + v_1 \alpha + v_2 \alpha^2 + \ldots\ldots + v_m \alpha^m + \ldots\ldots$$

für einen gewissen Werth δ von α convergirt, so wird sie auch für jeden **kleineren** Werth von α convergiren, und von der Art seyn, dafs $f(\alpha - \beta)$, für stets abnehmende Werthe von β, sich der Grenze $f(\alpha)$ nähert, vorausgesezt, dafs α gleich oder kleiner ist als δ.

Es sey

$$v_0 + v_1 \alpha + \ldots\ldots + v_{m-1} \alpha^{m-1} = \varphi(\alpha),$$
$$v_m \alpha^m + v_{m+1} \alpha^{m+1} + \text{u. s. w.} \ldots\ldots = \psi(\alpha),$$

so ist

$$\psi(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \cdot v_m \delta^m + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} \cdot v_{m+1} \delta^{m+1} + \text{u. s. w.},$$

folglich, vermöge des Lehrsatzes (III.), $\psi(\alpha) < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \cdot p$, wenn p die gröfste der Gröfsen $v_m \delta^m$, $v_m \delta^m + v_{m+1} \delta^{m+1}$, $v_m \delta^m + v_{m+1} \delta^{m+1} + v_{m+2} \delta^{m+2}$ u. s. w. bezeichnet. Mithin kann man für jeden Werth von α, der gleich oder kleiner ist, als δ, m grofs genug annehmen, dafs

$$\psi(\alpha) = \omega$$

ist. Nun ist $f(\alpha) = \varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$, also $f(\alpha) - f(\alpha - \beta) = \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha - \beta) + \omega$. Da nun $\varphi(\alpha)$ eine ganze Function von α ist, so kann man β klein genug annehmen, dafs

$$\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha - \beta) = \omega;$$

also ist auch auf gleiche Weise

$$f(\alpha) - f(\alpha - \beta) = \omega,$$

wodurch der Lehrsatz bewiesen wird.

Lehrsatz V. Es sei

$$v_0 + v_1 \delta + v_2 \delta^2 + \ldots\ldots \text{u. s. w.},$$

eine Reihe, in welcher v_0, v_1, v_2 continuirliche Functionen einer und derselben veränderlichen Gröfse x sind, zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$, so ist die Reihe

$$f(x) = v_0 + v_1 \alpha + v_2 \alpha^2 + \ldots\ldots,$$

wo $\alpha < \beta$, convergent und eine stetige Function von x, zwischen denselben Grenzen.

Es ist schon bewiesen, dafs die Reihe $f(x)$ convergirt. Dafs die Function $f(x)$ stetig ist, läfst sich, wie folgt, beweisen.

Es sei

$$v_0 + v_1 \alpha + \ldots\ldots + v_{m-1} \alpha^{m-1} = \varphi(x),$$
$$v_m \alpha^m + v_{m+1} \alpha^{m+1} + \ldots\ldots = \psi(x),$$

so ist

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Da aber

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \cdot v_m \delta^m + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} v_{m+1} \delta^{m+1} + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+2} v_{m+2} \delta^{m+2} + \text{u. s. w.},$$

so hat man, wenn man durch $\theta(x)$ die gröfste unter den Gröfsen $v_m \delta^m$, $v_m \delta^m + v_{m+1} \delta^{m+1}$, $v_m \delta^m + v_{m+1} \delta^{m+1} + v_{m+2} \delta^{m+2}$ u. s. w. bezeichnet, vermöge des Lehrsatzes (III.):

$$\psi(x) < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \cdot \theta(x).$$

Hieraus folgt, dafs man m grofs genug nehmen kann, dafs $\psi(x) = \omega$, und also ebenso

$$f(x) = \varphi(x) + \omega,$$

wo ω kleiner ist, als jede angebbare Gröfse.

Es ist eben so

$$f(x-\beta) = \varphi(x-\beta) + \omega,$$

also

$$f(x) - f(x-\beta) = \varphi(x) - \varphi(x-\beta) + \omega.$$

Dem Ausdruck von $\varphi(x)$ zufolge ist aber klar, dafs man β klein genug annehmen kann, dafs

$$\varphi(x) - \varphi(x-\beta) = \omega, \text{ und}$$

also ebenso

$$f(x) - f(x-\beta) = \omega.$$

Also ist die Funktion $f(x)$ stetig *).

Lehrsatz VI. Bezeichnet man durch $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2$ u. s. w., $\varrho_0^1, \varrho_1^1, \varrho_2^1$ u. s. w. die Zahlenwerthe der resp. Glieder zweier convergenten Reihen

$$v^0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots = p \text{ und}$$
$$v_0^1 + v_1^1 + v_2^1 + \ldots\ldots = p^1,$$

so sind die Reihen

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots\ldots \text{ und}$$
$$\varrho_0^1 + \varrho_1^1 + \varrho_2^1 + \ldots\ldots$$

ebenfalls noch convergent, und auch die Reihe

$$r_0 + r_1 + r_2 + \ldots\ldots + r_m,$$

deren allgemeines Glied

$$r_m = v_0 v_m^1 + v_1 v_{m-1}^1 + v_2 v_{m-2}^1 + \ldots\ldots v_m v_0^1,$$

und deren Summe

---

*) Anmerkung. In der oben angeführten Schrift des Herrn *Cauchy* (Seite 131) findet man folgenden Lehrsatz:

„Wenn die verschiedenen Glieder der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots \text{ u. s. w.}$$

„Functionen einer und derselben veränderlichen Gröfse sind, und zwar stetige Functionen, „in Beziehung auf diese Veränderliche, in der Nähe eines besonderen Werthes, für welchen „die Reihe convergirt, so ist auch die Summe s der Reihe, in der Nähe jenes besonderen „Werthes, eine stetige Function von x."

Es scheint mir aber, dafs dieser Lehrsatz Ausnahmen leidet. So ist z. B. die Reihe

$$\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\sin 3\varphi - \ldots\ldots \text{ u. s. w.}$$

unstetig für jeden Werth $(2m+1)\pi$ von x, wo m eine ganze Zahl ist. Bekanntlich giebt es eine Menge von Reihen mit ähnlichen Eigenschaften.

$$(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots) \times (v'_0 + v'_1 + v'_2 + \ldots\ldots)$$

ist, wird convergent seyn.

Beweis. Setzt man

$$p_m = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_m,$$
$$p'_m = v'_0 + v'_1 + \ldots\ldots + v'_m,$$

so sieht man leicht, daſs

$$\left.\begin{array}{l} r_0 + r_1 + r_2 + \ldots\ldots + r_{2m} = p_m p'_m + (p_0 v'_{2m} + p_1 v'_{2m-1} + \ldots\ldots + p_{m-1} v'_{m+1} (= t) \\ \quad + p'_0 v_{2m} + p'_1 v_{2m-1} + \ldots\ldots + p'_{m-1} v_{m+1} (= t')) \end{array}\right\} (a) \quad (= t')$$

Setzt man nun

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots\ldots = u,$$
$$\varrho'_0 + \varrho'_1 + \varrho'_2 + \ldots\ldots = u',$$

so ist klar, daſs, ohne Rücksicht auf das Zeichen,

$$t < u\,(\varrho'_{2m} + \varrho'_{2m-1} + \ldots\ldots + \varrho'_{m+1}),$$
$$t' < u'\,(\varrho_{2m} + \varrho_{2m-1} + \ldots\ldots + \varrho_{m+1}).$$

Da aber die Reihen

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots\ldots,\quad \varrho'_0 + \varrho'_1 + \varrho'_2 + \ldots\ldots$$

convergent sind, so werden sich die Gröſsen t und t', für stets zunehmende Werthe von m, der Grenze Null nähern. Setzt man also in der Gleichung (a) m unendlich groſs, so ist

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \text{u. s. w.} = (v_0 + v_1 + v_2 + \text{u. s. w.})\,(v'_0 + v'_1 + v'_2 + \text{u. s. w.}).$$

Gesetzt, t_0, t_1, t_2 u. s. w., t'_0, t'_1, t'_2 u. s. w., seyen zwei Reihen positiver und negativer Gröſsen, deren allgemeine Glieder sich der Null ohne Ende nähern, so folgt aus dem Lehrsatze (II.), daſs die Reihen

$$t_0 + t_1 \alpha + t_2 \alpha^2 + \text{u. s. w.},\quad t'_0 + t'_1 \alpha + t'_2 \alpha^2 \text{ u. s. w.},$$

worin α eine Gröſse bezeichnet, die kleiner ist als 1, convergent sein müssen. Es verhält sich eben so, wenn man jedem Gliede seinen Zahlenwerth giebt, also ist zufolge des vorhergehenden Lehrsatzes:

$$\left.\begin{array}{l} (t_0 + t_1 \alpha + t_2 \alpha^2 + \ldots\ldots)\,(t'_0 + t'_1 \alpha + t'_2 \alpha^2 + \ldots\ldots) = \\ \quad t_0 t'_0 + (t_1 t'_0 + t_0 t'_1)\,\alpha + (t_2 t'_0 + t_1 t'_1 + t_0 t'_2)\,\alpha^2 + \text{u. s. w.} \\ \ldots\ldots + (t_m t'_0 + t_{m-1} t'_1 + t_{m-2} t'_2 + \ldots\ldots + t_0 t'_m)\,\alpha^m + \text{u. s. w.} \end{array}\right\} (b.)$$

Nimmt man nun an, daſs die drei Reihen

$$t_0 + t_1 + t_2 + \text{u. s. w.},$$
$$t_0 + t'_1 + t'_2 + \text{u. s. w.} \quad \text{und}$$
$$t_0 t'_0 + (t_1 t'_0 + t_0 t'_1) + (t_2 t'_0 + t_1 t'_1 + t_0 t'_2) + \text{u. s. w.}$$

convergent sind, so findet man, vermöge des Lehrsatzes (IV.), wenn man in der Gleichung (b) α der Einheit sich nähern läfst:

$$(t_0+t_1+t_2+\ldots\ldots)(t'_0+t'_1+t'_2+\ldots\ldots)=$$
$$t_0t'_0+(t_1t'_0+t_0t'_1)+(t_2t'_0+t_1t'_1+t_0t'_2)+\text{u. s. w.}$$

III.

Wir wollen jetzt die gegebene Reihe

$$1+\frac{m}{1}.x+\frac{m.(m-1)}{1\;.\;2}.x^2+\ldots\ldots\ldots$$

untersuchen.

Bezeichnet man sie durch $\varphi(m)$, und setzt man, der Kürze wegen, $1=m_0$, $\frac{m}{1}=m_1$, $\frac{m.(m-1)}{1\;.\;2}=m_2$, und allgemein $\frac{m.(m-1)\ldots.(m-\mu+1)}{1\;.\;2\;\ldots\ldots.\mu}=m_\mu$, so ist:

$$1.\quad\varphi(m)=m_0+m_1x+m_2x^2+m_\mu x^\mu+\text{u. s. w.}$$

Es kommt nun zunächst darauf an, die Werthe von m und x zu finden, für welche die Reihe convergirt.

Da die Gröfsen m und x im Allgemeinen auch imaginair seyn können, so sey

$$x=a+b\sqrt{-1},\quad m=k+k'\sqrt{-1},$$

wo a, b, k, k', reelle Gröfsen sind. Substistuirt man diese Werthe in den Ausdruck (1.), so nimmt derselbe folgende Form an:

$$\varphi(m)=p+q\sqrt{-1},$$

wo p und q Reihen sind, deren Glieder reelle Werthe haben. Man kann diese Reihen, wie folgt, finden:

Es sey

$$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}=\alpha,\ \frac{a}{\alpha}=\cos\varphi,\ \frac{b}{\alpha}=\sin\varphi,$$

so ist

$$x=\alpha(\cos\varphi+\sqrt{-1}.\sin\varphi),$$

wo α und φ zwei reelle Gröfsen sind, und α aufserdem positiv ist.

Setzt man eben so

$$\frac{m-\mu+1}{\mu}=\delta_\mu.(\cos\gamma_\mu+\sqrt{-1}.\sin\gamma_\mu)=\frac{k+k'\sqrt{-1}-\mu+1}{\mu}:$$

so findet man

$$\delta_\mu=\left(\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}};\ \cos\gamma_\mu=\frac{k-\mu+1}{\mu\delta_\mu};\ \sin\gamma_\mu=\frac{k'}{\mu\delta_\mu}.$$

Setzt man in dem Ausdruck:

$$\frac{m-\mu+1}{\mu} = \delta_\mu (\cos\gamma_\mu + \sqrt{-1}\,.\,\sin\gamma_\mu)$$

μ nach und nach gleich $1, 2, 3, \ldots\ldots \mu$, so bekommt man μ Gleichungen, welche, Glied um Glied mit einander multiplicirt,

$$m_\mu = \frac{m(m-1).(m-2)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;\mu} =$$

$\delta_1 . \delta_2 . \delta_3 \ldots\ldots \delta_\mu [\cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots\ldots \gamma_\mu) + \sqrt{-1}\,.\,\sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots\ldots \gamma_\mu)]$ geben werden.

Hieraus folgt, wenn man mit

$$x^\mu = a^\mu (\cos\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi)^\mu = a^\mu (\cos\mu\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\sin\mu\varphi)$$

multiplicirt:

$$m_\mu x^m = a^\mu . \delta_1 . \delta_2 . \delta_3 \ldots\ldots \delta_\mu . \big[\cos(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots\ldots + \gamma_\mu) + \sqrt{-1}\,.\,\sin(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots\ldots + \gamma_\mu)\big],$$

oder auch, wenn man der Kürze wegen,

$$\delta_1 . \delta_2 . \delta_3 \ldots\ldots \delta_\mu = \lambda_\mu,$$

$$\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots\ldots \gamma_\mu = \theta_\mu \text{ setzt:}$$

$$m_\mu . x^\mu = \lambda_\mu . a^\mu \{\cos\theta_\mu + \sqrt{-1}\,.\,\sin\theta_\mu\}.$$

Der Ausdruck (1.) geht dadurch in

$$\varphi(m) = 1 + \lambda_1 a (\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\,.\,\sin\theta_1) + \lambda_2 a^2 (\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\,.\,\sin\theta_2) + \ldots\ldots + \lambda_\mu a^\mu (\cos\theta_\mu + \sqrt{-1}\,.\,\sin\theta_\mu) + \ldots\ldots,$$

oder in

$$\varphi(m) = 1 + \lambda_1 a . \cos\theta_1 + \lambda_2 a^2 . \cos\theta_2 + \ldots\ldots + \lambda_\mu a^\mu . \cos\theta_\mu + \text{u. s. w.} + \sqrt{-1}\,\{\lambda_1 a . \sin\theta_1 + \lambda_2 a^2 . \sin\theta_2 + \ldots\ldots + \lambda_\mu a^\mu . \sin\theta_\mu + \text{u. s. w.}\},$$

über; also ist

$$2. \begin{cases} p = 1 + \lambda_1 a . \cos\theta_1 + \lambda_2 a^2 . \cos\theta_2 + \ldots\ldots + \lambda_\mu a^\mu . \cos\theta_\mu + \ldots\ldots \\ q = \ \lambda_1 a . \sin\theta_1 + \lambda_2 a^2 . \sin\theta_2 + \ldots\ldots + \lambda_\mu a^\mu . \sin\theta_\mu + \ldots\ldots \end{cases}$$

Nun behaupte ich, daſs diese Reihen divergiren oder convergiren, je nachdem a gröſser oder kleiner als 1 ist.

Aus dem Ausdruck für λ_μ folgt $\lambda_{\mu+1} = \delta_{\mu+1} . \lambda_\mu$, also $\lambda_{\mu+1} . a^{\mu+1} = a\delta_{\mu+1} . \lambda_\mu a^\mu$, und

$$\frac{\lambda_{\mu+1} a^{\mu+1}}{\lambda_\mu a^\mu} = a\delta_{\mu+1}.$$

Es ist aber

$$\delta_{\mu+1}=\left(\left(\frac{k-\mu}{\mu+1}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu+1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

also wird sich δ_μ, für stets wachsende Werthe von μ, der Grenze 1, und folglich $\frac{\lambda_{\mu+1}\,\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\,\alpha^\mu}$ der Grenze α nähern. Mithin sind, vermöge des Lehrsatzes (I.) und (II.), im vorhergehenden Paragraph, die Reihen p und q divergent oder convergent, je nachdem α gröfser oder kleiner ist, als die Einheit. Mit der gegebenen Reihe $\varphi(m)$ verhält es sich folglich eben so.

Der Fall, wo $\alpha=1$ ist, kommt weiter unten vor.

Wenn die Reihe $\varphi(m)$, für jeden Werth von α convergirt, der kleiner ist als 1: so wird ihre Summe eine gewisse Function von m und x seyn. Man kann auf folgende Art eine Eigenschaft dieser Function aufstellen, welche dazu dienen kann, sie zu finden:

Es ist

$$\varphi(m)=m_0+m_1x+m_2x^2+\ldots\ldots+m_\mu x^\mu+\text{u. s. w.},$$
$$\varphi(n)=n_0+n_1x+n_2x^2+\ldots\ldots+n_\mu x^\mu+\text{u. s. w.},$$

wo n_μ den Werth von m_μ, für $m=n$, bezeichnet. Hieraus ergiebt sich nach dem Lehrsatz VII:

$$\varphi(m)\,.\,\varphi(n)=t_0t'_0+(t_0t'_1+t_1t'_0)+t_0t'_2+t_1t'_1+t_2t'_0)+\text{u. s. w.}$$
$$\ldots\ldots+(t_0t'_\mu+t_1t'_{\mu-1}+t_2t'_{\mu-2}+\ldots\ldots+t_\mu t'_0)+\text{u. s. w.},$$

wo $t_\mu=m_\mu x^\mu$; $t'_\mu=n_\mu x^\mu$, sobald die Reihe im zweiten Gliede convergent ist. Substituirt man die Werthe von t_μ und t'_μ, so erhält man

$$\varphi(m).\varphi(n)=m_0n_0+(m_0n_1+m_1n_0)x+(m_0n_2+m_1n_1+m_2n_0)x^2+\ldots\ldots$$
$$+(m_0n_\mu+m_1n_{\mu-1}+m_2n_{\mu-2}+\ldots\ldots+m_\mu n_0)x^\mu+\ldots\ldots$$

Nun ist, vermöge einer den Gröfsen m_μ u. s. w. gemeinsamen Eigenschaft

$$(m+n)_\mu=m_0n_\mu+m_1n_{\mu-1}+m_2n_{\mu-2}+\ldots\ldots+m_\mu n_0,$$

wo $(m+n)_\mu$ den Werth von m_μ bezeichnet, wenn man darin $m+n$ statt m setzt. Mithin erhält man durch Substitution:

$$\varphi(m).\varphi(n)=(m+n)_0+(m+n)_1x+(m+n)_2x^2+\ldots\ldots+(m+n)_\mu x^\mu+\text{u. s. w.}$$

Aber nach dem Vorhergehenden ist das zweite Glied dieser Gleichung eine convergente Reihe, und genau dasselbe wie $\varphi(m+n)$. Also ist

$$3\,.\;\varphi(m)\,.\,\varphi(n)=\varphi(m+n).$$

Diese Gleichung drückt eine Grund-Eigenschaft der Function $\varphi(m)$ aus. Wir

Wir wollen jetzt aus derselben den Ausdruck der Function in endlicher Form, vermittelst Exponential-Gröfsen, logarithmische und Kreis-Functionen, herleiten.

Wie man oben sah, ist $\varphi(m)$ von der Form $p+q\sqrt{-1}$, wo p und q stets reel, und Functionen der Gröfsen k, k^1, a und φ sind, und $m=k+k^1\sqrt{-1}$, $x=a(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi)$ ist. Man setze

$$p+q\sqrt{-1}=r(\cos s+\sqrt{-1}.\,\sin s),$$

so findet man

$$(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}=r,\ \frac{p}{r}=\cos s,\ \frac{q}{r}=\sin s,$$

wo r stets positiv und s eine reelle Gröfse ist. Man setze

$$r=f(k,k^1),\quad s=\psi(k,k^1),$$

so ist

3'. $p+q\sqrt{-1}=\varphi(k+k^1\sqrt{-1})=f(k,k^1)\left(\cos\psi(k,k^1)+\sqrt{-1}.\sin\psi(k,k^1)\right)$.

Hieraus ergiebt sich, wenn man nach und nach l und l^1, und $k+l$ und k^1+l^1 an die Stelle von k und k^1 setzt:

$$\varphi(l+l^1\sqrt{-1})=f(l,l^1)\left(\cos\psi(l,l^1+\sqrt{-1}\,.\,\sin\psi(l,l^1)\right),$$

$$\varphi\left(k+l+(k^1+l^1)\sqrt{-1}\right)=f(k+l,k^1+l^1)\,.\left(\cos\psi(k+l,k^1+l^1)\right.$$
$$\left.+\sqrt{-1}\,.\sin\psi(k+l,k^1+l^1)\right).$$

Aber vermöge des Ausdrucks $\varphi(m)\,.\,\varphi(n)=\varphi(m+n)$ ist

$$\varphi\left(k+l+(k^1+l^1)\sqrt{-1}\right)=\varphi(k+k^1\sqrt{-1})\times\varphi(l+l^1\sqrt{-1}),$$

wenn man $m=k+k^1\sqrt{-1}$, $n=l+l^1\sqrt{-1}$ setzt. Folglich erhält man durch Substitution:

$$f(k+l,k^1+l^1)\left\{\cos\psi(k+l,k^1+l^1)+\sqrt{-1}\,.\,\sin\psi(k+l,k^1+l^1)\right\}$$
$$=f(k,k^1)\,.\,f(l,l^1)\left\{\cos\left(\psi(k,k^1)+\psi(l,l^1)\right)+\sqrt{-1}\,.\sin\left(\psi(k,k^1)+\psi(l,l^1)\right)\right\}.$$

Diese Gleichung giebt, wenn man die reellen Glieder von den imaginairen absondert:

$$f(k+l,k^1+l^1)\times\cos\psi(k+l,k_1+l_1)=f(k,k_1).f(l,l_1).\cos\left\{\psi(k,k_1)+\psi(l,l_1)\right\},$$

$$f(k+l,k_1+l_1)\times\sin\psi(k+l,k_1+l_1)=f(k,k_1).f(l,l_1).\sin\left\{\psi(k,k_1)+\psi(l,l_1)\right\}.$$

Quadrirt und addirt man diese Gleichungen, so erhält man:

$$\left(f(k+l^1,k^1+l^1)\right)^2=\left(f(k,k^1)\,.\,f(l,l^1)\right)^2,$$

und hieraus:

$$4.\quad f(k+l,\,k'+l') = f(k,\,k')\,.\,f(l,\,l').$$

Vermöge dieser Gleichung gehen die obigen in folgende über:

$$\cos\psi(k+l,\,k'+l') = \cos\{\psi(k,\,k_1)+\psi(l,\,l_1)\},$$
$$\sin\psi(k+l,\,k'+l') = \sin\{\psi(k,\,k')+\psi(l,\,l')\}.$$

Diese Gleichungen geben

$$5.\quad \psi(k+l,\,k'+l') = 2m\pi+\psi(k,\,k')+\psi(l,\,l'),$$

wo m eine ganze, positive oder negative Zahl ist.

Jetzt kommt es darauf an, aus den Gleichungen (4) und (5) die Functionen $f(k,\,k')$ und $\psi(k,\,k')$ zu finden.

Zuerst behaupte ich, dafs sie stetige Functionen von k und k', zwischen beliebigen Grenzen dieser veränderlichen Gröfsen, seyn werden. In der That sind p und q, nach dem Lehrsatze (V.), offenbar stetige Functionen. Es ist aber

$$f(k,\,k') = (p^2+q^2)^{\frac{1}{2}};\ \cos\psi(k,\,k') = \frac{p}{f(k,\,k')};\ \sin\psi(k,\,k') = \frac{q}{f(k,\,k')};$$

folglich ist $f(k,\,k')$ eine stetige Funktion; eben so $\cos\psi(k,\,k')$ und $\sin\psi(k,\,k')$. Daher kann man voraussetzen, dafs es $\psi(k,\,k')$ ebenfalls ist. Wir wollen zuerst die Gleichung (5.) untersuchen. Da $\psi(k,\,k')$ eine stetige Function ist, so mufs m für alle Werthe von $k,\,k',\,l,\,l'$ denselben Werth haben. Setzt man also nach und nach $l=o$, $k=o$, so erhält man

$$\psi(k,\,k'+l') = 2m\pi+\psi(k,\,k')+\psi(o,\,l'),$$
$$\psi(l,\,k'+l') = 2m\pi+\psi(o,\,k')+\psi(l,\,l').$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen und der Gleichung (5.) die beiden Gröfsen $\psi(k,\,k')$ und $\psi(l,\,l')$, so findet man

$$\psi(k,\,k'+l')+\psi(l,\,k'+l') = 2m\pi+\psi(o,\,k')+\psi(o,\,l')+\psi(k+l,\,k'+l').$$

Der Kürze wegen sey

$$6.\quad \begin{cases}\psi(k,\,k'+l') = \theta(k),\\ 2m\pi+\psi(o,\,k')+\psi(o,\,l') = a,\end{cases}$$

so ist

$$7.\quad \theta(k)+\theta(l) = a+\theta(k+l).$$

Setzt man hierin nach und nach $l=k,\ 2k\ldots\ldots\varrho k$, so erhält man

$$2\theta(k) = a+\theta(2k),$$
$$\theta(k)+\theta(2k) = a+\theta(3k),$$
$$\theta(k)+\theta(3k) = a+\theta(4k),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\theta(k)+\theta(\varrho-1)k = a+\theta(\varrho k).$$

Addirt man diese Gleichungen, so findet man

$$\varrho\,\iota(k) = (\varrho - 1)a + \iota(\varrho k).$$

Hieraus folgt, wenn man $k = 1$ setzt,

$$\iota(\varrho) = \varrho\Big(\iota(1) - a\Big) + a,$$

oder auch, wenn man $\iota(1) - a = c$ setzt,

$$8. \quad \iota(\varrho) = c \cdot \varrho + a.$$

Diesen Werth hat also die Function $\iota(k)$, wenn k eine ganze Zahl ist. Aber die Function $\iota(k)$ wird für alle Werthe von k dieselbe Form haben, was sich leicht, wie folgt, beweisen läſst:

Setzt man in der Gleichung (7.) $k = \frac{\mu}{\varrho}$, wo μ eine ganze Zahl ist, so ist $\varrho \cdot \iota\left(\frac{\mu}{\varrho}\right) = (\varrho - 1)a + \iota(\mu)$. Aber vermöge der Gleichung (8.) ist

$$\iota(\mu) = c \cdot \mu + a.$$

Mithin findet man, wenn man substituirt und durch ϱ dividirt:

$$\iota\left(\frac{\mu}{\varrho}\right) = c \cdot \frac{\mu}{\varrho} + a.$$

Die Gleichung (8.) findet daher für alle positiven und rationalen Werthe von ϱ Statt. Gesetzt nun, l sey $= -k$, so geht die Gleichung (7.) in

$$\iota(k) + \iota(-k) = a + \iota(o)$$

über. Hieraus folgt, wenn man $k = o$ setzt:

$$\iota(o) = a, \text{ und folglich } \iota(-k) = 2a - \iota(k).$$

Ist aber k rational und positiv, so erhält man

$$\iota(k) = c \cdot k + a, \text{ also } \iota(-k) = -ck + a.$$

Die Gleichung

$$9. \quad \iota(k) = c \cdot k + a$$

findet also allgemein für alle rationalen Werthe von k, und folglich, nach dem Lehrsatze (V.), für alle reellen Werthe von k, Statt.

Nun ist $\iota(k) = \psi(k, k' + l')$ und $a = 2m\pi + \psi(o, k') + \psi(o, l')$; setzt man also $c = \iota(k', l')$, so erhält man

$$10. \quad \psi(k, k' + l') = \iota(k', l') \cdot k + 2m\pi + \psi(o, k') + \psi(o, l').$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man $k = o$ setzt,

$$\psi(o, k' + l') = 2m\pi + \psi(o, k') + \psi(o, l').$$

Da diese Gleichung dieselbe Form hat, wie die Gleichung (7.), so wird sie auf dieselbe Weise:

$$\psi(o, k') = \beta' \cdot k' - 2m\pi$$

geben, wo β' eine von k' unabhängige Gröſse ist.

Setzt man l' an die Stelle von k', so erhält man $\psi(o, l') = -2m\pi + \beta' l'$.

Substituirt man diese Werthe von $\psi(o, k')$ und $\psi(o, l')$ in die Gleichung (10.), so ergiebt sich

$$\psi(k, k'+l') = \iota(k', l').k + \beta'(k'+l') - 2m\pi.$$

Hieraus sieht man, dafs $\iota(k', l')$ eine Function von $k'+l'$ ist. Bezeichnet man sie durch $F(k'+l')$, so ist

$$\psi(k, k'+l') = F(k'+l').k + \beta'(k'+l') - 2m\pi,$$

und folglich, wenn man $l' = o$ setzt,

$$\psi(k, k') = F(k').k + \beta' k' - 2m\pi.$$

Erwägt man, dafs

$$\psi(o, l') = \beta' l' = 2m\pi,$$

so giebt die obige Gleichung

$$F(k'+l').k+\beta'(k'+l')-2m\pi = 2m\pi + F(k').k + \beta' k' - 2m\pi + \beta' l' - 2m\pi,$$

das heifst:

$$F(k'+l') = F(k').$$

Setzt man also $k' = o$, so ist $F(l') = F(o) = \beta = F(k')$. Der Werth von $\psi(k, k')$ geht also schliefslich in

$$11. \quad \psi(k, k') = \beta.k + \beta'.k' - 2m\pi$$

über, wo β und β' zwei Constanten sind. Dieser Werth von $\psi(k, k')$ wird in der That der Gleichung (5.) in seiner ganzen Allgemeinheit Genüge leisten, wie leicht zu sehen.

Jetzt wollen wir die Gleichung

$$f(k, l, k'+l') = f(k, k').f(l, l')$$

untersuchen. Da $f(k, k')$ immer eine positive Gröfse ist, so kann man immer setzen:

$$f(k, k') = e^{F(k, k')},$$

wo $F(k, k')$ eine reelle, beständige Function von k und k' bedeutet. Substituirt man, und nimmt die Logarithmen der beiden Glieder, so findet man

$$F(k+l, k'+l') = F(k, k') + F(l, l').$$

Da diese Gleichung mit der Gleichung (5.) übereinstimmt, wenn man F statt ψ, und 0 statt m setzt, so giebt sie, vermöge der Gleichung (11.):

$$12. \quad F(k, k') = \delta.k + \delta'.k',$$

wo δ und δ', eben wie β und β', zwei von k und k' unabhängige Gröfsen sind. Die Function $f(k, k')$ geht also in

$$f(k, k') = e^{\delta k + \delta' k'}$$

über. Nachdem auf diese Weise die Functionen $\psi(k, k')$ und $\psi'(k, k')$ gefunden worden, hat man, vermöge der Gleichung (3'.)

13. $\varphi(k+k'\sqrt{-1})=e^{\delta k+\delta' k'}\left[\cos(\beta k+\beta' k')+\sqrt{-1}\,.\sin(\beta k+\beta' k')\right]$,

worin noch die Gröfsen δ, δ', α, β', die nur Functionen von α und φ seyn können, gefunden werden müssen.

Es ist

$$\varphi(k-k'\sqrt{-1})=p+q\sqrt{-1},$$

wo p und q durch die Gleichungen (2.) gegeben sind. Sondert man die reellen Gröfsen von den imaginairen ab, so ist:

$$14.\ \begin{cases} e^{\delta k+\delta' k'}.\cos(\beta k+\beta' k')=1+\lambda_1\alpha\cos\theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\theta_2+\ldots+\lambda_\mu\alpha^\mu.\cos\theta_\mu+\text{u. s. w.},\\ e^{\delta k+\delta' k'}.\sin(\beta k+\beta' k')=\quad\lambda_1\alpha\sin\theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\theta_2+\ldots+\lambda_\mu\alpha^\mu.\sin\theta_\mu+\text{u. s. w.}\end{cases}$$

Wir wollen nun zuerst den Fall betrachten, wo m reell, d. h., wo $k'=0$ ist. Alsdann gehen die Ausdrücke (12.) in

$$e^{\delta k}.\cos\beta k=1+\frac{k}{1}.\alpha\cos\varphi+\frac{k.(k-1)}{1\,.\,2}\alpha^2\cos2\varphi+\frac{k.(k-1).(k-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3\cos3\varphi+\text{u. s. w.}=f(\alpha),$$

$$e^{\delta k}.\sin\beta k=\quad\frac{k}{1}.\alpha\sin\varphi+\frac{k.(k-1)}{1\,.\,2}\alpha^2\sin2\varphi+\frac{k.(k-1).(k-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3\sin3\varphi+\text{u. s. w.}=\theta(\alpha)$$

über. Um δ und β zu finden, setze man $k=1$, so erhält man:

$$e^\delta\cos\beta=1+\alpha\cos\varphi;\quad e^\delta\sin\varphi=\alpha\sin\varphi.$$

Hieraus folgt:

$$e^\delta=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\beta=\frac{1+\alpha\cos\varphi}{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \sin\beta=\frac{\alpha\sin\varphi}{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}.$$

Die letzte dieser Gleichungen giebt, wenn man durch s den kleinsten aller Werthe von β bezeichnet, welcher ihr genug thut, und welcher immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen wird,

$$\beta=s+\mu\pi,$$

wo μ eine ganze positive oder negative Zahl ist.

Daher gehen die Gleichungen (15.) in

$$f(\alpha)=e^{\delta k}.\cos k(s+\mu\pi)=e^{\delta k}.\cos ks.\cos k\mu\pi-e^{\delta k}.\sin ks.\sin k\mu\pi,$$

$$\theta(\alpha)=e^{\delta k}.\sin k(s+\mu\pi)=e^{\delta k}.\sin ks.\cos k\mu\pi+e^{\delta k}.\cos ks.\cos k\mu\pi$$

über. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\cos k\mu\pi = e^{-\delta k}\left(f(\alpha)\,.\,\cos ks + \varphi(\alpha)\,.\,\sin ks\right),$$
$$\sin k\mu\pi = e^{-\delta k}\left(\varphi(\alpha)\,.\,\cos ks + f(\alpha)\,.\,\sin ks\right).$$

Aber nach dem Lehrsatz (IV.) sind $\varphi(\alpha)$ und $f(\alpha)$ stetige Functionen von α, es müssen also $\cos k\mu\pi$ und $\sin k\mu\pi$ die nemlichen Werthe für alle Werthe von α behalten. Daher ist es, um sie zu finden, hinreichend, α einen beliebigen Werth beizulegen. Es sey α gleich 0, so erhält man, wenn man erwägt, dafs alsdann $e^{\delta}=1$, $f(\alpha)=1$, $\varphi(\alpha)=0$, $s=0$ ist:

$$\cos k\mu\pi = 1,\ \sin k\mu\pi = 0.$$

Substituirt man diese Werthe in die Ausdrücke von $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$, und erinnert sich, dafs $e^{\delta}=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, so erhält man:

$f(\alpha)=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\,.\cos ks$; $\varphi(\alpha)=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\,.\sin ks$.

Die Ausdrücke (15.) gehen also schliefslich über in:

$$1+\frac{k}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{k.(k-1)}{1\ .\ 2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{k.(k-1).k-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\alpha^3\cos 3\varphi+\text{u. s. w.}$$
$$=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\,.\cos ks,$$
$$\frac{k}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{k.(k-1)}{1\ .\ 2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{k.(k-1).k-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\alpha^3\sin 3\varphi+\text{u. s. w.}$$
$$=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\,.\sin ks,$$

wo s eine zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ enthaltene Gröfse ist, welche der Gleichung

$$\tang s=\frac{\alpha\,.\,\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}$$

genugthut.

Die Ausdrücke (16.) sind zuerst von *Cauchy* in der oben angeführten Schrift aufgestellt worden.

Die Gröfse α ist hier kleiner als 1 angenommen. Weiter unten wird sich zeigen, dafs auch $\alpha=1$ seyn kann, wenn die Gröfse k einen angemessenen Werth bekommt.

In dem Vorhergehenden haben wir die Gröfsen δ und β gefunden. Jetzt wollen wir zeigen, wie sich die beiden anderen unbekannten Gröfsen δ' und β' finden lassen. Setzt man zu dem Ende in (15.) $k=0$ und $k'=n$, so erhält man

$$e^{\delta' n}\,.\cos(\beta' n)=1+\lambda_1\alpha\cos\theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\theta_2+\text{u. s. w.},$$
$$e^{\delta' n}\,.\sin(\beta' n)=\qquad\lambda_1\alpha\sin\theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\theta_2+\text{u. s. w.},$$

wo

$$\lambda_\mu = \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \delta_3 \ldots\ldots \delta_\mu,\ \theta_\mu = \mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots\ldots + \gamma_\mu$$

ist, und δ_μ und γ_μ durch die Gleichungen

$$\delta_\mu = \left(\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{n}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad \cos\gamma_\mu = -\frac{\mu-1}{\mu\delta_\mu},\quad \sin\gamma_\mu = \frac{n}{\mu\delta_\mu}$$

bestimmt sind.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende:

$$\frac{e^{\delta^1 n} \cdot \cos(\beta^1 n) - 1}{n} = \frac{\lambda_1}{n} \cdot a\cos\theta_1 + \frac{\lambda_2}{n} a^2 \cos\theta_2 + \ldots\ldots,$$

$$\frac{e^{\delta^1 n} \cdot \sin(\beta^1 n)}{n} = \frac{\lambda_1}{n} \cdot a\sin\theta_1 + \frac{\lambda_2}{n} a^2 \sin\theta_2 + \ldots\ldots$$

Man hat aber, unter der Voraussetzung, daſs n positiv ist: $\lambda_1 = \delta_1 = n$, also $\frac{\lambda\mu}{n} = \delta_2 \cdot \delta_3 \ldots\ldots \delta_\mu$, folglich

$$\frac{e^{\delta^1 n} \cdot \cos(\beta^1 n) - 1}{n} = a\cos\theta_1 + \delta_2 a^2 \cos\theta_2 + \delta_2\delta_3 a^3 \cos\theta_3 + \ldots\ldots,$$

$$\frac{e^{\delta^1 n} \cdot \sin\beta^1 n}{n} = a\sin\theta_1 + \delta_2 a^2 \sin\theta_2 + \delta_2\delta_3 a^3 \sin\theta_3 + \ldots\ldots$$

Diese Reihen convergiren für jeden Werth von n, Null mitbegriffen, wie aus dem Lehrsatze (II.) leicht zu sehen. Läſst man daher n sich der Grenze Null nähern, und erwägt, daſs die Reihen, nach dem Lehrsatze (V.), stetige Functionen sind, so erhält man

$$\delta^1 = a\cos\theta_1^1 + \delta_2^1 \cdot a^2 \cos\theta_2^1 + \delta_2^1\delta_3^1 a^3 \cos\theta_3^1 + \ldots\ldots,$$

$$\beta^1 = a\sin\theta_1^1 + \delta_2^1 \cdot a^2 \sin\theta_2^1 + \delta_2^1\delta_3^1 a^3 \sin\theta_3^1 + \ldots\ldots,$$

wo δ^1 und β^1 die Grenzen der Gröſsen $\frac{e^{\delta^1 n} \cdot \cos(\beta^1 n) - 1}{n}$ und $\frac{e^{\delta^1 n} \cdot \sin(\beta^1 n)}{n}$ sind. $\theta^1\mu$ ist die Grenze von $\theta\mu$, und $\delta^1\mu$ diejenige von $\delta\mu$. Nun ist, zufolge des Ausdrucks von $\delta\mu$, $\delta^1\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$; also $\cos\gamma_\mu = -1$; $\sin\gamma_\mu = 0$ (wenn $\mu > 1$), folglich:

$$\cos(\theta_\mu^1) = \cos(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots\ldots \gamma_\mu) = -\sin(\mu\varphi) \cdot (-1)^\mu,$$

$$\sin(\theta_\mu^1) = \sin(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots\ldots \gamma_\mu) = -\cos(\mu\varphi) \cdot (-1)^\mu,$$

wenn man erwägt, daſs zufolge der Gleichung

$$n\sqrt{-1} = \delta_1(\cos\gamma_1 + \sqrt{-1} \cdot \sin\gamma_1),$$

$\cos\gamma_1 = 0$, $\sin\gamma_1 = 1$ ist. Folglich werden die Werthe von β' und δ' folgende seyn:

$$\beta' = -(\alpha.\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi - \ldots\ldots),$$
$$\delta' = +(\alpha.\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi - \ldots\ldots).$$

Auf diese Weise sind nun die Gröſsen β' und δ' durch unendliche Reihen gefunden. Man kann sie aber auch in endlicher Gestalt ausdrücken. Denn aus den Gleichungen (15.) folgt

$$\frac{e^{\delta k}.\cos\beta k - 1}{k} = \alpha\cos\varphi + \frac{k-1}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2.2}\alpha^3\cos 3\varphi + \ldots,$$
$$\frac{e^{\delta k}.\sin\beta k}{k} = \alpha\sin\varphi + \frac{k-1}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin 3\varphi + \ldots$$

Hieraus folgt, wenn man k sich Null nähern läſst:

$$17.\;\begin{cases}\delta = \alpha\cos\varphi - \dfrac{\alpha^2}{2}\cos 2\varphi + \dfrac{\alpha^3}{3}\cos 3\varphi - \text{u. s. w.}\\ \beta = \alpha\sin\varphi - \dfrac{\alpha^2}{2}\sin 2\varphi + \dfrac{\alpha^3}{3}\sin 3\varphi - \text{u. s. w.},\end{cases}$$

folglich

$$\beta' = +\delta,\; \delta' = -\beta.$$

Die Ausdrücke (14.) gehen also in

$$18.\;\begin{cases}1+\lambda_1\alpha\cos\theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\theta_2+\ldots+\lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu+\ldots = e^{\delta k-\beta k'}\cos(\beta k+\delta k') = p,\\ \lambda_1\alpha\sin\theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\theta_2+\ldots+\lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu+\ldots = e^{\delta k-\beta k'}\sin(\beta k+\delta k') = q,\end{cases}$$

über, wo $\delta = \frac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)$, $\beta = \text{Arc. tang}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right)$; und da nun die Summe der gegebenen Reihe $= p + q\sqrt{-1}$ ist, so hat man

$$1+\frac{m}{1}.x+\frac{m.m-1}{1.2}x^2+\ldots\ldots+\frac{m.(m-1)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{1.2\ldots\ldots\mu}x^\mu+\ldots\ldots$$
$$= e^{\delta k-\beta k'}.\{\cos(\beta k+\delta k')+\sqrt{-1}.\sin(\beta k+\delta k')\}.$$

Nun ist $m = k + k'\sqrt{-1}$, $x = \alpha(\cos\varphi+\sqrt{-1}.\sin\varphi) = a+b\sqrt{-1}$, also $\alpha = \sqrt{a^2+b^2}$, $\alpha\cos\varphi = a$, $\alpha\sin\varphi = b$,

$$\delta = \tfrac{1}{2}\log(1+2a+a^2+b^2) = \tfrac{1}{2}\log\left((1+a)^2+b^2\right),\; \beta = \text{Arc. tang}\left(\frac{b}{1+a}\right).$$

Substituirt man, und setzt m statt k, und n statt k', so verwandelt sich der obige Ausdruck in:

19.

$$19.\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m+n\sqrt{-1}}{1}(a+b\sqrt{-1})+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m+n\sqrt{-1}-1)}{1\;.\;2}(a+b\sqrt{-1})^2\\&+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})(m-2+n\sqrt{-1})}{1\;.\;2\;.\;3}(a+b\sqrt{-1})^3+\ldots\ldots\\&\ldots\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})(m-2+n\sqrt{-1})\ldots(m-\mu+1+n\sqrt{-1})}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots\;\mu}(a+b\sqrt{-1})^\mu+\text{u.s.w.}\\&=\left((1+a)^2+b^2\right)^{\frac{m}{2}}.e^{-n\,\text{Arc tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)}\Big[\cos\left(m\,\text{Arc.tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\tfrac{1}{2}n\log\left((1+a)^2+b^2\right)\right)\\&\qquad+\sqrt{-1}\cdot\sin\left(m\,\text{Arc.tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\tfrac{1}{2}n\log\left((1+a)^2+b^2\right)\right)\Big].\end{aligned}\right.$$

Dieser Ausdruck findet, wie wir sahen, ebensowohl als (18.), für jeden Werth von $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$, der kleiner als 1 ist, Statt.

Setzt man z. B. $b=0$, $n=0$, so hat man den Ausdruck

$$20.\quad 1+\frac{m}{1}a+\frac{m.(m-1)}{1\;.\;2}a^2+\ldots\ldots=(1+a)^m,$$

von welchem wir weiter unten Gebrauch machen werden.

IV.

In dem Vorhergehenden wurde die Summe der gegebenen Reihe für die Fälle, wenn $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$ kleiner als 1 ist, gefunden. Es bleibt noch der Fall zu untersuchen übrig, wenn jene Gröfse gleich 1 ist.

Aus dem Lehrsatze (IV.) folgte, dafs, wenn man α der Grenze 1 unendlich sich nähern läfst, die Reihe

$$v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\ldots\ldots$$

zu gleicher Zeit der Grenze $v_0+v_1+v_2+\ldots\ldots$ sich nähert, sobald nur die letztere Reihe convergent ist. Läfst man daher in den Ausdrücken α der Einheit sich nähern, so hat man:

$$21.\left\{\begin{aligned}&1+\lambda_1\cos\theta_1+\lambda_2\cos\theta_2+\ldots+\lambda_\mu\cos\theta_\mu+\ldots=e^{\delta_1 k-\beta_1 k'}.\cos(\beta_1 k+\delta_1 k')\\&+\lambda_1\sin\theta_1+\lambda_2\sin\theta_2+\ldots+\lambda_\mu\sin\theta_\mu+\ldots=e^{\delta_1 k-\beta_1 k'}.\sin(\beta_1 k+\delta_1 k'),\end{aligned}\right.$$

wo δ_1 und β_1 die Grenzen der Gröfsen δ und β sind, vorausgesetzt, dafs die in diesen Gleichungen enthaltenen Reihen convergiren.

Es ist aber klar, dafs $\frac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi)$ die Grenze von δ, und $\text{Arc. tang.}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}=\text{Arc. tang}\frac{2.\cos\frac{1}{2}\varphi.\sin\frac{1}{2}\varphi}{2.(\sin\frac{1}{2}\varphi)^2}=\text{Arc. tang}(\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi)$ die Grenze von β ist, folglich ist

$$22.\quad \delta_1=\tfrac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi),\quad \beta_1=\text{Arc. tang}(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Es bleibt also nur zu untersuchen übrig, in welchen Fällen die Reihen convergent sind. Zu dem Ende wollen wir drei Fälle unterscheiden: wenn $k \gtrless -1$

ist, oder zwischen -1 und $-\infty$ liegt; wenn k zwischen 0 und $+\infty$ liegt, und wenn k zwischen 0 und -1 eingeschlossen ist.

Erster Fall, wenn $k=-1$ ist, oder zwischen -1 und $-\infty$ liegt. Es ist

$$\delta_\mu=\left(\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man also $k=-1-n$, so ist

$$\delta_\mu=\left(\left(\frac{n+\mu}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus ist zu sehen, daſs δ_μ immer gröſser ist, als 1.

Man hat aber $\lambda_\mu=\delta_1.\delta_2.\delta_3\ldots\ldots\delta_\mu$, also wird λ_μ, für stets wachsende Werthe von μ, nicht gegen 0 hin convergiren, und folglich sind die Reihen (21.), vermöge des Lehrsatzes (I.), divergent.

Zweiter Fall, wenn k positiv ist.

Gesetzt, c sei eine positive Gröſse, kleiner als k, so hat man

$$(\mu-k-1+c)^2=(\mu-k-1)^2+2c(\mu-k-1)+c^2,$$

also

$$(\mu-k-1)^2+k'^2=(\mu-k-1+c)^2+k'^2-c^2-2c(\mu-k-1).$$

Setzt man

$$\mu>k+1-\tfrac{1}{2}c+\frac{k'^2}{2c},$$

so folgt, daſs zugleich $k'^2-c^2-2c(\mu-k-1)$ negativ, und folglich

$$(\mu-k-1)^2+k'^2<(\mu-k-1+c)^2, \text{ d. h.}$$

$$\delta_\mu<\frac{\mu-k-1+c}{\mu},\quad \delta_\mu<1-\frac{1+k-c}{\mu}$$

ist. Setzt man in der Gleichung (20.) $\alpha=\frac{1}{\mu}$, $m=-n$, so ist

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-n}=1-\frac{n}{\mu}+\frac{n.(1+n)}{1\;.\;2}.\frac{1}{\mu^2}-\text{u. s. w.}$$

$$=1-\frac{n}{\mu}+\frac{n.(n+1)}{1\;.\;2}.\frac{1}{\mu^2}\left(1-\frac{2+n}{3\mu}\right)+\text{u. s. w.}$$

Daher ist, wenn man $n=1+k-c$ setzt, wie leicht zu sehen,

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-1-k+c}=1-\frac{1+k-c}{\mu},$$

folglich

$$\delta_\mu<\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+k-c},\text{ wo } \mu>k+1-\tfrac{1}{2}c+\frac{k_1^2}{2c}\ (=\varrho),$$

also

$$\delta_{\varrho+\mu}<\left(\frac{\varrho+\mu}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c},\ \text{wo}\ \mu>0\ \text{ist.}$$

Setzt man, der Reihe nach, $\mu=0, 1, 2, 3\ldots\ldots\mu$, und multiplicirt die Resultate mit einander, so erhält man:

$$\delta_{\varrho+1}\cdot\delta_{\varrho+2}\ldots\ldots\delta_{\varrho+\mu}<\left(\frac{\varrho+1}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c},$$

also, da $\lambda_{\mu+\varrho}=\delta_1\cdot\delta_2\cdot\delta_3\ldots\ldots\delta_{\mu+\varrho}$, $\lambda_{\mu+\varrho}<\delta_1\cdot\delta_2\ldots\ldots\delta_\varrho\cdot\left(\frac{\varrho+1}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c}$, folglich, wenn man $\mu=0, 1, 2, \ldots\ldots\mu$ setzt,

$$\lambda_\varrho+\lambda_{\varrho+1}+\ldots\ldots+\lambda_{\varrho+\mu}<\delta_1\cdot\delta_2\ldots\ldots\delta_\varrho\cdot(\varrho+1)^{1+k-c}\left[\frac{1}{(\varrho+1)^{1+k-c}}+\frac{1}{(\varrho+2)^{1+k-c}}+\ldots\ldots+\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}}\right].$$

Setzt man aber in dem Ausdruck (20.) $\alpha=-\frac{1}{\varrho+\mu+1}$, $m=-k+c$, so hat man

$$\left(1-\frac{1}{\varrho+\mu+1}\right)^{c-k}=1+\frac{k-c}{\varrho+\mu+1}+\frac{(k-c)(k-c+1)}{1\cdot 2\cdot(\varrho+\mu+1)^2}+\text{u. s. w.},$$

folglich ist, wenn man sich erinnert, dafs $k>c$:

$$\left(\frac{\varrho+\mu}{\varrho+\mu+1}\right)^{c-k}>1+\frac{k-c}{\varrho+\mu+1}.$$

Daraus folgt, wenn man mit $(k-c)(\varrho+\mu+1)^{k-c}$ dividirt:

$$\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}}<\frac{1}{k-c}\left[\frac{1}{(\varrho+\mu)^{k-c}}-\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{k-c}}\right].$$

Dieses giebt, wenn man $\mu=0, 1, 2\ldots\ldots\mu$ setzt, und addirt:

$$\frac{1}{(\varrho+1)^{1+k-c}}+\frac{1}{(\varrho+2)^{1+k-c}}+\ldots\ldots+\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}}<\frac{1}{k-c}\left[\frac{1}{\varrho^{k-c}}-\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{k-c}}\right]<\frac{1}{k-c}\cdot\frac{1}{\varrho^{k-c}}.$$

Hieraus folgt, dafs

$$\lambda_\varrho+\lambda_{\varrho+1}+\ldots\ldots+\lambda_{\varrho+\mu}<\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\ldots\delta_\varrho\frac{(\varrho+1)^{1+k-c}}{(k-c)\varrho^{k-c}},$$

welchen Werth auch μ haben mag. Daher wird die Reihe $1+\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\ldots$, deren Glieder sämmtlich positiv sind, convergiren, und folglich werden auch die Reihen

$$1 + \lambda_1 \cos \theta_1 + \lambda_2 \cos \theta_2 + \ldots\ldots + \lambda_\mu \cos \theta_\mu + \ldots\ldots$$
$$\lambda_1 \sin \theta_1 + \lambda_2 \sin \theta_2 + \ldots\ldots + \lambda_\mu \sin \theta_\mu + \ldots\ldots,$$

nach dem Lehrsatze (II.), convergent seyn.

Dritter Fall, wenn k gleich 0 ist, oder zwischen Null und -1 liegt.

In diesem Falle werden die obigen Reihen convergent seyn, für jeden Werth von k, so lange nicht $\varphi = (2n + 1)\pi$ ist.

Dieses läſst sich, wie folgt, zeigen:

Es sei $m = k + k'\sqrt{-1}$, $x = \cos\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi$, und $1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots\ldots + m_n x^n = p_n$. Durch Multiplication mit $1 + x$ erhält man

$1 + (m_1 + 1)x + (m_2 + m_1)x^2 + (m_3 + m_2)x^3 + \ldots + (m_n + n_{n-1})x^n + m_n x^{n+1} = p_n(1 + x)$.

Wie bekannt, ist aber

$m_1 + 1 = (m + 1)_1$, $m_2 + m_1 = (m + 1)_2$, $\ldots\ldots m_n + n_{n-1} = (m + 1)_{n-1}$,

also, wenn man substituirt:

$1 + (m+1)_1 x + (m+1)_2 x^2 + \ldots\ldots + (m+1)_n x^n = -m_n x^{n+1} + p_n(1 + x)$.

Setzt man nun $n = \infty$, so ist das erste Glied dieser Gleichung, nach dem vorhergehenden Falle, eine convergente Reihe. Bezeichnet man sie durch s, so ist

$$s = p_n(1 + x) - m_n[\cos(n + 1)\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin(n + 1)\varphi],$$

wo n unendlich groſs ist. Nun läſst sich, wie in dem zweiten Falle, beweisen, daſs $m_n = 0$ ist, für $n = \infty$. Man hat also

$$s = p(1 + x), \text{ wo } p = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + \text{u. s. w. in inf.}$$

Diese Gleichung giebt, wenn nicht $x + 1 = 0$:

$$p = \frac{s}{1 + x}.$$

Die Reihe p ist also alsdann convergent, und mithin sind es auch die obigen Reihen.

Ist $x + 1 = 0$, so ist

$$1 + \cos\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi = 0, \text{ also } \sin\varphi = 0, \; 1 + \cos\varphi = 0,$$

d. h., $\varphi = (2n + 1)\pi$, wo n eine ganze, positive oder negative Zahl ist. Folglich sind die in Rede stehenden Reihen, für jeden Werth von k zwischen 0 und -1, convergent, so lange nicht $\varphi = (2n + 1)\pi$.

Ist $\varphi = (2n + 1)\pi$: so sind die Reihen nothwendig divergent, denn wären sie alsdann convergent, so hätten sie zur Summe die Grenzen der Functionen

$$e^{k\delta-k'\delta_1}\left[\cos(k\delta_1+k'\delta)+\sqrt{-1}\,.\sin(k\delta_1+k'\delta)\right],$$

wenn man α gegen Null hin convergiren läfst, und $\varphi=(2n+1)\pi$ setzt:

Es ist aber:

$$\delta=\tfrac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2),\quad \delta_1=\text{arc. tang}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right),$$

folglich für $\varphi=2n\pi+1$,

$$\delta=\log(1-\alpha),\quad \delta_1=0.$$

Die in Rede stehende Function geht also in

$$(1-\alpha)^k\left[\cos\left(k\log(1-\alpha)\right)+\sqrt{-1}\,.\sin\left(k\log(1-\alpha)\right)\right]$$

über. Da aber $k=0$ oder negativ ist, so ist klar, dafs diese Function, wenn man α sich 0 nähern läfst, keine endliche und bestimmte Grenze hat. Die Reihen sind also divergent.

Aus dem Vorhergehenden folgt also, dafs die Reihen (21.) für jeden Werth von φ Statt finden, wenn k positiv ist, und für jeden Werth von φ, für welchen nicht $\sin\frac{1}{2}\varphi$ Null ist, wenn k zwischen -1 und $+0$ liegt, was sonst auch der Werth von k' seyn mag. In jedem anderen Falle sind die Reihen divergent. In dem Falle, welchen wir untersuchen, geht die allgemeine Reihe (19.), wenn man $b^2+a^2=1$, d. h. $b=\sqrt{1-a^2}$ setzt, über in:

$$23.\begin{cases}1+\frac{m+n\sqrt{-1}}{1}(a+\sqrt{a^2-1})+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\quad .\quad 2}(a+\sqrt{a^2-1})^2\\ \quad+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})(m-2+n\sqrt{-1})}{1\quad .\quad 2\quad .\quad 3}(a+\sqrt{a^2-1})^3+\text{u. s. w.}\\ =(2+2a)^{\frac{m}{2}}.e^{-n\text{Arc.tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\left[\cos\left(m\,\text{Arc tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\tfrac{1}{2}n\log(2+2a)\right)\right.\\ \quad\left.+\sqrt{-1}\,.\sin\left(m\,\text{Arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\tfrac{1}{2}n\log(2+2a)\right)\right].\end{cases}$$

Folgendes ist eine Uebersicht der bisherigen Resultate:

I. Wenn die Reihe:

$$1+\frac{m+n\sqrt{-1}}{1}(a+b\sqrt{-1})+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\quad .\quad 2}(a+b\sqrt{-1})^2+\text{u. s. w.}$$
$$+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})\ldots.(m-\mu+1+n\sqrt{-1})}{1\quad .\quad 2\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;\mu}(a+b\sqrt{-1})^\mu+\ldots$$

convergirt, so ist ihre Summe:

$$\left((1+a)^2+b^2\right)^{\frac{m}{2}} . e^{-n \operatorname{Arc.tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)} \left[\cos\left(m \operatorname{Arc.tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\frac{n}{2}\log\left((1+a)^2+b^2\right)\right) \right.$$
$$\left. + \sqrt{-1} \,.\, \sin\left(m \operatorname{Arc.tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\frac{n}{2}\log\left((1+a)^2+b^2\right)\right)\right].$$

II. Die Reihe ist convergent für jeden Werth von m und n, wenn die Gröfse $\sqrt{a^2+b^2}$ kleiner ist als Eins. Ist $\sqrt{a^2+b^2}$ der Einheit gleich, so ist die Reihe convergent für jeden Werth von m, zwischen -1 und $+\infty$, insofern nicht zugleich $a = -1$ ist. Ist $a = -1$, so mufs m positiv seyn. In jedem anderen Falle ist die gegebene Reihe divergent.

Als besondere Fälle mufs man unterscheiden:

A. Wenn $n = 0$.

Alsdann ist:

$$24. \left\{\begin{array}{l} 1+\frac{m}{1}(a+b\sqrt{-1})+\frac{m.(m-1)}{1\,.\,2}(a+b\sqrt{-1})^2+\ldots\ldots \\ =\left((1+a)^2+b^2\right)^{\frac{m}{2}} . \left[\cos\left(m \operatorname{Arc.tang}\frac{b}{1+a}\right)+\sqrt{-1}\,.\sin\left(m \operatorname{Arc.tang}\frac{b}{1+a}\right)\right]. \end{array}\right.$$

Dieser Ausdruck giebt, wenn man $a = \alpha \cos \varphi$ und $b = \alpha \sin \varphi$ setzt, und die reellen Glieder von den imaginairen absondert:

$$25. \left\{\begin{array}{l} 1+\frac{m}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{m.(m-1)}{1\,.\,2}\alpha^2\cos 2\varphi+\text{u. s. w.}=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{m}{2}}\cos\left(m \operatorname{Arc.tang}\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right), \\ \frac{m}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{m.(m-1)}{1\,.\,2}\alpha^2\sin 2\varphi+\text{u. s. w.}=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{m}{2}}\sin\left(m \operatorname{Arc.tang}\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right). \end{array}\right.$$

B. Wenn $b = 0$.

In diesem Falle geht der allgemeine Ausdruck in folgenden über:

$$26. \left\{\begin{array}{l} 1+\frac{m+n\sqrt{-1}}{1}a+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\quad.\quad 2}a^2+\text{u. s. w.} \\ =(1+a)^m . \left[\cos[n\log(1+a)]+\sqrt{-1}\,.\,\sin[n\log(1+a)]\right]. \end{array}\right.$$

C. Wenn $n = 0$, $b = 0$.

Alsdann ist:

$$27. \quad 1+\frac{m}{1}.a+\frac{m.(m-1)}{1\,.\,2}.a^2+\frac{m.(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}.a^3+\ldots\ldots=(1+a)^m.$$

Dieser Ausdruck findet für jeden Werth von m Statt, wenn der Zahlenwerth von a kleiner ist, als 1; ferner für jeden Werth von m, zwischen -1 und $+\infty$, wenn $a = 1$ ist, und für jeden positiven Werth von m, wenn $a = -1$ ist. Für andere Werthe von a und m ist das erste Glied eine divergente Reihe.

Setzt man z. B. $a=+1$, $a=-1$, so hat man

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m.(m-1)}{1\;.\;2}+\text{u. s. w.}\ldots\ldots=2^m,$$

$$1-\frac{m}{1}+\frac{m.(m-1)}{1\;.\;2}-\text{u. s. w.}\ldots\ldots=0.$$

Die erste Gleichung gilt für jeden Werth von m, zwischen -1 und $+\infty$, und die zweite für jeden positiven Werth von m.

D. wenn $\sqrt{a^2+b^2}=1$ ($a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$).

Alsdann ist

$$28.\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m+n\sqrt{-1}}{1}(a+\sqrt{a^2-1})+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\;.\;2}(a+\sqrt{a^2-1})^2+\text{u. s. w.}\\&=(2+2a)^{\frac{m}{2}}.e^{-n\,\text{Arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\left[\cos\left[m.\text{Arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\frac{n}{2}\log(2+2a)\right]\right.\\&\qquad\left.+\sqrt{-1}\,.\,\sin\left[m.\,\text{Arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\frac{n}{2}\log(2+2a)\right]\right].\end{aligned}\right.$$

Setzt man hierin $a=\cos\varphi$, so erhält man:

$$29.\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m+n\sqrt{-1}}{1}(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\;\cdot\;2}(\cos2\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin2\varphi)+\cdots\\&=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cdot e^{-n(\varphi-\varrho\pi)}\cdot\left[\cos\left[m(\varphi-\varrho\pi)+\frac{n}{2}\log(2+2\cos\varphi)\right]\right.\\&\qquad\left.+\sqrt{-1}\cdot\sin\left[m(\varphi-\varrho\pi)+\frac{n}{2}\log(2+2\cos\varphi)\right]\right],\end{aligned}\right.$$

wenn man nemlich erwägt, dafs $\text{Arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}=\text{Arc. tang}\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$ $=\text{Arc. tang}\,\frac{1}{2}\varphi=\frac{1}{2}\varphi-\varrho\pi$, vorausgesetzt, dafs $\frac{1}{2}\varphi$ zwischen $\varrho\pi-\frac{\pi}{2}$ und $\varrho\pi+\frac{\pi}{2}$ liegt.

E. Wenn $\sqrt{a^2+b^2}=1$, $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$, $n=0$.

In diesem Falle giebt der Ausdruck:

$$30.\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m}{1}\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)+\frac{m\cdot m-1}{1\cdot2}(\cos2\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin2\varphi)+\text{u.s.w.}\\&=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cdot\left(\cos m\left(\frac{\varphi}{2}-\varrho\pi\right)+\sqrt{-1}\cdot\sin m\left(\frac{\varphi}{2}-\varrho\pi\right)\right)\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\text{von}\,\frac{\varphi}{2}=\varrho\pi-\frac{\pi}{2}\\&\text{bis}\,\frac{\varphi}{2}=\varrho\pi+\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

oder, wenn man die reellen Theile von den imaginairen trennt:

$$31.\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m}{1}\cos\varphi+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot2}\cos2\varphi+\text{u.s.w.}\cdots=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cos m\left(\frac{\varphi}{2}-\varrho\pi\right)\\&+\frac{m}{1}\sin\varphi+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot2}\sin2\varphi+\text{u.s.w.}\cdots=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\sin m\left(\frac{\varphi}{2}-\varrho\pi\right)\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\text{von}\,\frac{\varphi}{2}=\varrho\pi-\frac{\pi}{2}\\&\text{bis}\,\frac{\varphi}{2}=\varrho\pi+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

F. **Wenn $a = 0$, $b = \tang \varphi$.**

In diesem Falle erhält man, wenn φ zwischen $+\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$ liegt:

$$32. \begin{cases} 1 + \frac{m+n\sqrt{-1}}{1} \cdot \tang\varphi \cdot \sqrt{-1} + \frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1 \quad \cdot \quad 2} (\tang\varphi \cdot \sqrt{-1})^2 + \text{u. s. w.} \\ = (\cos\varphi)^{-m} \cdot e^{-n\varphi} \left[\cos(m\varphi - n\log\cos\varphi) + \sqrt{-1} \cdot \sin(m\varphi - n\log\cos\varphi)\right]. \end{cases}$$

V.

Es lassen sich aus den obigen Ausdrücken, durch schickliche Verwandlungen, noch eine Menge anderer ableiten, worunter sehr merkwürdige. Wir wollen einige davon entwickeln. Für das weitere Detail möge man die oben angeführte Schrift von *Cauchy* nachlesen.

A.

Summirung der Reihen:

$$\alpha \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \cos 3\varphi - \ldots\ldots,$$
$$\alpha \sin\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \sin 3\varphi - \ldots\ldots$$

Wenn α gröfser als Eins ist, so sind diese Reihen, wie leicht zu sehen, divergent. Ist α kleiner als Eins, so sind sie, wie wir oben sahen, convergent, und ihre Summen sind die Gröfsen β und δ des (§. III.), d. h. es ist, wenn man für β und δ ihre, durch die Gleichung (18.) gegebenen Werthe setzt:

$$33. \begin{cases} \tfrac{1}{2}\log(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2) = \alpha\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi - \text{u. s. w.}, \\ \text{Arc. tang}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1 + \alpha\cos\varphi}\right) = \alpha\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi - \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Um die Summen der Reihen zu erhalten, wenn $\alpha = +1$ oder -1, darf man nur α gegen seine Grenzen hin convergiren lassen.

Der erste Ausdruck giebt auf diese Weise:

$$34. \begin{cases} \tfrac{1}{2}\log(2 + 2\cos\varphi) = \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 3\varphi - \text{u. s. w.}, \\ \tfrac{1}{2}\log(2 - 2\cos\varphi) = -\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi - \tfrac{1}{3}\cos 3\varphi - \text{u. s. w.}, \end{cases}$$

und zwar sobald die Reihen auf der rechten Seite der Gleichungen convergent sind, welches, zufolge Lehrsatz (II.), für jeden Werth von φ der Fall ist, ausgenommen für $\varphi = (2\mu + 1)\pi$ im ersten Ausdruck, und für $\varphi = 2\mu\pi$ im zweiten, wo μ eine beliebige ganze, positive oder negative Zahl bezeichnet.

Die zweite Formel giebt, wenn man φ zwischen π und $-\pi$ voraussetzt, und erwägt, dafs alsdann:

$$\text{Arc. tang}\left(\frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}\right) = \text{Arc. tang}(\tang \tfrac{1}{2}\varphi) = \tfrac{1}{2}\varphi:$$

35.

35. $\frac{1}{2}\varphi = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \ldots\ldots \left(\begin{array}{l}\text{von } \varphi = +\pi \\ \text{bis } \varphi = -\pi\end{array}\right).$

Ist $\varphi = \pi$ oder $= -\pi$, so reducirt sich die Reihe, wie man siehet, auf Null.

Hieraus folgt, daſs die Function:

$$\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\sin 3\varphi - \text{u. s. w.}$$

die merkwürdige Eigenschaft hat, für die Werthe $\varphi = \pi$ und $\varphi = -\pi$ un[illegible] zu seyn. Und in der That, wenn $\varphi = \pm\pi$, so ist die Function [illegible]. Wenn im Gegentheil $\varphi = \pm(\pi - \alpha)$, wo α positiv und kleiner als 1 ist, so ist der Werth der Function

$$\pm\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Der Ausdruck (33.) enthält als besonderen Fall folgenden:

36. $\text{Arc. tang}(\alpha) = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{5}\alpha^5 - \ldots\ldots$ u. s. w.

welchen man findet, wenn man $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt.

Dieser Ausdruck wird für jeden Werth von α gelten, von -1 bis $+1$, die Grenzen mit inbegriffen.

B.

Entwickelung von cos $m\varphi$ und sin $m\varphi$, nach den Potenzen von tang φ.

Man kann diese Entwickelung aus dem Ausdruck (32.) herleiten. Setzt man nemlich $n = 0$, und trennt die reellen Theile von den imaginairen, so erhält man, nachdem mit $(\cos\varphi)^m$ multiplicirt worden:

$$37.\left\{\begin{array}{l}\cos m\varphi = (\cos\varphi)^m\left(1 - \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}(\tan\varphi)^2 + \frac{m\cdot(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\tan\varphi)^4 - \ldots\right) \\ \sin m\varphi = (\cos\varphi)^m\left(m(\tan\varphi) - \frac{m\cdot(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\tan\varphi)^3 \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{m\cdot(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(\tan\varphi)^5 - \ldots\right)\end{array}\right.$$

von $\varphi = \frac{\pi}{4}$ bis $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, und diese Gleichungen finden Statt für jeden Werth von m, wenn tang φ kleiner ist als 1. Ist tang $\varphi = \pm 1$, so gelten sie nur für ein positives m, zwischen -1 und $+\infty$.

Sie sind alsdann

$$38.\left\{\begin{array}{l}\cos\left(m\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1 - \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2} + \frac{m\cdot(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots\right) \\ \sin\left(m\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(m - \frac{m\cdot(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{m\cdot(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots\right).\end{array}\right.$$

C.

Entwickelung von $(\cos x)^n$ und $(\sin x)^n$ in Reihen der Cosinus und Sinus vielfacher Bogen geordnet.

In der neuesten Zeit haben sich mehrere Analysten mit der Entwickelung von $(\cos x)^n$ und $(\sin x)^n$ beschäftigt. Bis jetzt sind aber alle Bemühungen, wenn ich nicht irre, ohne Erfolg geblieben. Man ist freilich zu Ausdrücken gelangt, welche unter gewissen Einschränkungen richtig sind, sie sind aber nicht hinreichend strenge begründet worden.

Man kann sie sehr einfach aus den hier oben bewiesenen Ausdrücken herleiten.

Addirt man nemlich die beiden Gleichungen (31.), nachdem man die erste mit $\cos a$, die zweite mit $\sin a$ multiplicirt hat, so erhält man:

$$\cos a + \frac{m}{1}\cos(a-\varphi) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\cos(a-2\varphi) + \ldots\ldots$$

$$= (2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}} \cdot \cos\left(a - \frac{m\varphi}{2} + m\varrho\pi\right)$$

$$\left(\text{von } \varphi = \varrho\pi - \frac{\pi}{2} \text{ bis } \varphi = \varrho\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Da nun $2 + 2\cos\varphi = 4\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2$, so erhält man, wenn man $\varphi = 2x$ setzt:

$$\cos\alpha + \frac{m}{1}\cos(\alpha-2x) + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(\alpha-4x) + \cdots = (2\cos x)^m \times \cos(\alpha - mx + 2m\varrho)\left\{\begin{matrix}\text{von } x = 2\varrho\pi - \frac{\pi}{2}\\ \text{bis } x = 2\varrho\pi + \frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}$$

$$\cos\alpha + \frac{m}{1}\cos(\alpha-2x) + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(\alpha-4x) + \cdots = (-2\cos x)^m\cos\big(\alpha - mx + m(2\varrho+1)\big)\left\{\begin{matrix}\text{von } x = 2\varrho\pi + \frac{\pi}{2}\\ \text{bis } x = 2\varrho\pi + \frac{3\pi}{2}\end{matrix}\right\}.$$

Setzt man 1, $a = mx$; 2, $a = mx + \frac{\pi}{2}$; 3, $x = y - \frac{\pi}{2}$; 4, $a = my$; so ist:

$$1,\ (2\cos x)^m \cdot \cos 2m\varrho\pi = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)x + \cdots$$

$$2,\ (2\cos x)^m \cdot \sin 2m\varrho\pi = \sin mx + \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)x + \cdots$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{von } x = 2\varrho\pi - \frac{\pi}{2}\\ \text{bis } x = 2\varrho\pi + \frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}$$

$$3,\ (2\sin x)^m \cdot \cos m(2\varrho+\tfrac{1}{2})\pi = \cos mx - \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m\,(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)x - \cdots$$

$$4,\ (2\sin x)^m \cdot \sin m(2\varrho+\tfrac{1}{2})\pi = \sin mx - \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)x - \cdots$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{von } x = 2\varrho\pi\\ \text{bis } x = (2\varrho+1)\pi\end{matrix}\right\}$$

$$5, \; (-2\cos x)^m \cdot \cos m(2\varrho+1)x = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)x + \ldots$$

$$6, \; (-2\cos x)^m \cdot \sin m(2\varrho+1)x = \sin mx + \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)x + \ldots$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{von } x=(2\varrho+\frac{1}{2})\pi \\ \text{bis } x=(2\varrho+\frac{3}{2})\pi\end{array}\right\}$

$$7, \; (-2\sin x)^m \cdot \cos m(2\varrho+\tfrac{3}{2})x = \cos mx - \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)x - \ldots$$

$$8, \; (-2\sin x)^m \cdot \sin m(2\varrho+\tfrac{3}{2})x = \sin mx - \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)x - \ldots$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{von } x=(2\varrho+1)\pi \\ \text{bis } x=(2\varrho+2)\pi\end{array}\right\}.$

Diese Ausdrücke gelten für jeden Werth von x, wenn m positiv ist. Liegt m zwischen -1 und 0, so muſs man 1) unter den Werthen von x in den Formeln (1), (2), (5), (6), die Werthe $x = 2\varrho\pi - \frac{\pi}{2}$ und $x = 2\varrho\pi + \frac{\pi}{2}$, 2) in den Formeln (3), (4), (7), (8), die Werthe $x = 2\varrho\pi$ und $x = (2\varrho + 1)\pi$ ausnehmen.

In jedem anderen Falle sind die in Rede stehenden Reihen convergent.

Als besondere Fälle kann man folgende beide betrachten:

$$(\cos x)^m = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m.(m-1)}{1\;.\;2}\cos(m-4)x + \ldots\ldots$$

$$0 = \sin mx + \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m.(m-1)}{1\;.\;2}\sin(m-4)x + \ldots\ldots$$

$\left(\text{von } x = -\frac{\pi}{2} \text{ bis } x = +\frac{\pi}{2}\right).$

30.

Einige Bemerkungen über Flächen zweiter Ordnung.

(Von Herrn *Hachette.*)

Zusatz zu des Verfassers *Traité de géométrie descriptive. Paris*, 1822.

---

1. Von den fünf Flächen der zweiten Ordnung, welche wir Ellipsoïd, Hyperboloïd mit einer Schale (*à une nappe*), Hyperboloïd mit zwei Schalen, elliptisches Paraboloïd, und hyperbolisches Paraboloïd genannt haben, besitzen die zweite und fünfte die characteristische Eigenschaft, daſs sie auf zweierlei Art von einer beweglichen geraden Linie, welche sich auf drei andere beliebige gerade

Linien lehnt, die dieser oder jener Erzeugungsart entsprechen, hervorgebracht werden können. Der allgemeinste Fall ist, wenn die drei bestimmenden geraden Linien der Bedingung allein unterworfen sind, dafs sie sich nicht schneiden; kommt aber zu dieser Bedingung noch die zweite hinzu, dafs sie mit einer und derselben Ebene parallel seyn sollen, so erzeugt die bewegliche gerade Linie nicht mehr das Hyberboloïd mit einer Schale, sondern das hyperbolische Paraboloïd. Im 128sten Art. des „*Traité de Géométrie descriptive*," S. 71, ist bewiesen worden, dafs diese letztere Fläche auf doppelte Weise, als von einer geraden Linie erzeugt, betrachtet werden könne, wenn man sie als den geometrischen Ort einer geraden Linie ansiehet, welche sich parallel mit einer gegebenen Ebene bewegt, und an zwei gerade Linien anlehnt, die auf irgend eine Weise gegen jene Ebene liegen. Wir haben ferner gezeigt, dafs wenn man die bewegliche gerade Linie in drei bestimmten Lagen betrachtet, und die drei geraden Linien, welche diesen Lagen entsprechen, als die bestimmenden Bahnen einer zweiten, beweglichen geraden Linie betrachtet, dafs alsdann diese letztere in allen Lagen mit einer zweiten Ebene parallel ist, und wiederum die nemliche Fläche erzeugt, wie die erste bewegliche gerade Linie. Der Zweck dieses Zusatzes ist, zu zeigen, wie sich die Eigenschaft der doppelten Erzeugbarkeit durch eine gerade Linie, sowohl für das Hyberboloïd mit einer Schale, als für das hyperbolische Paraboloïd, aus einigen einfachen Sätzen ergiebt, welche ich meinen „*Élémens de Géométrie à trois dimensions*" hinzufügen zu müssen glaube.

Erster Satz.

2. Wenn drei beliebige gerade Linien im Raume gegeben sind, die sich nirgend schneiden, so giebt es nur ein Parallelepipedum, von welchem drei Kanten die nemliche Richtung haben, wie die drei gegebenen geraden Linien.

Beweis. Die drei geraden Linien im Raume, von denen gegeben ist, dafs sie sich nicht schneiden, seyen A, B, C. Bekanntlich ist die Lage einer Ebene bestimmt, wenn man weifs, dafs sie mit zwei geraden Linien parallel ist. Daraus folgt:

1) Dafs man durch einen beliebigen Punct im Raume drei Ebenen legen kann, welche resp. den Linien-Paaren (A, B), (B, C) und (C, A) parallel sind;

2) dafs man durch irgend eine der drei geraden Linien, A, B, C, z. B. durch A, zwei Ebenen legen kann, deren eine mit der Geraden B, die andere mit der Geraden C parallel ist. Dieses giebt sechs Ebenen, von welchen zwei und zwei parallel sind, und welche das Parallelepipedum bestimmen, dessen Kanten die Richtung der Durchschnitte der Ebenen haben. Von diesen sechs

Ebenen gehen aber, nach der Voraussetzung, drei durch die gegebenen geraden Linien A, B, C; folglich haben diese geraden Linien nothwendig die Richtung dreier Kanten eines einzigen Parallelepipedi über den drei gegebenen geraden Linien A, B, C.

Geometrische Construction eines Parallelepipedi über drei sich nicht schneidenden geraden Linien AB, $B'C'$, CA', (Tafel I. Fig. 1.)

3. Man lege 1. durch die erste gerade Linie AB eine Ebene parallel mit der zweiten Geraden $B'C'$: diese Ebene wird von der dritten geraden Linie CA' im Puncte C geschnitten werden, durch welchen man CD parallel mit AB, und CB parallel mit $B'C'$ ziehet. 2. Man lege durch die zweite gegebene gerade Linie $B'C'$ eine Ebene parallel mit der dritten Geraden CA; diese Ebene schneidet die Ebene der drei geraden Linien AB, BC, CD, in der geraden Linie AD, welche das Parallelogramm $ABCD$, oder die eine Seite des Parallelepipedi über den drei gegebenen geraden Linien, vollendet.

Um den Körper vollends zu beschreiben, ziehe man die drei Parallelen BD', AC', DB', mit $A'C$; die beiden letzteren werden die gegebene Gerade $B'C'$ in den Puncten B', C' schneiden, durch welche man $B'A'$, $C'D'$ mit der gegebenen AB parallel zieht. Die erste Parallele wird die Gerade CA' im Puncte A' treffen. Durch diesen Punct ziehe man $A'D'$ parallel mit $B'C'$, so sind die sechs Seiten-Ebenen des Parallelepipedi beschrieben. Die drei Kanten dieses Körpers, in der Richtung der gegebenen geraden Linien, haben die Länge der bestimmten geraden Linien AB, $B'C'$, $A'C$. Zwei beliebige Diagonalen AA', DD' schneiden sich im Mittelpunct I des Parallelepipedi.

Zusatz.

4. Es ist leicht zu sehen, daſs nicht allein drei von den zwölf Kanten des, über den drei gegebenen Geraden AB, $B'C'$, $A'C$ (Fig. 1.) beschriebenen Parallelepipedi, die Richtung dieser Linien haben, sondern daſs auch drei andere Geraden die Eigenschaft haben, daſs jede derselben zugleich mit einer von den drei gegebenen Linien parallel ist, und die beiden andern schneidet, oder eine Transversale derselben ist. Diese drei letzten Kanten, oder vielmehr die geraden Linien, in welchen sie liegen, werde ich symmetrische Transversalen der drei gegebenen geraden Linien nennen. Haben die gegebenen geraden Linien die Richtung der drei Kanten AB, $B'C'$, CA', so haben ihre symmetrischen Transversalen die Richtung der drei anderen Kanten $A'B'$, BC, $C'A$.

Um die Kanten eines Parallelepipedi, welche die Richtung dreier, einander sich nicht schneidenden geraden Linien haben, zu unterscheiden, sollen sie Haupt-Kanten heifsen, während unter symmetrischen Kanten zu den Hauptkanten die Kanten zu verstehen sind, welche die Richtung der symmetrischen Transversalen der drei gegebenen geraden Linien haben.

Zweiter Satz.

5. Wenn von zwei geraden Linien X und Y, die eine die drei Hauptkanten eines Parallelepipedi, die andere die drei symmetrischen Kanten desselben schneidet, so schneiden sich entweder diese beiden Transversalen X und Y der Hauptkanten und ihrer symmetrischen Kanten nothwendig; oder sie sind parallel.

Beweis. Es seyen (Fig. 2.) lmP, $l'm'P'$ die beiden Transversalen, welche die Hauptkanten AB, $B'C'$, CA' eines Parallelepipedi in den Puncten l, m, P, und ihre symmetrischen Kanten $A'B'$, BC, $C'A$ in den Puncten l', m', P' schneiden; so kommt es darauf an, zu zeigen, dafs die beiden geraden Linien lmP, $l'm'P'$ in einer und derselben Ebene liegen, und sich nothwendig in einem Puncte T dieser Ebene schneiden.

Nimmt man auf den Kanten $A'C$ und AC' zwei beliebige Puncte P, P' an, und legt durch dieselben, parallel mit der Seiten-Ebene $ABCD$ des Parallelepipedi, zwei Ebenen, welche diesen Körper in zwei einander und dem Parallelogramm $ABCD$ gleichen Parallelogrammen $PQRS$ und $P'Q'R'S'$ schneiden: so sieht man, dafs die Gerade lmP durch den Durchschnitt der Ebenen der beiden Parallelogramme $ABPQ$, $B'C'PS$ entsteht, und dafs die Gerade $l'm'P'$ in dem Durchschnitte der Ebenen der beiden Parallelogramme $A'B'P'Q'$, $BCP'S'$ liegt. Nimmt man nun an, dafs die Seiten-Ebene $ABCD$ des Parallelepipedi horizontal liege, so schneiden sich die beiden Ebenen $ABPQ$, $A'B'P'Q'$ in einer horizontalen UV, die mit der Kante AB oder $A'B'$ parallel ist, und die beiden Ebenen $B'C'PS$, $BCP'S'$ in einer anderen horizontalen $U'V'$, die mit den Kanten $B'C'$, BC parallel ist; woraus folgt, dafs die beiden Geraden lmP, $l'm'P'$ nothwendig die beiden Horizontalen UV, $U'V'$ schneiden müssen. Wir wollen nun beweisen, dafs sie dieselben in einem und demselben Puncte T schneiden, und dafs dieser Punct der Durchschnittspunct der Horizontalen UV, $U'V'$ ist, welche in einer und derselben horizontalen Ebene liegen.

Construction der horizontalen Linien UV, $U'V'$.

6. Die Ebenen der Parallelogramme $ABPQ$, $A'B'P'Q'$ gehen, die eine durch die gerade Linie AQU, die andere durch die gerade Linie $P'B'U$. Diese

beiden Linien befinden sich aber in der Seiten-Ebene $AB'C'D$ des Parallelepipedi; folglich schneiden sie sich in einem Punct U der horizontalen Linie UV.

Die Ebenen der Parallelogramme $B'C'PS$ und $BCP'S'$ gehen, die eine durch die gerade Linie $B'P$, die andere durch CS'; diese beiden geraden Linien befinden sich aber in der Seiten-Ebene $A'B'CD$ des Parallelepipedi; mithin schneiden sie sich in einem Punct U' der horizontalen Linie $U'V'$.

Legt man durch die erste horizontale Linie UV eine horizontale Ebene, welche das Parallelepipedum in dem, der Seiten-Ebene $ABCD$ gleichen Parallelogramme $\alpha\beta\gamma\delta$ schneidet, so befindet sich, wie die folgende Rechnung zeigen wird, die mit den Seiten $\alpha\beta$, $\delta\gamma$ parallele gerade Linie $U'V'$ in der Ebene des Parallelogramms über diesen Seiten, und schneidet folglich die Gerade UV in einem Punct T, welcher beiden Transversalen lmP, $l'm'P'$ gemein ist.

Die Hauptkanten AB, $B'C'$, CA' des Parallelepipedi $AA'BB'$ mögen durch f, g, h bezeichnet werden. Die Puncte P, P' seien beliebig auf den Kanten $A'C$, AC' angenommen, CP sey $= p$; $C'P' = p'$, so ist, zufolge der obigen Constructionen:

$$CP = BS = AR = p,\ AB = RS = \beta\gamma = f,$$
$$B'C' = QR = \alpha\beta = g,\ AC' = A'C = h.$$

Da die Dreiecke AQR und $AU\beta$ ähnlich sind, so ist

$$AR : RQ = A\beta : \beta U, \text{ oder } p : g = A\beta : \beta U = \frac{g \cdot A\beta}{p}.$$

Vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke $B'P'C'$, $UP'\beta$, ist

$$P'C' : C'B' = P'\beta : \beta U;$$

oder

$$p' : g = p' + h - A\beta : \beta U, \text{ oder } \frac{g \cdot A\beta}{p}, \text{ woraus } A\beta = \frac{p\,(p' + h)}{p + p'} \text{ folgt.}$$

Aus der Vergleichung der Dreiecke $C'RS$, $C'\beta V'$, ergiebt sich

$$C'R : RS = C'\beta : \beta V', \text{ oder: } h - p : f = h - A\beta : \beta V' = \frac{fp'}{p + p'}.$$

Dieses ist die Länge von $\beta V'$, wenn man V' als den Durchschnitt der horizontalen Ebene $UV\beta\gamma$ und der geraden Linie $C'S$ ansieht.

In den Dreiecken $AP'B$, $\beta P'V'$ ist:

$$P'A : AB = P'\beta : \beta V'; \text{ oder } h + p' : f = h + p' - A\beta : \beta V' = \frac{fp'}{p + p'}.$$

Dieses ist ein anderer Ausdruck der Linie $\beta V'$, wenn man den Punct V' dieser Linie als den Durchschnitt der horizontalen Ebene $UV\beta\gamma$ und der Geraden BP' betrachtet. Der zweite Ausdruck ist aber dem ersteren gleich. Daraus

folgt: 1. daſs sich die beiden geraden Linien $C'S$, BP' in einem Punct V' der hortzontalen Ebene $UV\beta\gamma$ schneiden, 2. daſs sich die Gerade $U'V'$ in derselben Ebene befindet, in welcher schon die Horizontale UV liegt, und endlich 3. daſs sich diese Horizontalen UV, $U'V'$, welche in einer und derselben Ebene liegen, nothwendig in einem und demselben Punct T schneiden, welcher den beiden geraden Linien $lmPT$, $l'm'P'T'$ gemein ist; was zu beweisen war.

7. Daſs die geraden Linien UV, $U'V'$ in einer und derselben, mit der Seite $ABCD$ des Parallelepipedi parallelen Ebene liegen, läſst sich noch einfacher zeigen, wenn man erwägt, daſs der obige erste Werth, $\frac{p(p+h)}{p+p'}$, von $A\beta$, nur die Länge h der Kante CA' enthält, und von den Längen f, g der beiden anderen Hauptkanten AB, $B'C'$ unabhängig ist. Man kann also annehmen, daſs die beiden Kanten AB, AD ihre Stellen vertauschen, woraus weder eine Aenderung in dem Parallelepipedum, noch in den Werthen für p und p' entsteht. Nach dieser Vertauschung könnte man den Theil der Kante AC', welcher zwischen der Seiten-Ebene $ABCD$ und der mit ihr parallelen, durch die horizontale Linie $U'V'$ gehenden Ebene liegt, wie oben berechnen, und man würde für diese Länge den nemlichen Werth von $A\beta$, nemlich $\frac{p(p+h)}{p+h'}$ finden.

Da die geraden Linien UV, $U'V'$, welche den Kanten AB, $B'C'$ parallel sind, in einer und derselben Ebene liegen, so schneiden sie sich nothwendig in einem und demselben Puncte T; woraus folgt, daſs dieser Punct T den beiden geraden Linien lmP und $l'm'P'$ gemein ist.

Zusatz.

8. Die vier Puncte l, m, l', m' der geraden Linien lmP, $l'm'P'$ lassen sich auf folgende Art unmittelbar construiren.

Das Parallelogramm $B'C'PS$, dessen verlängerte Seiten durch die Puncte l, n der Kanten AB, CD gehen, liegt in der Ebene durch den Punct P und durch die gegebene gerade Linie $B'C'$. Nun ist ln der Durchschnitt der Ebene jenes Parallelogramms mit der horizontalen Ebene, in welcher die Seite $ABCD$ des Parallelepipedi liegt; also ist der Punct l dieser geraden Linie der Durchschnitt der gegebenen geraden Linie AB und der Ebene durch die drei Puncte P, B', C'.

Die geraden Linien AQ, BP schneiden, verlängert, die Kanten $B'C'$, $A'D'$ in den Puncten m, o, welche in der mit $A'B'$ parallelen Linie mo liegen; folglich

folglich schneidet die Ebene durch die drei Puncte P, A, B die gerade Linie $B'C'$ im Puncte m. Eben so schneidet die Ebene durch die drei Puncte P', B, C die Seiten-Ebene des Parallelogramms $A'B'C'D$ in der mit $B'C'$ parallelen Linie $l'n'$, und diese Parallele, welche durch den bekannten Punct n' geht, in welchem sich die Geraden $P'BD'C'$ schneiden, begegnet der Geraden $A'B'$ im Puncte l'.

Die Ebene durch die drei Puncte P', A', B' schneidet die Seiten-Ebene des Parallelogramms $ABCD$ in der, mit ab parallelen geraden Linie $o'm'$, und diese Parallele, welche durch den bekannten Punct o' gehet, in welchem sich die geraden Linien $P'B'$, AD schneiden, begegnet der Geraden BC in dem Puncte m'.

Dritter Satz.

9. Der Mittelpunct des Parallelepipedi, über drei beliebigen geraden Linien eines Hyperboloïds mit einer Schale ist auch der Mittelpunct dieses Hyperboloïds.

Beweis. Wenn ein Parallelepipedum über drei beliebigen geraden Linien eines Hyperboloïds mit einer Schale construirt ist, so haben die drei Haupt-Kanten (Art. 4.) die Richtung jener geraden Linien, und ihre symmetrischen Kanten die Richtung dreier anderen geraden Linien, welche auf dem Hyperboloïd eben so liegen. Ferner ist (Art. 5, 6) bewiesen, dafs alle geraden Linien, welche sich auf drei unbestimmt verlängerte Hauptkanten, oder auf drei verlängerte symmetrische Kanten lehnen, demselben Hyperboloïd zugehören; denn in diesen beiden Systemen gerader Linien, ist keine des ersten, welche nicht alle Geraden des zweiten schnitte, und umgekehrt, woraus folgt, dafs jeder beliebige Punct des Hyperboloïds mit einer Schale der Durchschnitt zweier Geraden ist, deren eine sich auf die drei Haupt-Kanten des Parallelepipedi, die andere auf die drei symmetrischen Kanten desselben lehnet.

Nun nehme man eine gerade Linie des ersten Systems, d. h. eine solche an, die sich auf die Haupt-Kanten des Parallelepipedi lehnt, so schneidet die Ebene durch diese Linie und durch den Mittelpunct des Parallelepipedi, die drei symmetrischen Kanten in drei Puncten einer zweiten, mit der ersteren parallelen geraden Linie, und in gleicher Entfernung vom Mittelpunct; woraus folgt, dafs jede gerade Linie durch den Mittelpunct, die in der Ebene der beiden parallelen geraden Linien des Hyperboloïds liegt, diese Parallelen, und folglich das Hyperboloïd, in zwei, gleich weit vom Mittelpunct entfernten Puncten schneiden wird. Eine beliebige Linie durch den Mittelpunct des Parallelepipedi wird aber einer von den geraden Linien des Hyperboloïds, welche sich auf die drei Haupt-Kanten

stützen, und folglich auch der mit jener Geraden parallelen Linie, welche sich auf die drei symmetrischen Kanten lehnt, begegnen; mithin schneidet jede gerade Linie durch den Mittelpunct des Parallelepipedi das Hyperboloïd in zwei vom Mittelpunct gleich weit entfernten Puncten; woraus folgt, daſs dieser Mittelpunct auch der Mittelpunct des Hyperboloïds mit einer Schale ist.

10. Ich hätte die drei so eben bewiesenen Sätze aus der Gleichung für das Hyperboloïd mit einer Schale, welche sich in meinen „*Traité des Surfaces du second degré*" (erste Ausgabe, 1807, 4., p. 35; dritte Ausgabe, 1817. 8., p. 216) befindet, herleiten können. Nachdem das Hyperboloïd auf drei schräge Axen bezogen worden, die mit den drei geraden Bahnlinien der beweglichen Geraden, von welcher diese Fläche erzeugt wird, parallel sind, so ergab sich, daſs die Gleichung, welche man findet, sich nicht ändert, wenn man an die Stelle der drei Bahnlinien drei andere setzt, deren eine mit jener ersteren parallel ist, und zugleich die beiden anderen schneidet. Diese sechs geraden Linien sind die Kanten des Parallelepipedi. Binet hat diesen Körper auch noch auf eine andere Art construirt, welche er in einer, im sechzehnten Hefte des *Journal de l'école polytechnique* (4. 1813) befindlichen analytischen Abhandlung (vom 30. November 1812) vorgetragen hat. Um das Verfahren von Binet zu zeigen, ist folgende Gleichung nöthig, deren ich oben erwähnte: nemlich die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} xy\,(h'-g)+zx\,(f'-h)+yz\,(g'-f) \\ +\,z(fh-f'g')+y\,(fg-g'h')+x(gh-f'h')+f'g'h'-fgh \end{array}\right\}=0.\ \text{(I.)}$$

Da die Constanten dieser Gleichung die Lage der drei Bahnlinien der Geraden bestimmen, durch deren Bewegung die Fläche erzeugt wird, so ist:

Für die erste gerade Richtungslinie, $x=f,\ y=f'$.
» » zweite » » » $z=g,\ x=g'$.
» » dritte » » » $y=h,\ z=h'$.

Legt man den Anfangspunct der Coordinaten in Beziehung auf die drei Bahnlinien willkürlich, so läſst sich derselbe, während die Richtung der Axen bleibt, leicht versetzen, und es lassen sich leicht diejenigen Werthe der Coordinaten für den neuen Anfangspunct finden, für welche die linearen Glieder x, y, z der obigen Gleichung (I.) verschwinden.

Diese, mit den ursprünglichen Axen der x, der y und der z parallelen Coordinaten sind:

$$\frac{g'+f}{2},\ \frac{f'+h}{2},\ \frac{h'+g}{2} \ldots\ldots$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (I.), so geht sie in:

$$xy(h'-g)+zx(f'-h)+yz(g'-f)+\tfrac{1}{4}(h'-g)(f'-h)(g'-f)=0 \text{ (II.)},$$

oder wenn man

$$g'-f=\alpha;\ f'-h=\beta;\ h'-g=\gamma\ (a)$$

setzt, in

$$\frac{x}{\alpha}\cdot\frac{y}{\beta}+\frac{y}{\beta}\cdot\frac{z}{\gamma}+\frac{z}{\gamma}\cdot\frac{x}{\alpha}+\tfrac{1}{4}=0 \quad \text{(III.)}$$

über.

In dieser Gestalt hat Binet die Gleichung des Hyperboloïds mit einer Schale genommen, und sie mit der folgenden Gleichung für das nemliche Hyperboloïd, auf die conjugirten Durchmesser a', b', c' bezogen, nemlich mit der Gleichung

$$\frac{x}{a'}\cdot\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}\cdot\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'}\cdot\frac{z}{c'}-\tfrac{1}{4}=0. \quad \text{(IV.)}$$

verglichen.

Es war bekannt, dafs man, um ein, unter dem Namen des congugirt-umschriebenen bekanntes Parallelepipedum zu construiren, sechs Puncte auf den Axen der x, y, z der Gleichung (IV.), nehmen müsse, deren Entfernung vom Anfangspunct gleich

$$\pm\frac{a'}{2},\ \pm\frac{b'}{2},\ \pm\frac{c'}{2}$$

sind (Seite 321 der Abhandlung von Binet), und dafs man darauf durch diese Puncte sechs Ebeneu legen müsse, von denen zwei und zwei den drei Ebenen, in welchen die conjugirten Durchmesser a', b', c' liegen, parallel sind.

Binet, indem er die nemliche Construction auf die Gleichung III anwendet, trägt vom Anfangspunct aus, auf die Axen der x, der y und der z, die sechs Geraden:

$$\pm\frac{\alpha}{2},\ \pm\frac{\beta}{2},\ \pm\frac{\gamma}{2}$$

auf, und legt durch die sechs Endpuncte dieser Geraden, sechs Ebenen, zu zweien mit den Ebenen der Coordinaten x, y, z parallel, welche ein Parallelepipedum bilden, das dem conjugirt-umschriebenen Parallelepipedo analog ist.

Man hatte bewiesen, dafs der Inhalt dieses letzten Körpers für jedes beliebige System der congugirten Durchmesser, über welchen er beschrieben worden, constant ist. Binet hat gezeigt, dafs das Nemliche auch noch für den analogen Körper gilt, dessen Inhalt sich nicht ändert, wenn gleich die Richtung der Axen, worüber er beschrieben ist, sich ändert. (Man sehe S. 323 seiner Abhandlung.)

11. Gehet man auf die Gleichungen (a) zurück, so siehet man, dafs die halben Längen $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ der Kanten des Parallelepipedi bei Binet, von den Kanten des Parallelepipedi, welches ich über drei beliebige gerade Linien in einem Hyperboloïd mit einer Schale construirt habe, nicht verschieden sind. Die Identität folgt noch aus der Gleichung (III.), wenn man in derselben $x = \pm\frac{\alpha}{2}$, oder $y = \pm\frac{\beta}{2}$, oder $z = \pm\frac{\gamma}{2}$ setzt. Das Erste giebt:

$$\pm\frac{\gamma y}{2} + yz \pm \frac{\beta z}{2} + \tfrac{1}{4}\beta\gamma = 0,$$

welche Gleichung sich in

$$\left(\pm y + \frac{\beta}{2}\right)\left(\pm z + \frac{\gamma}{2}\right) = 0$$

zerlegen läfst. Hieraus folgt, dafs die sechs Seiten-Ebenen des Parallelepipedi durch die Gleichungen: $x = \pm\frac{\alpha}{2}$, $y = \pm\frac{\beta}{2}$, $z = \pm\frac{\gamma}{2}$ bestimmt werden, und dafs jede dieser Ebenen das Hyperboloïd mit einer Schale in zwei geraden Linien schneidet, welche die Richtung zweier Kanten des Parallelepipedi haben.

Ueber die stereographische Projection.

(Man sehe Art. 199, S. 254 des *Traité de géométrie descriptive.*)

Die zweite Eigenschaft der stereographischen Projection bestehet in der Gleichheit zweier Winkel, deren einer Tangenten der Kugelfläche, der andere die stereographischen Projectionen dieser Tangenten zu Schenkeln hat. Diese Eigenschaft läfst sich sehr einfach auf folgende Art erweisen:

Es sey COE eine Ebene, die durch den Mittelpunct C der Kugel, durch den Durchschnitt O der Projections-Linien und durch den Scheitel E des gegebenen Winkels geht. Diese Ebene schneidet die Kugel in dem gröfsten Kreise $ABOE$ des Durchmessers AB, und die Ebene des Winkels zweier Tangenten, in der auf dem Radius CE senkrechten Linie EG. Die gerade Linie OE schneidet den Durchmesser AB im Puncte e, welcher offenbar die stereographische Projection des Scheitels E des Winkels zwischen den beiden Tangenten der Kugelfläche ist.

Nimmt man die Ebene durch die drei Puncte C, O, E vertical an, so liegt

der gröfste Kreis $ABab$ der Kugel in der horizontalen Ebene, welche durch den Durchmesser AB gehet, und diese Ebene schneidet die Ebene beider Tangenten in der Linie GH'; diese Tangenten können aber die Ebene des gröfsten Kreises $ABab$ nur in zwei Puncten, wie H, H', in der Geraden GH', schneiden, und die Gerade HH', welche diese beiden Puncte verbindet, ist die gemeinschaftliche Seite zweier Dreiecke, welche ihre Scheitel, das eine im gegebenen Punct E der Kugelfläche, das andere in der Projection e oder e' des Puncts E haben. Diese beiden Dreiecke sind aber einander gleich; denn wegen der Gleichheit der Winkel EeG und eEG, sind die geraden Linien EG und eg einander gleich; folglich ist auch der Winkel, dessen Scheitel in E liegt, und dessen Schenkel durch die Puncte H, H' gehen, dem Winkel gleich, dessen Scheitel in der stereographischen Projection e' des Puncts E liegt, und dessen Schenkel durch die nemlichen Puncte H, H' gehen.

Lacroix, in der *Introduction à la Géographie* (zweite Ausgabe, Paris, 1811.) und nachher Puissant und Delambre haben in ihren Schriften einen ähnlichen Beweis gegeben, welcher sich auf die Gleichheit der beiden geraden Linien EG und eg (Fig. 3.) gründet.

Im dritten Bande der Astronomie von Delambre lieset man, dafs die älteste, dem gelehrten Verfasser bekannt gewordene Schrift, in welcher der zweiten Eigenschaft der stereographischen Projection Erwähnung geschieht, eine im Jahre 1754 gedruckte Abhandlung von Robertson, über die Schiffahrt, ist.

31.

Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes.

(Von Herrn *J. Steiner.*)

Durch die Pestalozzische Formenlehre angeregt, haben zwar mehrere neuere geometrische Lehrbücher die Aufgabe gestellt: „zu bestimmen, wie viele Theile der Ebene, vermittelst einer gegebenen Anzahl gerader Linien und Kreise ganz begrenzt, oder zu Figuren abgeschlossen werden können." Sie haben dieselbe aber nicht so behandelt, dafs dadurch die, ihrer Bestimmung zu Grunde liegenden allgemeinen Gesetze gehörig erörtert worden wären. Noch weniger ist es, soviel

dem Verfasser dieser Abhandlung bekannt, bisher gelungen, nach Analogie jener Aufgabe, die Bildung der Körper mittelst beliebig gegebener Ebenen und Kugelflächen durch allgemein umfassende Gesetze zu bestimmen. Ohne diesem Gegenstande gerade ein besonderes Interesse beilegen zu wollen, soll nur bemerkt werden, dafs die von jedem Geometer gestellte Frage: „wie viele ebene Flächen zur Bildung dieses oder jenes Körpers nöthig seyen:" sich umkehren lasse, nemlich: „wie viele Körper lassen sich durch eine bestimmte Anzahl von Ebenen auf einmal bilden." Nun dringt sich, z. B. bei der nicht zu vermeidenden Erklärung: „dafs zur Bildung eines Körpers mindestens vier Ebenen nöthig sind," die Betrachtung auf: „dafs vier Ebenen in jeder beliebigen Zusammenstellung niemals mehr als einen Körper bilden können," und man kommt, von dieser Nothwendigkeit geleitet, leicht auf die Frage: „wie viele Körper können durch 4, 5, 6, 7, ... u. s. w. Ebenen auf einmal begrenzt werden?"

Es sollen hier, — nachdem zuvor die allgemeinen Gesetze über die Theilung der Ebene, mittelst jeder beliebten Anzahl gerader Linien und Kreise, ihrem Entstehen und Zusammenhange nach, entwickelt worden — „die allgemeinen Gesetze zur Bestimmung der, durch jede beliebte Zusammenstellung von Ebenen und Kugelflächen entstandenen Menge Theile des Raumes entwickelt werden," wobei sich dann zunächst die Bestimmung für die Anzahl der ebenen, und im Nachfolgenden für die Anzahl der körperlichen, ganz begrenzten Theile, von selbst ergeben wird.

Diese für sich verständlichen Sätze sind aus einem, vom Verfasser entworfenen Lehrgebäude der Geometrie, in welchem die Stereometrie um ein Grofses erweitert, und nach einer, von der bisherigen ganz abweichenden Methode abgehandelt wird, entnommen. Im Lehrgebäude erscheinen sie, vermöge der Menge ihrer Beziehungen in ihrem nothwendigen Zusammenhange.

Gesetze über die Theilung der Ebene mittelst gerader Linien und Kreise.

1.

Es ist klar, dafs eine gerade Linie *) durch n beliebige, in ihr liegende Puncte, in $n+1$ Theile **) getheilt wird, von denen $n-1$ Theile endlich oder begrenzt,

*) Unter gerade Linie oder Ebene wird hier immer eine unendliche gerade Linie oder Ebene verstanden.

**) So wie hier, werden auch in der Folge, wenn von Theilen der Ebene oder des Raumes die Rede ist, nur die einzelnen einfachen, nicht aber die zusammengesetzten Theile, welche aus zwei oder mehreren einzelnen Theilen bestehen, verstanden.

die beiden übrigen unendlich oder unbegrenzt sind; und dafs ferner die Kreislinie durch n beliebige, in ihr liegende Puncte, in n Theile getheilt wird.

2.

Die Ebene wird durch eine, in ihr liegende gerade Linie, in zwei Theile getheilt; durch eine zweite Gerade, welche die erste schneidet, wird die Zahl der Theile der Ebene um 2 vermehrt: durch eine dritte Gerade, welche die beiden ersten in zwei Puncten schneidet, um 3; durch eine vierte Gerade, welche die drei ersten in drei Puncten schneidet, um 4 u. s. w.: nemlich jede folgende Gerade vermehrt die Zahl der Theile der Ebene um eben so viel, als die Zahl der Theile beträgt, in welche sie durch die vorhandenen Geraden getheilt wird; daher wird die Ebene durch n beliebige, in ihr liegende Geraden, höchstens in:

$$1)\quad 2+2+3+4+5+\ldots\ldots\ldots+(n-1)+n=1+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=1+n+\frac{n(n-1)}{1.2}$$

Theile getheilt.

Will man blofs die Zahl der ganz begrenzten Theile der Ebene wissen, so ist zu bemerken, dafs erst durch die dritte Gerade ein solcher Theil entsteht, dafs hierauf die vierte Gerade die Zahl solcher Theile um 2, die fünfte Gerade um 3, u. s. w. vermehrt: nemlich, dafs jede folgende Gerade die Zahl der ganz begrenzten Theile der Ebene um eben so viel vermehrt, als durch die vorhergehenden Geraden in ihr begrenzte Theile (§ 1.) gebildet werden, und dafs demnach durch n beliebige Geraden höchstens

$$2)\quad 0+0+1+2+3+4+\ldots\ldots+(n-3)+(n-2)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$
$$=1-n+\frac{n(n-1)}{1.2}$$

Theile der Ebene ganz begrenzt werden können.

Zieht man den Ausdruck (2.) von (1.) ab, so bleibt für die Zahl der unbegrenzten Theile der Ebene,

$$3)\quad 2n$$

übrig. Oder sucht man umgekehrt zuerst die Zahl der unbegrenzten Theile, welche man findet, wenn man bemerkt, dafs jede Linie dieselbe um 2 vermehrt, mithin ihre Zahl nothwendig $2n$ ist, so findet man nachher die Zahl der ganz begrenzten Theile (2.), wenn man $2n$ von (1.) abzieht.

3.

Durch a gerade Parallelen wird die Ebene in $1+a$ Theile getheilt; durch eine zweite Abtheilung von b geraden Parallelen, welche jene schneiden, wird die Zahl der Theile der Ebene um $b(1+a)$ vermehrt; durch eine dritte Abtheilung von c geraden Parallelen, welche die beiden ersten Abtheilungen so schneiden, daſs nirgend drei Linien in einem und demselben Punct zusammentreffen, wird die Zahl der Theile der Ebene um $c(1+a+b)$ vergröſsert. Verbindet man ferner mit den vorhandenen Linien, unter ähnlichen Bedingungen eine vierte Abtheilung von d geraden Parallelen, so nimmt die Zahl der Theile um $d(1+a+b+c)$ zu, indem nemlich jede der d Linien von den vorhandenen a, b, c Linien in $1+a+b+c$ Theile getheilt wird (§ 1.), und daher eben so viele Theile der Ebene theilt, mithin die Zahl derselben ebenfalls um $1+a+b+c$ vermehrt, u. s. w. Es folgt hieraus:

„Daſs durch $a, b, c, d, \ldots\ldots, y, z$ gerade Parallelen, von denen jede Abtheilung eine besondere Richtung hat, die Ebene höchstens in

$$4)\quad \begin{aligned} &1+a \\ &+b(1+a) \\ &+c(1+a+b) \\ &+d(1+a+b+c) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+z(1+a+b+c+d\ldots\ldots+y) \\ =\ &1 \\ &+a+b+c+d+\ldots\ldots y+z \\ &+ab+ac+\ldots\ldots bc+bd+\ldots\ldots+yz \end{aligned}$$

Theile getheilt werden könne." Bezeichnet man die Summe (Unionen) der Gröſsen $a, b, c, d, \ldots\ldots, y, z$ durch U, und die Summe ihrer Producte zu zweien (Amben) durch A, so ist (4.):

$$5)\quad = 1+U+A.$$

Daſs die Zahl der unbegrenzten Theile der Ebene im gegenwärtigen Falle, ebenfalls doppelt so groſs, als die Anzahl aller vorhandenen Linien ist, ergiebt sich aus der nemlichen Bemerkung, wie vorhin (§ 2.), daſs nemlich die Zahl solcher Theile durch jede Linie um 2 vermehrt wird. Oder stellt man sich einen Kreis vor, welcher alle vorhandenen Linien schneidet, und zwar dergestalt, daſs die Durchschnittspuncte, welche die Linien unter einander bilden, alle innerhalb des Kreises fallen, so wird die Peripherie dieses Kreises in eben so viele

Theile

Theile getheilt, als die Ebene unbegrenzte Theile hat. Da nun der Kreis von jeder Linie in 2 Puncten geschnitten wird, so wird er in zwei mal so viele Theile getheilt, als Linien vorhanden sind (§ 1.), also in $2U$ Theile, und folglich ist die Zahl der unbegrenzten Theile der Ebene,

$$6) \quad = 2U.$$

Nun erhält man die Zahl der ganz begrenzten Theile der Ebene, indem man die Zahl der unbegrenzten (6.) von der Zahl aller Theile (5.) abziehet. Also werden durch die genannte Linien-Verbindung höchstens

$$7) \quad = 1 - U + A$$

Theile der Ebene ganz begrenzt. Dieser Ausdruck (7.) kann auch auf gleiche Weise direct gefunden werden, wie (5.) oder wie (§. 2, 2.).

4.

Nimmt man an, daſs bei der Linien-Verbindung (§. 3.) die a Linien der ersten Abtheilung, anstatt parallel, ungleichlaufend seyen: so theilen sie die Ebene in $1 + \frac{a(a+1)}{1\,.\,2}$ (1.), statt in $1 + a$ Theile, mithin in $\frac{a(a-1)}{1\,.\,2}$ Theile mehr, als wenn sie parallel sind; auf die übrigen Abtheilungen aber hat diese Veränderung keinen Einfluſs. Also folgt:

„Daſs die Ebene durch $b, c, d, \ldots\ldots, y, z$ gerade Parallelen nach verschiedenen Richtungen und durch a ungleichlaufende Geraden höchstens in:

$$8) \quad = 1 + U + A + \frac{a(a-1)}{1\,.\,2}$$

Theile getheilt wird, unter welchen sich

$$9) \quad = 2U$$

unbegrenzte, und mithin

$$10) \quad = 1 - U + A + \frac{a(a-1)}{1\,.\,2}$$

ganz begrenzte Theile befinden, wo U und A, eben wie in (§. 3.), die Unionen und Amben der Gröſsen $a, b, c, d, \ldots\ldots, y, z$ bedeuten."

5.

Ein Kreis theilt die Ebene in 2 Theile; ein zweiter Kreis, welcher den ersten schneidet, vermehrt die Zahl der Theile der Ebene um 2; ein dritter Kreis, welcher die beiden ersten in 4 Puncten schneidet, vermehrt diese Zahl um 4, u. s. w.; nemlich jeder folgende Kreis vermehrt die Zahl der Theile der Ebene

um eben so viel, als er die vorhandenen Kreise in Puncten schneiden kann, also um zweimal die Zahl der vorhergehenden Kreise. Es folgt also:

„Dafs $\mathfrak{n}$ beliebige Kreise die Ebene höchstens in

$$11)\quad 2+2+4+6+8+\ldots\ldots+2(\mathfrak{n}-1)=2+\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)$$

Theile theilen können, von welchen

$$12)\quad =1+\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)$$

ganz begrenzt sind, und nur *ein* Theil unbegrenzt ist."

6.

Die Ebene wird durch irgend eine Zahl $\mathfrak{a}$ von Parallelkreisen in $1+\mathfrak{a}$ Theile getheilt; durch eine zweite Abtheilung von $\mathfrak{b}$ Parallelkreisen, welche jene schneiden, wird die Zahl der Theile der Ebene um $1-\mathfrak{a}+2\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ (nemlich durch den ersten derselben um $1+\mathfrak{a}$ und durch jeden folgenden um $2\mathfrak{a}$) vermehrt; durch eine dritte Abtheilung von $\mathfrak{c}$ Parallelkreisen, welche die ersten schneiden, wird die genannte Zahl um $2\mathfrak{c}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$, durch eine vierte Abtheilung von $\mathfrak{d}$ Parallelkreisen um $2\mathfrak{d}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ u. s. w. vermehrt; nemlich jeder Kreis einer neuen Abtheilung vermehrt die Zahl der Theile der Ebene gerade um eben so viel, als er von den schon verhandenen Kreisen in Theile getheilt wird. (Hiervon ist blos der erste Kreis der zweiten Abtheilung ausgenommen.)

„Demzufolge wird die Ebene durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots\ldots \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ Parallelkreise, von denen jede Abtheilung ihren besondern Mittelpunct hat, höchstens in:

$$\begin{aligned}13)\quad & 1+\mathfrak{a}\\ & 1-\mathfrak{a}+2\mathfrak{a}\mathfrak{b}\\ & \qquad +2\mathfrak{c}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\\ & \qquad +2\mathfrak{d}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\\ & \qquad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & \qquad +2\mathfrak{z}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\ldots\ldots+\mathfrak{y})\\ & \qquad\quad =2+2\mathfrak{A}\end{aligned}$$

Theile getheilt, von welchen

$$14)\quad =1+2\mathfrak{A}$$

ganz begrenzt sind, und nur einer unbegrenzt ist, und wo $\mathfrak{A}$ die Amben, d. h. die Summe aller Producte bedeutet, die entstehen, wenn man jede zwei von den Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots\ldots \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ mit einander multiplicirt.

7.

Sind die $\mathfrak{a}$ Kreise der ersten Abtheilung nicht parallel, so wird die Zahl der Theile der Ebene dadurch höchstens um eben so viel vermehrt, als die Zahl

der Durchschnitte dieser $\mathfrak{a}$ Kreise beträgt, also um $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)$, und folglich wird die Ebene durch $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots\ldots \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ Parallelkreise und durch $\mathfrak{a}$ beliebige Kreise höchstens in

$$15) \quad = 2 + 2\mathfrak{A} + \mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)$$

Theile getheilt, wovon

$$16) \quad = 1 + 2\mathfrak{A} + \mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)$$

Theile ganz begrenzt sind.

8.

Nach (§. 3, 5) wird die Ebene durch $a, b, c, \ldots\ldots y, z$ gerade Parallelen in $1 + U + A$ Theile getheilt. Werden nun alle diese Geraden von $\mathfrak{a}$ Parallelkreisen geschnitten, so nimmt die Zahl der Theile der Ebene um $2\mathfrak{a}(a + b + c + \ldots\ldots + z) = 2\mathfrak{a}U$ zu, durch eine zweite Abtheilung von $\mathfrak{b}$ Parallelkreisen wächst diese Zahl um $2\mathfrak{b}(U + \mathfrak{a})$, durch eine dritte Abtheilung von $\mathfrak{c}$ Parallelkreisen um $2\mathfrak{c}(U + \mathfrak{a} + \mathfrak{b})$, u. s. w., nemlich jeder Kreis einer neuen Abtheilung vermehrt die Zahl der Theile der Ebene um eben so viel, als die Zahl der Puncte beträgt, in welchen er alle vorhandenen Kreise und Geraden schneidet. Es folgt hieraus:

„Dafs die Ebene durch $a, b, c, d, \ldots\ldots y, z$ gerade Parallelen und durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots\ldots \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ Parallelkreise höchstens in

$$\begin{aligned} 17) \quad 1 + U + A &+ 2\mathfrak{a}U \\ &+ 2\mathfrak{b}(U + \mathfrak{a}) \\ &+ 2\mathfrak{c}(U + \mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \\ &+ 2\mathfrak{d}(U + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ 2\mathfrak{z}(U + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \ldots\ldots + \mathfrak{y}) \\ = 1 + U + A &+ 2U\mathfrak{U} + 2\mathfrak{A} \end{aligned}$$

Theile getheilt wird, wovon (§. 3, 6.)

$$18) \quad = 2U$$

unbegrenzt, und folglich

$$19) \quad = 1 - U + A + 2U\mathfrak{U} + 2\mathfrak{A}$$

ganz begrenzt sind, und wobei U und A die Unionen und Amben der Zahlen $a, b, c, \ldots\ldots z$, und $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{A}$ die Unionen und Amben der Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots\ldots \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ bedeuten."

9.

Sind in der oben beschriebenen Verbindung von Geraden und Kreisen (§. 8.) sowohl die a Geraden als die $\mathfrak{a}$ Kreise, jede unter sich, nicht parallel, so wird

die Zahl der Theile der Ebene dadurch um eben so viel vergrößert, als die Zahl der Durchschnittspunkte beträgt, in welchen sowohl die Linien a als die Kreise $\mathfrak{a}$ einander schneiden, also wird jene Zahl höchstens um $\frac{a(a-1)}{1\,.\,2}+\mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)$ vermehrt, und daher folgt:

„Dafs $b, c, d, \ldots\ldots z$ gerade Parallelen und a beliebige Geraden, ferner $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots\ldots \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ Parallelkreise und $\mathfrak{a}$ beliebige Kreise zusammen die Ebene höchstens in:

$$20)\quad = 1 + U + A + 2U\mathfrak{U} + 2\mathfrak{A} + \frac{a(a-1)}{1\,.\,2} + \mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)$$

Theile theilen können, von welchen

$$21)\quad = 2U$$

unvollkommen, und dagegen

$$22)\quad = 1 - U + A + 2U\mathfrak{U} + 2\mathfrak{A} + \frac{a(a-1)}{1\,.\,2} + \mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)$$

ganz begrenzt sind."

10.

Setzt man in der vorliegenden Verbindung von Geraden und Kreisen, sowohl $b = c = d = \ldots\ldots = z = 0$, als auch $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \mathfrak{d} = \ldots\ldots = \mathfrak{z} = 0$, so findet man:

„Dafs durch a beliebige Geraden und $\mathfrak{a}$ beliebige Kreise die Ebene höchstens in

$$23)\quad = 1 + a + 2a\mathfrak{a} + \frac{a(a-1)}{1\,.\,2} + \mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)$$

Theile getheilt wird, von welchen

$$24)\quad = 2a$$

nur unvollkommen, dagegen

$$25)\quad = 1 - a + 2a\mathfrak{a} + \frac{a(a-1)}{1\,.\,2} + \mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)$$

ganz begrenzt sind."

11.

Es ist leicht zu sehen, dafs die Formeln (11, 13 und 15.) eben sowohl für die Kugelfläche, als für die Ebene gelten, nemlich:

„Dafs die Kugelfläche durch $\mathfrak{n}$ beliebige, in ihr liegende Kreise höchstens in

$$26)\quad = 2 + \mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)$$

Theile getheilt werden kann;" und ferner:

„Dafs die Kugelfläche durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots\ldots \mathfrak{z}$ Parallelkreise höchstens in

$$27) \quad = 2 + 2\mathfrak{A}$$

und durch $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots\ldots \mathfrak{z}$ Parallelkreise und $\mathfrak{a}$ beliebige Kreise höchstens in

$$28) \quad = 2 + 2\mathfrak{A} + \mathfrak{a}(\mathfrak{a} - 1)$$

Theile getheilt werden kann."

Gesetze über die Theilung des Raumes mittelst Ebenen und Kugelflächen.

12.

Der Raum wird durch a Parallelebenen in $1 + a$ Theile getheilt; durch eine zweite Abtheilung von b Parallelebenen, welche die ersteren durchschneiden, nimmt die Zahl der Raumtheile um $b\,(1 + a)$ zu, durch eine dritte Abtheilung von c Parallelebenen, welche die beiden ersten Abtheilungen schneiden, nimmt jene Zahl höchstens um $c(1 + a + b + ab)$ zu, nemlich durch jede der c Ebenen wird die Zahl der Raumtheile gerade um eben so viel vergröſsert, als die Zahl der Theile beträgt, in welche diese Ebene durch die vorhandenen Ebenen getheilt wird. Nun wird jede der c Ebenen durch die a und b Ebenen, nach (§. 3, 5), in $1 + a + b + ab$ Theile getheilt, und mithin wird durch sie die Zahl der Raumtheile um eben so viel vergröſsert. Aus gleichen Gründen steigt die Zahl der Raumtheile durch eine vierte Abtheilung von d Prallelebenen, welche die vorhandenen Ebenen auf gehörige Weise schneiden, um $d(1 + a + b + c + ab + ac + bc)$, u. s. w. Daraus folgt:

„Daſs der Raum durch $a, b, c, d, \ldots\ldots y, z$ Parallelebenen, von denen jede Abtheilung eine eigenthümliche Richtung hat, höchstens in:

$$\begin{aligned} 29) \quad & 1 + a \\ & + b\,(1 + a) \\ & + c\,(1 + a + b + ab) \\ & + d\,(1 + a + b + c + ab + ac + bc) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + z(1 + a + b + \ldots. + y + ab + ac + \ldots.\, ay + bc + \ldots. + \ldots. + xy) \\ = {} & 1 + U + A + T \end{aligned}$$

Theile getheilt werden kann," wo durch U, A und T die Unionen, Amben und Ternen der Zahlen $a, b, c, d, \ldots\ldots y, z$, d. h. die Summe der Zahlen, die Summe aller Producte zu zweien, und die Summe aller Producte zu dreien, ohne Wiederholung, bedeuten.

Um nun zu finden, wie viele von diesen Theilen nur unvollkommen, und

wie viele ganz begrenzt sind, stelle man sich eine Kugelfläche vor, welche alle ganz begrenzten Raumtheile einschliefst. Diese Kugelfläche wird durch die vorhandenen Ebenen in eben so viele Theile getheilt, als es unbegrenzte Raumtheile giebt; es theilen aber die Ebenen die Kugelfläche, nach (27), in $2+2A$ Theile (wo A die Amben der Zahlen $a, b, c, d, \ldots\ldots z$ vorstellt): also ist auch die Zahl der unvollkommen begrenzten Raumtheile:

$$30) \quad = 2 + 2A,$$

und folglich die Zahl der ganz begrenzten, oder der Körper (wenn man (30) von (29) abzieht):

$$31) \quad = -1 + U - A + T.$$

Die beiden Ausdrücke (30) und (31) können übrigens auch auf ähnliche Weise gefunden werden, wie die Formel (29).

13.

Nimmt man an, jede der genannten Abtheilungen (§. 12.) bestehe nur aus einer Ebene, und die Anzahl der Abtheilungen sey $= n$, d. h., nimmt man an, es sey $a = b = c = \ldots\ldots = z = 1$, und zugleich $a + b + c + \ldots\ldots + z = n$, so ist offenbar $U = n$, $A = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ und $T = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Also folgt:

„Dafs n beliebige Ebenen den Raum höchstens in (29):

$$32) \quad = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Theile theilen können, von welchen (30)

$$33) \quad = 2 + n(n-1)$$

unvollkommen und (31)

$$34) \quad = -1 + n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

ganz begrenzt sind."

Wie man sieht, zeigt die Formel (34), wie gehörig, an, dafs nicht weniger als 4 Ebenen einen Körper begrenzen, und dafs dieselben nur einen Körper begrenzen können. Ferner zeigt sie, dafs 5 Ebenen auf einmal 4, 6 Ebenen auf einmal 10, 7 Ebenen 20, und z. B. 100 Ebenen auf einmal 156849 Körper begrenzen können, und zwar findet solches allemal Statt, wenn von den Ebenen nicht drei mit einer und derselben Linie parallel

sind, und auch nicht vier Ebenen durch einen und denselben Punct gehen.

14.

Nimmt man an, dafs blofs einige Abtheilungen nur eine einzige Ebene enthalten, z. B. dafs $q = r = s = \ldots\ldots = z = 1$ und $q + r + s + \ldots\ldots + z = m$ sey, und bezeichnet die Unionen, Amben und Ternen der Zahlen $a, b, c, d, \ldots\ldots p$, welche die Anzahl Ebenen der übrigen Abtheilungen bezeichnen, durch U_1, A_1 und T_1, so ist $U = U_1 + m$; $A = A_1 + mU_1 + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}$; $T = T_1 + mA_1 + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}U_1 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$, woraus folgt:

„Dafs durch $a, b, c, \ldots\ldots$ Parallelebenen, von denen jede Abtheilung eine besondere Richtung hat, und durch m beliebige Ebenen der Raum höchstens in:

$$35) = 1 + U_1 + A_1 + T_1 + \frac{m(m+1)}{1\,.\,2}U_1 + mA_1 + m + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

Theile getheilt wird, von denen

$$36)\quad 2 + 2A_1 + 2mU_1 + m(m-1)$$

nur zum Theil, dagegen aber

$$37) = -1 + U_1 - A_1 + T_1 + \frac{m(m-3)}{1\,.\,2}.U_1 + m - \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

ganz begrenzt sind."

15.

Werden die verschiedenen Abtheilungen von $a, b, c, \ldots\ldots z$ Parallelebenen (§. 12.) von $\mathfrak{a}$ Parallelkugelflächen (concentrischen Kugelflächen) durchschnitten, so steigt dadurch die Anzahl der Raumtheile um $\mathfrak{a}(2 + 2A)$, nemlich durch jede Kugelfläche gerade um eben so viel, als sie von den vorhandenen Ebenen in Theile getheilt wird, also durch jede um $2 + 2A$ (§. 12.); durch eine zweite Abtheilung von $\mathfrak{b}$ Parallelkugelflächen, welche sowohl die vorhandenen Ebenen, als auch die $\mathfrak{a}$ Kugelflächen durchschneiden, nimmt die Zahl der Raumtheile um $\mathfrak{b}(2 + 2A + 2\mathfrak{a}U)$ zu, weil nemlich jede der $\mathfrak{b}$ Kugelflächen durch die vorhandenen Ebenen und Kugelflächen, nach (27), in $2 + 2A + 2\mathfrak{a}U$ Theile getheilt wird, und sie mithin die Zahl der Raumtheile um eben so viel vermehrt. Aus gleichen Gründen folgt, dafs durch eine dritte Abtheilung von $\mathfrak{c}$ Parallelkugelflächen, welche alle vorhandenen Ebenen und Kugelflächen schneiden, die Zahl der Raumtheile höchstens um $\mathfrak{c}\,[2 + 2A + 2(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\cdot U + \mathfrak{a}\mathfrak{b}]$,

desgleichen durch eine vierte Abtheilung von $\mathfrak{d}$ Parallelkugelflächen, um $\mathfrak{d}[2+2A+2(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})U+2\mathfrak{ab}+2\mathfrak{ac}+2\mathfrak{bc}]$, u. s. w. vermehrt wird. Daraus folgt:

„Dafs der Raum durch $a, b, c, \ldots\ldots z$ Parallelebenen, verbunden mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots\ldots \mathfrak{z}$ Parallelkugelflächen, höchstens in:

$$38)\quad 1+U+A+T \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (\text{§. } 12.)$$
$$+\mathfrak{a}(2+2A)$$
$$+\mathfrak{b}(2+2A+2\mathfrak{a}U)$$
$$+\mathfrak{c}[2+2A+2(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})U+2\mathfrak{ab}]$$
$$+\mathfrak{d}[2+2A+2(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})U+2\mathfrak{ab}+2\mathfrak{ac}+2\mathfrak{bc}]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\mathfrak{z}[2+2A+2(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\ldots\mathfrak{y})U+2\mathfrak{ab}+2\mathfrak{ac}+\ldots+2\mathfrak{xy}]$$
$$=1+U+A+T+2\mathfrak{U}A+2\mathfrak{A}U+2\mathfrak{U}+2\mathfrak{T}$$

Theile getheilt wird, von welchen (§. 12.):

$$39)\quad =2+2A$$

nur zum Theil, dagegen die übrigen:

$$40)\quad =-1+U-A+T+2\mathfrak{U}A+2\mathfrak{A}U+2\mathfrak{U}+2\mathfrak{T}$$

ganz begrenzt sind." U, A, T bedeuten die Unionen, Amben und Ternen der Zahlen $a, b, c, \ldots\ldots z$ und $\mathfrak{U}, \mathfrak{A}, \mathfrak{T}$ die Unionen, Amben und Ternen der Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots\ldots \mathfrak{z}$.

16.

Aus den allgemeinen Ausdrücken (§. 15.) lassen sich folgende spezielle ableiten: Setzt man $a=b=c=\ldots\ldots=z=1$ und $a+b+c+\ldots\ldots+z=n$, desgleichen $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=\mathfrak{c}=\ldots\ldots=\mathfrak{z}=1$ und $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\ldots\ldots+\mathfrak{z}=\mathfrak{n}$, so ist:

$$U=n;\quad A=\frac{n(n-1)}{1\,.\,2};\quad T=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3},$$
$$\mathfrak{U}=\mathfrak{n};\quad \mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)}{1\,.\,2};\quad \mathfrak{T}=\frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)(\mathfrak{n}-2)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

und es folgt:

„Dafs n beliebige Ebenen, verbunden mit $\mathfrak{n}$ beliebigen Kugelflächen, den Raum höchstens in (38):

$$41)\quad =1+n+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\mathfrak{n}n(n-1)+n\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)$$
$$+2\mathfrak{n}+2\frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)(\mathfrak{n}-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

Theile theilen, von welchen

42)

$$42) \quad = 2 + n(n-1)$$

nur zum Theil, und

$$43) \quad = -1 + n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \mathfrak{n}n(n-1)$$
$$+ n\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1) + 2\mathfrak{n} + 2\frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)(\mathfrak{n}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

ganz begrenzt sind."

17.

Reduciren sich die Ebenen und Kugelflächen blofs einiger Abtheilungen auf eine einzige Ebene oder Kugelfläche, z. B. so, dafs $q = r = s = \ldots\ldots = z = 1$ und $q + r + s + \ldots\ldots + z = m$, desgleichen $\mathfrak{q} = \mathfrak{r} = \mathfrak{s} = \ldots\ldots = \mathfrak{z} = 1$, und $\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + \mathfrak{s} + \ldots\ldots + \mathfrak{z} = \mathfrak{m}$ ist, so ist, wenn man die Unionen, Amben und Ternen der (übrigen) Zahlen $a, b, c, \ldots\ldots p$ durch U_1, A_1 und T_1, und der Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots\ldots \mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{T}_1$ bezeichnet:

$$U = U_1 + m; \quad A = A_1 + mU_1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}; \quad T = T_1 + mA_1$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}U_1 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$
$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{m}; \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{m}\mathfrak{U}_1 + \frac{\mathfrak{m}(\mathfrak{m}-1)}{1 \cdot 2}; \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{m}\mathfrak{A}_1$$
$$+ \frac{\mathfrak{m}(\mathfrak{m}-1)}{1 \cdot 2}\mathfrak{U}_1 + \frac{\mathfrak{m}(\mathfrak{m}-1)(\mathfrak{m}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Formeln (§. 15.), so folgt:

„Dafs der Raum durch $a, b, c, \ldots\ldots p$ Parallelebenen und m beliebige Ebenen, verbunden mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots\ldots \mathfrak{p}$ Parallelkugelflächen und $\mathfrak{m}$ beliebigen Kugelflächen, höchstens in:

$$44) \quad = 1 + U_1 + A_1 + T_1 + 2\mathfrak{U}_1 A_1 + 2\mathfrak{A}_1 U_1 + 2\mathfrak{U}_1 + 2\mathfrak{T}_1$$
$$+ \left(\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} + \mathfrak{m}(\mathfrak{m}-1) + 2m\mathfrak{m}\right)U_1 + (m+2\mathfrak{m})A_1 + 2(m+\mathfrak{m})\mathfrak{U}_1 U_1$$
$$+ (m+\mathfrak{m})(m+\mathfrak{m}-1)\mathfrak{U}_1 + 2(m+\mathfrak{m})\mathfrak{A}_1 + m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ m\mathfrak{m}(m+\mathfrak{m}-2) + 2\mathfrak{m} + 2\frac{\mathfrak{m}(\mathfrak{m}-1)(\mathfrak{m}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Theile getheilt werden kann, von welchen

$$45) \quad = 2 + 2A_1 + 2mU_1 + m(m-1)$$

nur zum Theil, und

$$56)\quad = 2\mathfrak{U}_2 + 2\mathfrak{T}_2 + \mathfrak{m}(\mathfrak{m}-1)\mathfrak{U}_2 - 4\frac{(\mathfrak{m}-1)\mathfrak{m}(\mathfrak{m}+1)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$57)\quad = -1 + 2\mathfrak{U}_2 + 2\mathfrak{T}_2 + \mathfrak{m}(\mathfrak{m}-1)\mathfrak{U}_2 - 4\frac{(\mathfrak{m}-1)\mathfrak{m}(\mathfrak{m}+1)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

32.

Leichter Beweis eines stereometrischen Satzes von Euler, nebst einem Zusatze zu Satz X. S. 48 im 1. Heft dieses Journals.

(Von Herrn *J. Steiner.*)

Bekanntlich hat *Euler* zuerst den für die Theorie der Polyëder wichtigen und fruchtbaren Satz aufgestellt und bewiesen:

„Dafs bei jedem, von ebenen Flächen begrenzten Körper die Anzahl der Ecken E und die Anzahl der Seitenflächen F zusammen immer um 2 gröfser ist, als die Anzahl der Kanten K, also dafs

$$E + F = K + 2$$

ist."

Später hat *Legendre*, mit Hülfe des Satzes vom Inhalte sphärischer Vielecke, einen einfacheren Beweis des Eulerschen Satzes gegeben, welchen auch z. B. *M. Hirsch* in seine Sammlung geom. Aufgaben aufgenommen hat. Dieser Beweis, obschon sehr sinnreich, befriedigte den Verfasser dieses Aufsatzes bei dem geometrischen Werke, an welchem er arbeitet, deshalb nicht, weil er ihn, seinen Zwecken gemäfs, nicht unter die ersten Betrachtungen über die von ebenen Flächen begrenzten Körper aufnehmen konnte. Er vermuthete, dafs ein so einfaches Gesetz sich auch durch eine einfachere Betrachtung müsse beweisen lassen, und seine Vermuthung bestätigte sich, da er nicht allein selbst einen befriedigenden Beweis fand, sondern auch später erfuhr *), dafs schon *Cauchy* (*XVI. cahier* des Journals der *École Polytechnique*) zwei höchst einfache und elementare Beweise desselben Satzes gegeben habe, desgleichen dafs Professor *Rothe*, in

---

*) Heft III. Seite 228. dieses Journals.

dem Kastner'schen Archiv der gesammten Naturlehre, Band IV., ebenfalls einen Beweis des nemlichen Satzes mitgetheilt habe, den er für neu hält, der es aber eigentlich nicht ist, sondern, der Hauptsache nach, auf denselben Gründen beruht, wie der Cauchy'sche, nur daſs ihm die Kürze und Einfachheit desselben mangelt. Endlich fand der Verfasser, daſs *Gorgonne*, in einem Auszuge aus einer Abhandlung von *Lhuilier*, einen eigenthümlichen Beweis des Satzes mitgetheilt hat, der mit dem hier folgenden, von ihm gefundenen, im Wesentlichen übereinkommt. Er theilt den seinigen mit, weil er, seiner Einfachheit wegen, allgemein bekannt zu seyn verdient.

Es sey im Raum irgend ein, von ebenen Flächen begrenzter Körper gegeben. Aus irgend einem Punct, der auſserhalb desselben, und mit keiner seiner Seitenflächen in einerlei Ebene liegt, projizire man die Oberfläche des Körpers auf irgend eine beliebige Ebene, so entsteht in dieser Ebene ein Netz, wie z. B. Fig. 4., welches eben so viele Vielecke derselben Gattung, eben so viele gerade Linien und eben so viele Puncte (A, B, C, ... a, b, c, ... α, β, γ, ...) hat, als der Körper respective Seitenflächen, Kanten und Ecken.

Bezeichnet man nun, wie oben, durch F, K und E respective, die Seitenflächen, Kanten und Ecken des Körpers, so läſst sich die Summe der Winkel Σ aller Vielecke des Netzes zusammen auf folgende zwei Arten ausdrücken:

Erstlich. Wenn man erwägt, daſs jede Linie der Figur Seite zweier Vielecke ist, und daſs die Summe der Winkel jedes Vielecks, so oft mal 2 R. (2 Rechte) beträgt, als es Seiten hat, weniger 4 R., mithin die Winkelsumme aller Vielecke zusammen so oft mal 4 R. ausmacht, als in der Figur Linien vorhanden sind, weniger so oft mal 4 R., als Vielecke da sind, so folgt, daſs

$$1)\quad \Sigma = 4R.K - 4R.F.$$

Zweitens. Wenn man erwägt, daſs die Winkel an den Grenzpuncten A, B, C, D, ..., welche zusammen zwei mal die Winkel des Grenzvielecks $ABCD$...... ausmachen, so oft mal 4 R betragen, als Grenzpuncte sind, weniger 8 R, und daſs ferner, um jeden, im Innern der Figur liegenden Punct a, b, c, d, ..., α, β, γ, δ, ... die Winkelsumme gerade 4 R beträgt, also alle zu summirenden Winkel zusammen so oft mal 4 R betragen, als Puncte A, B, C, ... a, b, c, ... α, β, γ ...... vorhanden sind, weniger 8 R, so ist

$$2)\quad \Sigma = 4R.E - 8R.$$

Aus (1.) und (2.) folgt, daſs

$$4R.K - 4R.F = 4R.E - 8R,$$

oder

$$K - F = E - 2,$$

oder

$$K + 2 = E + F,$$

welches der Euler'sche Satz ist.

Da jedes einzelne Vieleck des Netzes von einer Seitenfläche des Körpers, die ein Vieleck derselben Gattung ist, herrührt, so ist die Winkelsumme aller Vielecke des Netzes gleich der Winkelsumme aller Seitenflächen des Körpers, und daher folgt auch aus (2.):

„Dafs die Winkelsumme aller Seitenflächen eines Körpers zusammengenommen so oft mal 4 R beträgt, als der Körper Ecken hat, weniger 8 R."

Dieser Satz ist, wie man sieht, auf merkwürdige Weise mit dem über die Winkelsumme des Vielecks in der Ebene analog.

Eine grofse Menge merkwürdiger Folgerungen aus dem obigen Satze nebst andern polyëdrischen Sätzen findet man in zwei Abhandlungen von *Euler*, in den *Novi Commentarii acad. scient. Petrop. Tom. IV. p.* 109 und 140; in den Elementen der Geometrie von *Legendre* (S. 380 und 409 der *Crelle*'schen Uebersetzung); im zweiten Theil der Sammlung geom. Aufgaben von *M. Hirsch* (S. 89 — 100); in den *Annales de mathématiques* von *Gergonne, Tom. III. p.* 169, *Tom. IX. p.* 321, und *Tom. XV. p.* 157. —

Ich schliefse diesen Aufsatz mit der nachträglichen Bemerkung, dafs sich aus dem Satze X. S. 48 Heft I. dieses Journals leicht der folgende herleiten lasse:

„Wenn in einer Ebene eine Ellipse der Gröfse und Lage nach gegeben ist, und die Glastafel in beliebiger veränderlicher Lage auf der Ebene senkrecht steht, so ist der Ort des Auges, wenn die Ellipse als Kreis erscheinen soll, eine Fläche vierten Grades. Sind a, b die Halbaxen der Ellipse, und wählt man die gegebene Ebene nebst den beiden, auf ihr senkrecht stehenden und durch die Axen der Ellipse gehenden Ebenen zu Coordinaten-Ebenen, so ist die Gleichung dieser interessanten Fläche:

$$A) \quad a^2b^2z^2(a^2y^2+b^2x^2) - (a^4y^2+b^4x^2)(a^2y^2+b^2x^2) = -a^2b^2(a^4y^2+b^4x^2)."$$

Wird $a = b$ gesetzt, d. h., ist anstatt der Ellipse ein Kreis, dessen Radius $= a$, gegeben, so reduzirt sich die Fläche auf den zweiten Grad, nemlich auf

$$B) \quad z^2 - y^2 - x^2 = -a^2,$$

d. h., auf diejenige Fläche zweiten Grades, die von einer gleich-

seitigen Hyperbel, welche sich um ihre zweite Axe herumbewegt, beschrieben wird.

Es folgt daher umgekehrt der nachstehende Satz:

„Wird eine gleichseitige Hyperbel um ihre zweite Axe herumbewegt, so beschreibt sie eine einfache hyperbolische Fläche zweiten Grades, und die Scheitel der ersten Axe beschreiben einen in dieser Fläche liegenden Kreis. Jeder beliebige Kegel nun, dessen Scheitel in der Fläche liegt, und welcher durch den Kreis geht, ist so beschaffen, daſs die Ebenen der diesem Kreise antiparallelen Kreisschnitte mit der genannten Drehaxe parallel sind, und daſs also die Ebenen irgend zweier antiparallelen Kreisschnitte dieses Kegels zu einander senkrecht sind."

Wenn oben statt der Ellipse eine Hyperbel, deren Halbaxen ebenfalls a, b seyn sollen, gegeben ist, so erhält man anstatt der Fläche (A) die folgende:

$$C)\quad a^2b^2z^2(b^2x^2-a^2y^2)+(b^4x^2+a^4y^2)(b^2x^2-a^2y^2)=a^2b^2(b^4x^2+a^4y^2).$$

Jede der beiden Flächen (A) und (C) hat die Eigenschaft, daſs sie durch Bewegung einer veränderlichen Curve zweiten Grades erzeugt wird, nemlich jede Ebene, welche durch die z Axe geht, schneidet die Fläche in einer solchen Curve.

33.

Allgemeine Entwickelung von $(x+a)^n$.

(Von Herrn Dr. *Burg.*)

$$(x+a)^n = x^n + n\alpha(x+t_1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha A(x+t_1+t_2)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha B(x+t_1+t_2+t_3)^{n-3} + \frac{n\ldots(n-3)}{1\ldots 4}\alpha C(x+t_1+t_2+t_3+t_4)^{n-4}\text{ u.s.w.}$$

Dabei haben die Coefficienten A, B, C, u. s. w. die Werthe:

$$A=(\alpha-2t_1),$$

$$B=\left[\alpha^2-3\alpha(t_1+t_2)+3t_1(t_1+2t_2)\right],$$

$$C=\left[\alpha^3-4\alpha^2(t_1+t_2+t_3)+6\alpha(t_1+t_2)(t_1+t_2+2t_3)-4t_1\left(t_1^2+3t_1(t_2+t_3)+3t_2(t_2+2t_3)\right)\right],$$

$$D = \Big[a^4 - 5a^3(t_1+t_2+t_3+t_4) + 10a^2(t_1+t_2+t_3)(t_1+t_2+t_3+2t_4)$$
$$- 10a(t_1+t_2)\big((t_1+t_2)^2 + 3(t_1+t_2)(t_3+t_4) + 3t_3(t_3+2t_4)\big)$$
$$+ 5t_1\big(t_1^3 + 4t_1^2(t_2+t_3+t_4) + 6t_1(t_2+t_3)(t_2+t_3+2t_4)$$
$$+ 4t_2\big(t_2^2 + 3t_2(t_3+t_4) + 3t_3(t_3+2t_4)\big)\big)\Big],$$

u. s. w., wo t_1, t_2, t_3 u. s. w. ganz willkürliche Gröfsen sind.

Eine aufmerksame Betrachtung giebt das Gesetz zu erkennen, nach welchem diese Coeffizienten der Reihe nach gebildet sind, so dafs ich dadurch ganz leicht für den folgenden Coeffizienten erhalte:

$$E = \Big[a^5 - 6a^4(t_1+t_2+t_3+t_4+t_5) + 15a^3(t_1+t_2+t_3+t_4)(t_1+t_2+t_3+t_4+2t_5)$$
$$- 20a^2(t_1+t_2+t_3)\big((t_1+t_2+t_3)^2 + 3(t_1+t_2+t_3)(t_4+t_5) + 3t_4(t_4+2t_5)\big)$$
$$+ 15a(t_1+t_2)\big((t_1+t_2)^3 + 4(t_1+t_2)^2(t_3+t_4+t_5) + 6(t_1+t_2)(t_3+t_4)(t_3+t_4+2t_5)$$
$$+ 4t_3\big(t_3^2 + 3t_3(t_4+t_5) + 3t_4(t_4+2t_5)\big)\big) - 6t_1\Big[t_1^4 + 5t_1^3(t_2+t_3+t_4+t_5)$$
$$+ 10t_1^2(t_2+t_3+t_4)(t_2+t_3+t_4+2t_5) + 10t_1(t_2+t_3)\big((t_2+t_3)^2 + 3(t_2+t_3)(t_4+t_5)$$
$$+ 3t_4(t_4+2t_5)\big) + 5t_2\big(t_2^3 + 4t_2^2(t_3+t_4+t_5) + 6t_2(t_3+t_4)(t_3+t_4+2t_5)$$
$$+ 4t_3\big(t_3^2 + 3t_3(t_4+t_5) + 3t_4(t_4+2t_5)\big)\big)\Big]\Big].$$

Setzt man $t_1 = t_2 = t_3$ u. s. w. $= \beta$, so wird $A = (a - 2\beta)$, $B = (a - 3\beta)^2$, $C = (a - 4\beta)^3$ u. s. w.; mithin

$$(x+a)^n = x^n + na(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a(a-2\beta)(x+2\beta)^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a(a-3\beta)^2(x+3\beta)^{n-3} \text{ u. s. w.},$$

so dafs diese von Herrn *Abel* im zweiten Hefte dieser Zeitschrift gegebene Entwickelung als ein specieller Fall aus der obigen Darstellung hervorgeht.

34.

Beweis für das Kräftenparallelogramm, auf bloſses Raisonnement gegründet.

(Von Herrn Dr. *Burg.*)

Denkt man sich aus dem Puncte C die Linien CA und CB gezogen, welche die auf diesen Punct wirkenden 2 Kräfte, der Gröſse und Lage nach vorstellen, so muſs nothwendig die Linie CD, welche die Gröſse und Lage der Resultanten bezeichnen soll, zwischen CA und CB liegen. Zieht man daher zwischen CA und CB ganz unbestimmt die Linie CD, und verbindet D mit A und B, so entsteht ein Viereck, in welchem CA, CB zwei Seiten, und CD eine Diagonale ist. Da nun, der Natur der Sache gemäſs, durch die 2 Seiten CA, CB und den eingeschlossenen Winkel ACB die Resultante CD, sowohl der Gröſse als Lage nach, vollkommen bestimmt seyn muſs; so muſs sich aus diesem Viereck, bei den drei gegebenen Stücken, die Gröſse und Richtung der CD finden lassen. Da aber ferner, wie aus der Tetragonometrie bekannt ist, für irgend ein Viereck, ohne Einschränkung, 5 Stücke gegeben seyn müssen, und nur für den einzigen Fall, daſs das Viereck ein Parallelogramm ist, 3 Stücke hinreichen, um das Viereck auflösen zu können, so folgt, daſs dieses so erhaltene Viereck nothwendig ein Parallelogramm seyn muſs, in welchem also die Resultante eine Diagonale ist.

35.

Ueber die Vergleichung der verschiedenen Numerations-Systeme.

(Von Herrn Prof. *Stein.*)

1) Man hat die mehrseitig gemachten Vorschläge zur Annahme eines andern Numerations-Systems, als des Decadischen, zwar selten einer gründlichen Antwort oder Widerlegung gewürdigt: wenn es jedoch der Mühe werth wäre, einen Vergleich zwischen der Einfachheit verschiedener solcher Systeme anzustellen, so dürfte das Folgende nicht ganz ohne Interesse seyn.

2) Wir gehen davon aus, dafs ein System desto einfacher ist, je weniger abgesonderte unabhängige Begriffe es zum Denken aller Zahlen erfordert, und nehmen an, dafs jede Einheit höherer Ordnung einen eigenthümlichen Begriff erheischt. Will man dann, im Decimalsysteme z. B., alle Zahlen bis 10^5 denken, so hat man erstens die Begriffe der **Einheiten** 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, und ferner noch die Begriffe der **Vielheiten** . . . . 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nothwendig.

Ebenso würde man, wenn a die Basis eines jeden anderen Systemes hiefse, alle Zahlen bis a^x mit Hülfe von $x + a - 2$ Begriffen denken können. Setzt man nun $a^x = n$, so wird $x = \frac{\log n}{\log a}$, und man sieht, dafs die Darstellung aller Zahlen bis n eine Anzahl Begriffe, gleich

$$\frac{\log n}{\log a} + a - 2,$$

erfordert.

3) Gemäfs dieser Formel ist es leicht zu sehen, welche Basis a am geeignetesten ist, um alle Zahlen, bis zu einer gewissen n, darzustellen. Es ist dieses nemlich diejenige Basis a, welche die Gröfse $\frac{\log n}{\log a} + a - 2$, für das gegebene n, ein Minimum macht.

Die gewöhnlichen Regeln zeigen, dafs diese Basis aus der Gleichung

$$a (\log a)^2 = k \log n$$

gefunden werden müsse, wo die log. gewöhnliche sind, und k den Modul, nemlich die Zahl 0,4343, bedeutet.

4) Die Auffindung von a, für ein gegebenes n, scheint zwar in endlicher Form nicht möglich zu seyn, allein es ist auch zur Erfüllung unseres Zweckes hinreichend, zu einem gegebenen a das gehörige n finden zu können, und man erhält ungefähr und in runden Zahlen:

für $a =$	2;	3;	4;	5;	6;	7;	8;	9;	10
$n =$	3;	40;	2200;	400000;	200Mill.;	300000Mill.;	1000Bill.;	10Tr.;	100000Tr.

Man kann aus dieser Tabelle sehen, dafs die Systeme von den Basen 2 und 3 gänzlich verworfen werden müssen; dafs aber die Systeme von den Basen 5 oder 6 für die Rechnungen, worin nur mäfsig grofse Zahlen vorkommen, nicht ohne Vortheil wären, da sie weniger Zeichen erfordern. Ferner aber sieht man, dafs das Decimalsystem alles leistet, was in der Hinsicht, auf welche wir unser

Augenmerk gerichtet haben, verlangt werden kann. Systeme von gröfseren Basen würden gar keinen Vorzug vor ihm haben.

Anmerkung. Man kann über die Anzahl der Begriffe, welche das Denken der Zahlen erheischt, andere Ansichten haben, als diejenigen, von welchen wir hier ausgegangen sind; doch wird die vorhergehende Methode in jedem Falle zum Vergleiche der verschiedenen Numerations-Systeme dienen können.

36.

Ueber die Krümmung der Flächen, nebst Auflösung eines besondern Falles aus der Perspective der krummen Flächen.

(Von Herrn *Hachette.*)

Betrachtet man das Auge des Beschauers als einen Punct, so berührt der Kegel, dessen Scheitel dieser Punct ist, und der einer Fläche von gegebener Gestalt und Lage umschrieben wird, die Fläche in einer Linie, welche man scheinbaren Umrifs nennt. Diese Linie, die bei den Flächen zweiter Ordnung in einer Ebene liegt, bei developpabelen Flächen aber gerade ist, gehört im Allgemeinen zu den Curven doppelter Krümmung. Es kann aber kommen, dafs eine der Gesichtslinien, welche in der Kegelfläche liegt, eine Tangente des scheinbaren Umrisses ist. Diesen besonderen Fall hatte ich vor längerer Zeit in meinem *Cours de Géométrie descriptive à l'école Polytechnique* bemerkt, und sowohl auf geometrischem, als auf analytischem Wege aufgelöst.

Geometrische Auflösung.

Die Flächen lassen sich in zwei Arten theilen. Die erste umfafst diejenigen, deren beide Haupt-Krümmungs-Halbmesser sich auf einer und derselben Seite der Berührungs-Ebene befinden; die andere diejenigen, deren Haupt-Krümmungs-Halbmesser sich auf verschiedenen Seiten jener Ebene befinden, oder, nach dem gewöhnlichen Ausdruck, entgegengesetzte Zeichen haben. Eine einzelne Fläche kann auch aus mehreren Zonen zusammengesetzt seyn, deren Krümmungen dieselben Verschiedenheiten haben, und die Auflösung der Aufgabe pafst nur auf Flächen oder Theile von Flächen, deren Haupt-Krümmungs-Halb-

messer in jedem Puncte entgegengesetzte Zeichen haben. Unter diesen Flächen unterscheide ich als die einfachste, das durch Umdrehung entstandene Hyperboloïd, welches bekanntlich drei verschiedene Entstehungsarten hat, nemlich zwei vermöge der geraden Linie, und die dritte durch die Umdrehung einer Hyperbel um ihre imaginaire Axe. Ich bestimme die Werthe der Parameter dieses Hyperboloïds so, daſs es eine Fläche in einem gegebenen Puncte berührt.

Von dem durch Umdrehung entstehenden Hyperboloïd, welches mit einer Fläche osculirt.

Die rechtwinkligen Ebenen des Kehlkreises *(cercle de gorge)* und der Meridian-Hyperbel eines, durch Umdrehung entstandenen Hyperboloïds schneiden sich, und für den Durchschnittspunct sind die Haupt-Krümmungs-Halbmesser den Krümmungs-Halbmessern der beiden senkrechten Durchschnitte gleich. Bezeichnet man den Winkel, den die, das Hyperboloïd erzeugende gerade Linie mit der Ebene des Kehlkreises macht, durch A, den Halbmesser dieses Kreises durch R, und den entgegengesetzten Krümmungs-Halbmesser der Meridian-Hyperbel durch R', so findet zwischen diesen drei Gröſsen folgende Gleichung Statt:

$$R' = R \operatorname{tang}^2 A.$$

Soll das Hyperboloïd mit einer Fläche in einem gegebenen Puncte osculiren, und nimmt man an, daſs dieser Punct mit einem Puncte des Kehlkreises des Hyperboloïds zusammenfällt, so müssen die Radien R, R' den Haupt-Krümmungs-Halbmessern der Fläche gleich seyn.

Gesetzt, diese beiden Bedingungen würden erfüllt, so werden die beiden geraden Linien im Hyperboloïd die gegebene Fläche in der zweiten Ordnung berühren, und jede Ebene, durch die eine oder die andere gerade Linie, wird die Fläche in einer Linie schneiden, welche im Durchschnitt beider Geraden einen Wendungspunct hat.

Bekanntlich schneiden sich zwei auf einander folgende Berührungs-Ebenen einer, durch die gerade Linie erzeugten Fläche in dieser geraden Linie, weil die beiden unendlich nahen Berührungspuncte auf dieser Linie selbst angenommen werden. Das Nemliche wird also auch bei dem durch Umdrehung entstandenen Hyperboloïd der Fall seyn, und stellt man sich die beiden auf einander folgenden Berührungs-Ebenen durch die beiden, dem Hyperboloïd und der gegebenen Fläche gemeinschaftlichen Elemente der geraden Linie gelegt vor, so werden diese Ebenen auch die Fläche berühren, und sich in der geraden Linie des Hyperboloïds schneiden.

Hieraus folgt, daſs, wenn man durch einen Punct im Raume zwei Ebenen

gelegt hat, welche nach einander eine Fläche berühren, der geradlinige Durchschnitt dieser Ebenen und die gerade Linie, deren Richtung durch die beiden unendlich nahen Berührungspuncte bestimmt wird, nur eine und dieselbe gerade Linie sind, sobald diese gerade Linie dem osculirenden Hyperboloïd angehört, welches durch die beiden Berührungspuncte gehet.

Hierauf beruht folgende Auflösung der oben erwähnten Aufgabe aus der Perspective.

A u f g a b e.

Auf dem scheinbaren Umrisse einer Fläche den Punct zu finden, in welchem lie Tangente an den Umriſs durch das Auge des Beschauers gehet.

Wir nehmen an, daſs man für jeden Punct des scheinbaren Umrisses die Ebene eines der normalen Haupt-Durchschnitte und die beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser, welche nach der Voraussetzung entgegengesetzte Zeichen haben, kenne.

Es sey m (Fig. 5.) ein beliebiger Punct des scheinbaren Umrisses, RmS ein Perpendikel auf die Fläche in diesem Punct, nmp der senkrechte Haupt-Durchschnitt, dessen Krümmungskreis mit dem Haupt-Krümmungs-Halbmesser mO, tmv ist; endlich sey mO' der zweite, dem ersten Radius mO entgegengesetzte Haupt-Krümmungs-Halbmesser für denselben Punct m.

Man stelle sich ein durch Umdrehung entstehendes Hyperboloïd vor, welches zum Kehlkreise den Kreis tmv, und zur erzeugenden geraden Linie die Gesichtslinien $m\alpha$ durch den Punct m und durch das Auge α des Beschauers hat.

Bezeichnet man die Haupt-Krümmungs-Halbmesser mO, mO' durch R und R', die Kaupt-Krümmungs-Halbmesser des Hyperboloïds im Puncte m durch R und R'', und den Winkel, den die Gesichtslinie $m\alpha$ mit der Ebene des Kreises tmv macht, durch A, so ist

$$R'' = R \operatorname{tang}^2 A.$$

Da das durch Umdrehung entstandene Hyperboloïd im Puncte m zu einem seiner Haupt-Krümmungs-Halbmesser die gerade Linie mO hat, welche zugleich einer der Haupt-Krümmungs-Halbmesser der Fläche ist, so ist klar, daſs dieses Hyperboloïd mit der Fläche osculiren würde, wenn $R'' = R'$ wäre, weil beide Flächen alsdann im Puncte m die nemlichen Haupt-Krümmungs-Halbmesser R und R' haben würden. Daraus folgt, daſs, wenn man die bekannte Länge R'' oder $R \,.\, \operatorname{tang}^2 A$ auf die Normale RS, von O' aus, gegen den Punct m hin, bis μ trägt, daſs alsdann dieser Punct μ sich entweder auſserhalb oder innerhalb des Berührungskreises tmv befinden wird, je nachdem R'' kleiner oder gröſser als

R' ist. Ebenso wird man für einen anderen Punct m' des scheinbaren Umrisses auf der Normale $R'S'$ einen, dem Puncte μ analogen Punct μ' finden. Diese Puncte μ, μ' ...... bilden eine Curve, welche der geometrische Ort des verlangten Puncts ist. Der Durchschnitt dieser Curve mit dem scheinbaren Umrisse bestimmt den Punct des Umrisses, für welchen eine Tangente an den Umriſs durch das Auge des Beschauers gehet. Wendet man diese Auflösung z. B. auf auf einen Rundstab an, so wird man finden, daſs der Haupt-Krümmungs-Halbmesser R für alle Puncte dieser Fläche constant ist.

Es läſst sich durch diese Auflösung die Perspective des Piedestals, welches Tafel IX. des *Traité de Géométrie descriptive* von *Hachette* (Ausgabe vom Jahre 1822, Seite 239.) gezeichnet ist, vervollständigen. Da man schon den scheinbaren Umriſs $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 6.) und $\alpha'\beta'\gamma'$ (Fig. 7.) hat, so ist schon die Curve construirt, welche der geometrische Ort des verlangten Puncts ist. Diese Curve hat mehrere Zweige, von welchen auf der Zeichnung nur diejenigen sich befinden, welche den scheinbaren Umriſs schneiden.

In der horizontalen Projection (Fig. 6.) sieht man vier Zweige, die gegen die Gerade $AF\alpha$ symmetrisch liegen. Die beiden Zweige $A\varepsilon$, $A\varphi$ schneiden die Projection des scheinbaren Umrisses in den Puncten ε und φ. Ihre Verlängerungen über die Gerade GH hinaus (durch eine punctirte Linie bezeichnet) haben weiter keinen Nutzen. Ebenso die beiden Zweige $A\delta$, $A\gamma$, welche die Puncte γ und δ bestimmen, und die nur deshalb über GH hinaus verlängert sind, um die Gestalt der Curve zu zeigen.

Die verticale Projection (Fig. 7.) zeigt die Zweige $\varepsilon'\varepsilon''$, $\gamma'\gamma''$, welche die verticale Projection $\alpha'\beta'\gamma'$ des scheinbaren Umrisses in den Puncten ε', γ' schneiden; der erste Punct ε' entspricht den beiden Puncten ε, φ (Fig. 6.) der horizontalen Projection des scheinbaren Umrisses, der zweite γ' den Puncten δ, γ der nemlichen Projection.

Die meridionelle erzeugende Linie des Piedestals ist eine Ellipse, von welcher man für jeden Punct einen Durchmesser und seinen conjugirten Durchmesser, folglich den Krümmungs-Halbmesser, der auch zugleich der Haupt-Krümmungs-Halbmesser der Fläche ist, kennt. Verlängert man die Normale, in welcher jener Halbmesser genommen wird, bis zur Umdrehungsaxe, so ist der Theil dieser Normale, zwischen der meridionellen Ellipse und der Umdrehungsaxe, der zweite Haupt-Krümmungs-Halbmesser. Der Ausdruck des Krümmungs-Halbmessers einer Ellipse, für den Punct M (Fig. 4.) ist, $\frac{(ab)^2}{MP}$, wo ab der, mit der Tan-

gente $a'b'$, im Puncte M parallele Durchmesser, und MP ein Perpendikel aus dem Puncte M auf diesen Durchmesser ist.

Kennt man die Haupt-Krümmungs-Halbmesser des Piedestals für jeden Punct des scheinbaren Umrisses, so hat die Construction des geometrischen Ortes der gesuchten Puncte weiter keine Schwierigkeit.

37.

Von der Form länglicher Räder, durch welche sich die Ungleichheit der Wirkung der Kurbeln vermindern läſst.

(Vom Herausgeber.)

1.

Wenn eine drehende Bewegung in eine hin- und hergehende verwandelt werden soll, und umgekehrt, bedient man sich gewöhnlich der Kurbeln. Die Kurbel hat aber den Uebelstand, daſs, wenn die Kraft, welche die drehende Bewegung hervorbringt, und folglich die Bewegung selbst, unveränderlich ist, die Wirkung der Kurbel nicht ebenfalls unveränderlich groſs, sondern abwechselnd stärker und schwächer ist, weshalb man dann ein Schwungrad anbringt, um die Ungleichheit und den daraus entstehenden Kraftverlust zu vermindern. Wenn z. B. an dem Rade AM (Fig. 9.) eine unveränderliche Kraft P wirkt, und Q stellt die Kraft vor, welche dadurch die Kurbel MB in Richtungen erhält, die beständig mit BD parallel sind, so ist Q, nicht wie P, immer gleich groſs, sondern es ist am kleinsten, wenn die Kurbel die Lage MB, senkrecht auf BD hat, und am gröſsten, und sogar unendlich groſs, wenn die Kurbel die Richtung MB_2, parallel mit BD hat; denn in der Richtung MB der Kurbel wirkt Q an dem Hebelsarm MB, in der Lage MB_1 nur an dem Hebelsarm B_1E, der kleiner ist, als MB, und in der Lage MB_2 an dem Hebelsarm Null. Wenn also kein Schwungrad vorhanden wäre, oder die Trägheit der Masse der Maschine käme nicht weiter in Betracht, und Q wäre der Widerstand, den die Kurbel in Richtungen, die beständig mit BD parallel sind, zu überwinden hat, so müſste P so groſs seyn, daſs es der Kurbel auch noch in der Lage MB, senkrecht auf BD, die Kraft Q giebt. Die Kraft P wäre aber alsdann für alle andere Lagen der

Kurbel, die nicht senkrecht auf BD sind, zu grofs, und folglich verursachte auf diese Weise die Kurbel einen Verlust an bewegender Kraft.

2.

Diesen Verlust an Kraft kann man, aufser auf die gewöhnliche Weise, nemlich durch das Schwungrad, durch zwei länglich runde Räder, von welchen eines an der Axe der bewegenden Kraft, das andere an der Axe der hin- und hergehenden Kraft oder der Kurbel befestigt ist, vermindern.

Wenn nemlich die unveränderliche bewegende Kraft P an dem Umfange eines kreisrunden Rades AC (Fig. 10.) wirkt, also beständig das nemliche Moment hat, so verbinde man mit der Axe dieses Rades ein länglich rundes Rad $GDFH$, und lasse dasselbe in ein zweites, ihm an Gestalt und Gröfse völlig gleiches Rad $DBEK$ greifen, und zwar so, dafs die gröfsten und kleinsten Durchmesser der beiden gleichen Räder auf einander senkrecht stehen, z. B. so, dafs der kleinste Durchmesser HD des einen Rades auf dem gleichen Durchmesser BK des anderen senkrecht ist, so wird, wie leicht zu sehen, eine unveränderlich bleibende Kraft P, dem Angriffspuncte B der Kurbel, in verschiedenen Lagen der Kurbel, eine verschiedene Kraft geben, und zwar am meisten Kraft, wenn die Kurbel MB auf die Richtung des Widerstandes BQ senkrecht steht, wie in der Figur, am wenigsten, wenn sie mit der Richtung des Widerstandes, wie $MB_{,}$, nach den punctirten Linien in der Zeichnung, parallel ist. Denn das unveränderliche Moment der Kraft P ist $P\,.\,AC$; also ist die Wirkung der Kraft P auf den Punct D gleich $P\,.\,\frac{AC}{AD}$. Mithin ist der Widerstand Q, in senkrechter Richtung auf die Kurbel MB genommen, gleich

$$P\,.\,\frac{AC}{AD}\,.\,\frac{MD}{MB} = P\,.\,\frac{AC}{MB}\,.\,\frac{MD}{AD},$$

oder wenn man z. B. $AC = MB$ setzt, gleich

$$P\,.\,\frac{MD}{AD}.$$

Die Kraft der Kurbel verändert sich also, wie sich das Verhältnifs der Halbmesser MD und AD der Räder, nach den Puncten, in welchen sie sich berühren, verändert. Sie ist am gröfsten, wenn der kleinste Halbmesser des Rades an der Axe A mit dem gröfsten Halbmesser des Rades an der Axe M zusammentrifft, wie in der Figur, und am kleinsten im umgekehrten Falle, wie nach den punctirten Linien. Die Kraft der Kurbel in einer beliebigen Lage $MB_{,}$, nach der

der mit BQ parallelen Richtung $B_1 Q_1$, ist, wenn $E_1 B_1$ ein Perpendikel auf MB ist, wie leicht zu sehen, gleich

$$P \cdot \frac{AC}{E_1 B_1} \cdot \frac{MD}{AD}.$$

Werden also die Räder zugleich so eingerichtet, daſs diese Kraft für eine beliebige Lage der Kurbel nie gröſser ist, als die Kraft $P \cdot \frac{AC}{MB} \cdot \frac{MD}{AD}$, welche die Kurbel haben muſs, wenn der Widerstand Q auf sie seine volle Kraft ausübt, so braucht die Kraft P, die nöthig ist, einen gegebenen Widerstand Q zu überwinden, nicht $Q \cdot \frac{MB}{AC}$ zu seyn, wie es seyn müſste, wenn die länglichen Räder nicht vorhanden wären, sondern nur $Q \cdot \frac{MB}{AC} \cdot \frac{AD}{MD}$, welches weniger beträgt, als $Q \cdot \frac{MB}{AC}$, in dem Verhältniſs, wie der kleinste Durchmesser der länglichen Räder gegen ihren gröſsten Durchmesser kleiner ist. Es wird also durch die länglichen Räder an Kraft gespart. Lieſse es sich selbst auch nicht machen, daſs immer $P \cdot \frac{AC}{MB} \cdot \frac{MD}{AD}$ kleiner wäre als $P \cdot \frac{AC}{E_1 B_1} \cdot \frac{MD}{AD}$, so würde man doch immer noch diese Ungleichheit, weil sie weniger betragen wird, als diejenige bei der gewöhnlichen Einrichtung der Kurbel ohne längliche Räder, durch ein Schwungrad ausgleichen können; es würde immer noch eine Ersparung an Kraft bleiben.

Es kommt nun zunächst darauf an, die Gestalt zu suchen, welche die länglichen Räder haben müssen, damit sie bei ihrer Umdrehung beständig in einander greifen.

3.

Es giebt zwei Fälle. Entweder kann man setzen: die länglich runden Räder sollen congruent seyn, oder man kann die Form des einen geben, und die Form des anderen suchen.

Erster Fall.

Wenn die länglich runden Räder congruent seyn sollen.

4.

Die Bedingung für die Gestalt der Räder ist, daſs, für gleiche Bogen $AR = AN$ (Fig. 11.), die Summe der zugehörigen Halbmesser RP und NQ, nemlich

$$1)\quad RP + NQ = PA + AQ = PQ$$

seyn muſs.

Die Halbmesser aus den Umdrehungs-Axen der Räder nach beliebigen Puncten ihres Umfanges werden auf irgend eine Weise von den Bogen, um welche der beliebige Umfangspunct von einem bestimmten Punct des Umfanges entfernt ist, abhängen, z. B. der Halbmesser PR wird auf irgend eine Weise von dem Bogen AR abhängen. Bezeichnet man also den Halbmesser PR, für einen beliebigen Umfangspunct R, durch r, und den zugehörigen Bogen AR durch s, so kann man setzen:

$$2) \quad r = f(s),$$

wo f die gesuchte Art der Abhängigkeit des Halbmessers r von dem Bogen s ausdrückt.

Gesetzt nun, das Rad um P habe sich um den Bogen MR weiter gedreht, und es sey der Bogen NT so lang als der Bogen MR, so muſs nothwendig der Halbmesser NQ des Rades um Q um eben so viel abgenommen haben, als vielleicht der Halbmesser PR des Rades um P zugenommen hat, damit wieder $MP + TQ$ gleich $RP + NQ$ sey, und dieses muſs der Fall seyn an jedem beliebigem Ort der Curve. Es muſs für jeden beliebigen Punct R der Curve, oder N in der congruenten Curve, wie weit er auch von dem Anfangspunct A oder F entfernt seyn mag, wenn man in der Curve um gleich groſse Bogen weiter vor oder zurückgehet, der Halbmesser allemal um gleich viel zu- oder abnehmen. Daraus folgt, daſs die Zunahme des Bogens vom Halbmesser unabhängig seyn muſs, und daſs also die Gleichung zwischen dem Halbmesser r und dem Bogen s nur lineär, oder vom ersten Grade, also nur von der Form

$$3) \quad r = cs + \gamma$$

seyn kann, wo c und γ Constanten sind. Denn wenn in dieser Gleichung s um k zunimmt, so nimmt r um ck zu, welches, wie es seyn sollte, von s unabhängig ist.

5.

Man kann sich von der Nothwendigkeit der Gleichung (3), zwischen r und s, statt, wie vorhin, unmittelbar aus den Bedingungen der Aufgabe, auch, wie folgt, durch Rechnung überzeugen:

Der Bogen AR gleich s nemlich, wachse um $RM = k$, und die zugehörige Veränderung des Halbmessers r werde durch $\frac{\Delta}{s} r$ bezeichnet, wo das s unter dem Veränderungszeichen Δ nicht etwa ein Divisor ist, sondern bloſs anzeigt, daſs s die unabhängig veränderliche Gröſse ist, so ist

$$4)\quad r + \frac{\Delta}{s} r = f(s+k).$$

Nun sey $AP = a$, $AQ = b$, und die Länge des Quadranten $AF = AH$ (wenn nemlich PH und QF auf PQ senkrecht sind), gleich σ, so ist $NF = \sigma - s$, weil nach der Bedingung der Aufgabe $AN = AR = s$ seyn soll. Ferner mufs nach den Bedingungen der Aufgabe $PM + TQ = a + b$ seyn, also mufs, weil $PM = r + \frac{\Delta}{s} r$ ist:

$$5)\quad TQ = a + b - r - \frac{\Delta}{s} r$$

sein. Aber NQ hängt ebenso von $NF = \sigma - s$ ab, wie PR von AR, also ist

$$6)\quad NQ = f(\sigma - s) = a + b - r,$$

und folglich

$$TQ = f(\sigma - s) - \frac{\Delta}{\sigma - s} f(\sigma - s),$$

oder vermöge (6):

$$7)\quad TQ = a + b - r - \frac{\Delta}{\sigma - s} f(\sigma - s).$$

Nun ist nach (5) $TQ = a + b - r - \frac{\Delta}{s} r$, also mufs, wenn man beide Ausdrücke von TQ (5 und 7) gleich setzt:

$$8)\quad \frac{\Delta}{s} fs = \frac{\Delta}{\sigma - s} f(\sigma - s)$$

seyn.

Nach dem *Taylor*'schen Lehrsatz ist, wie bekannt,

$$9)\begin{cases} \frac{\Delta}{s} fs = k \frac{d}{s} fs + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{d^2}{s^2} \cdot fs + \frac{k^3}{2.3} \cdot \frac{d^3}{s^3} fs \ldots\ldots \\ \frac{\Delta}{\sigma - s} f(\sigma - s) = k \frac{d}{\sigma - s} f(\sigma - s) + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{d^2}{(\sigma - s)^2} f(\sigma - s) + \frac{k^3}{2.3} \cdot \frac{d^3}{(\sigma - s)^3} f(\sigma - s) + \ldots, \end{cases}$$

wo $s, s^2, \ldots\ldots \sigma - s, (\sigma - s)^2 \ldots\ldots$ unter $d, d^2 \ldots\ldots$ wiederum nicht etwa Divisoren sind, sondern blos anzeigen, dafs s oder $\sigma - s$ die unabhängig veränderlichen Gröfsen sind. Setzt man die beiden Ausdrücke (9), vermöge (8), einander gleich, dividirt mit k, und setzt darauf $k = 0$, so findet man:

$$10)\quad \frac{d}{s} fs = \frac{d}{\sigma - s} f(\sigma - s).$$

Diese Gleichung zeigt an, dafs sich die erste Ableitung (der erste Differential-Coefficient) von fs, nach s, nicht verändert, wenn man darin $\sigma - s$ statt s setzt. Es kann also nur

$$11)\quad \frac{d}{s} fs = \text{Const} = c$$

seyn. Dieses giebt, wenn man die Stammgröfse (das Integral) nimmt:

$$fs = cs + \text{Const} = cs + \gamma,$$

oder weil $fs = r$ war:

$$12)\quad r = cs + \gamma,$$

wie oben (3).

6.

Setzt man nun in der Gleichung $r = cs + \gamma$, zwischen Halbmesser und Bogen, $s = 0$, so ist $r = \gamma$; also ist $a = \gamma$. Setzt man $s = \sigma$, so ist $r = b$, also $b = c\sigma + \gamma = c\sigma + a$, und folglich $c = \frac{b-a}{\sigma}$, mithin

$$13)\quad r = (b-a)\frac{s}{\sigma} + a,$$

welches die vollständige Gleichung der Curve zwischen Halbmesser und Bogen ist.

7.

Aus der Gleichung zwischen Halbmesser und Bogen findet man, wie folgt, die Gleichung der Curve zwischen Halbmesser und Winkel um den Mittelpunct, oder für sogenannte Coordinaten aus einem Puncte.

Man bezeichne den Winkel RPA, (Fig. 11.), der zu dem Halbmesser $RP = r$ gehört, durch φ, und betrachte r als die unabhängig veränderliche Gröfse, so dafs φ von r abhängt, so ist, wie bekannt, der Ausdruck der ersten Ableitung des Bogens $AR = s$, nach r, folgender:

$$14)\quad \frac{d}{r} s = \sqrt{\left(1 + r^2 \left(\frac{d^2}{r^2}\varphi\right)^2\right)}.$$

Nun giebt die Gleichung (13) $s = \frac{\sigma}{b-a} \cdot (r-a)$, und daraus folgt $\frac{d}{r}s = \frac{\sigma}{b-a}$, also ist vermöge (14):

$$15)\quad \frac{\sigma}{b-a} = \sqrt{\left(1 + r^2 \left(\frac{d^2}{r^2}\varphi\right)^2\right)}.$$

Daraus folgt:

$$16)\quad r \cdot \frac{d}{r}\varphi = \sqrt{\left[\frac{\sigma^2}{(b-a)^2} - 1\right]}, \text{ oder}$$

$$\frac{d}{r}\varphi = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\left[\frac{\sigma^2 - (b-a)^2}{(b-a)^2}\right]},$$

und wenn man davon die Stammgröfse nach r nimmt:

$$17)\quad \varphi = {}^{e}r \surd \left[\frac{\sigma^2 - (b-a)^2}{(b-a)^2}\right] + \text{Const},$$

wo ${}^{e}r$ von r den natürlichen Logarithmus, oder den Logarithmus für die Basis e bezeichnet. Für $r = a$ ist φ gleich Null, also

$$0 = {}^{e}a \surd \left[\frac{\sigma^2 - (b-a)^2}{(b-a)^2}\right] + \text{Const},$$

und folglich

$$\text{Const} = -{}^{e}a \surd \left[\frac{\sigma^2 - (b-a)^2}{(b-a)^2}\right],$$

mithin in (17),

$$18)\quad \varphi = {}^{e}\left(\frac{r}{a}\right) \surd \left[\frac{\sigma^2 - (b-a)^2}{(b-a)^2}\right].$$

Für $r = b$ ist $\varphi = \varrho$, wenn ϱ einen Kreisquadranten für den Halbmesser 1 bezeichnet, also

$$19)\quad \varrho = {}^{e}\left(\frac{b}{a}\right) \surd \left[\frac{\sigma^2 - (b-a)^2}{(b-a)^2}\right].$$

Daraus folgt

$$\frac{\varphi}{\varrho} = {}^{e}\left(\frac{r}{a}\right) : {}^{e}\left(\frac{b}{a}\right), \text{ oder}$$

$$20)\quad \frac{\varphi}{\varrho} = \frac{{}^{e}r - {}^{e}a}{{}^{e}b - {}^{e}a}.$$

Da man die natürlichen Logarithmen findet, wenn man die briggischen mit einer unveränderlichen Zahl multiplicirt, so kann man auch in dem Ausdruck (20) briggische Logarithmen statt der natürlichen setzen, und es ist folglich auch

$$21)\quad \frac{\varphi}{\varrho} = \frac{{}^{10}r - {}^{10}a}{{}^{10}b - {}^{10}a}.$$

Dieses ist die Gleichung der Curve $AMH = FNA$ zwischen Coordinaten aus den Axen P und Q.

Man hätte das Nemliche auch noch etwas kürzer aus (15) oder (16) finden können. Aus (16) nemlich folgt, dafs $r\frac{d}{r}\varphi$ eine unveränderliche Gröfse ist, etwa gleich c, so dafs

$$22)\quad r \cdot \frac{d}{r}\varphi = c.$$

Also ist $\frac{d}{r}\varphi = \frac{c}{r}$. Daraus folgt, wenn man die Stammgröfse nach r nimmt,

$\varphi = c\,{}^{e}r + \text{Const}$. Für $r = a$ ist $\varphi = 0$, also $0 = c\,.\,{}^{e}a + \text{Const}$, $\text{Const} = -c\,{}^{e}a$ und $\varphi = c\,.\,{}^{e}r - c\,.\,{}^{e}a$, oder

$$23)\quad \varphi = c\;{}^{e}\!\left(\frac{r}{a}\right).$$

Für $\varphi = \varrho$ ist $r = b$, also $\varrho = c\,({}^{e}b - {}^{e}a)$, folglich

$$24)\quad c = \frac{\varrho}{{}^{e}b - {}^{e}a},$$

und mithin $\varphi = \varrho\,.\,\dfrac{{}^{e}r - {}^{e}a}{{}^{e}b - {}^{e}a}$, oder $\dfrac{\varphi}{\varrho} = \dfrac{{}^{e}r - {}^{e}a}{{}^{e}b - {}^{e}a}$, wie (22). Nach dieser Gleichung läſst sich auch die Curve leicht zeichnen.

8.

Eine Gleichung der Curve zwischen rechtwinkligen Coordinaten $PL = x$, $LR = y$ (Fig. 11.) kann man, wie folgt, finden:

Es war $\varphi = c\;{}^{e}\!\left(\frac{r}{a}\right)$ (23), oder $\varphi = {}^{e}\!\left(\frac{r}{a}\right)^{c}$.

Daraus folgt $\varphi\,{}^{e}e = {}^{e}\!\left(\frac{r}{a}\right)^{c}$, oder ${}^{e}e^{\varphi} = {}^{e}\!\left(\frac{r}{a}\right)^{c}$, oder

$$25)\quad e^{\varphi} = \left(\frac{r}{a}\right)^{c}.$$

Nun ist bekanntlich

$$26)\quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

wenn $i = \sqrt{-1}$. Also ist, vermöge (25),

$$27)\quad \left(\frac{r}{a}\right)^{ic} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Es ist aber $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$ und $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, also ist vermöge (27):

$$\left(\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{a}\right)^{ic} = \frac{x + iy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{ic} = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}, \text{ oder}$$

$$(x^2+y^2)^{ic+1} = (x+iy)^2\, a^2,$$

oder, weil $c = \dfrac{\varrho}{{}^{e}b - {}^{e}a}$ war (24),

$$28)\quad (x^2+y^2)^{\frac{i\varrho}{{}^{e}b - {}^{e}a}+1} = (x+iy)^2\,.\,a^2.$$

Aus dieser Gleichung kann man y in x durch Reihen entwickeln.

9.

Die erste Ableitung der **Fläche** F einer Curve, durch Coordinaten aus einem Puncte r und φ ausgedrückt, ist, nach dem Radius r genommen, bekanntlich

$$29)\quad \tfrac{1}{2} r^2 \frac{d}{r} \varphi = \frac{d}{r} F.$$

Nun ist für die gegenwärtige Curve $r \frac{d}{r} \varphi = c$ (22). Also ist hier

$$30)\quad \frac{d}{r} F = \tfrac{1}{2} r c.$$

Dieses giebt, wenn man die Stammgröfsen nimmt, $F = \frac{1}{4} r^2 c +$ Const. Für $r = a$ ist $F = 0$, also ist $0 = \frac{1}{4} a^2 c +$ Const, und Const $= -\frac{1}{4} a^2 c$, mithin ist vollständig $F = \frac{1}{4}(r^2 - a^2)\, c$, oder weil $c = \frac{\varrho}{{}^e b - {}^e a}$ war,

$$31)\quad F = \frac{(r^2 - a^2)\,\varrho}{4\,({}^e b - {}^e a)}.$$

Die ganze Fläche APH (Fig. 11.) ist, für $r = b$,

$$32)\quad F' = \frac{(b^2 - a^2)\,\varrho}{4\,({}^e b - {}^e a)}.$$

10.

Die erste Ableitung der **Länge** s einer Curve durch Coordinaten aus einem Puncte, r und φ, ausgedrückt, ist, nach dem Radius r genommen, bekanntlich

$$33)\quad \frac{d}{r} . s = \sqrt{\left(1 + r^2 \frac{d}{r} \varphi^2\right)}.$$

Nun ist für die gegenwärtige Curve $r \frac{d}{r} \varphi = c$ (22), also ist hier

$$34)\quad \frac{d}{r} . s = \sqrt{(1 + c^2)}.$$

Daraus folgt, wenn man die Stammgleichung nimmt, $s = r\sqrt{(1 + c^2)} +$ Const. Für $r = a$ ist $s = 0$, also $0 = a\sqrt{(1 + c^2)} +$ Const, folglich Const $= -a\sqrt{(1 + c^2)}$, mithin ist vollständig $s = (r - a)\sqrt{(1 + c^2)}$, oder weil $c = \frac{\varrho}{{}^e b - {}^e a}$ war (24),

$$35)\quad s = (r - a)\sqrt{\left(1 + \frac{\varrho^2}{({}^e b - {}^e a)^2}\right)}.$$

Die ganze Länge der Curve AMH (Fig. 11.) ist, für $r = b$,

$$36)\quad \sigma = (b - a)\sqrt{\left(1 + \frac{\varrho^2}{({}^e b - {}^e a)^2}\right)}.$$

Setzt man die Ausdrücke (35, 36) von s und σ in (13), so erhält man
$r = (b - a)\frac{r - a}{b - a} + a = r$, wie gehörig.

11.

Die goniometrische Tangente des Winkels $VRP = \lambda$ (Fig. 3.), welchen eine Tangente an eine beliebige Curve, in einem beliebigen Punct R, mit dem *Radius vector* macht, ist bekanntlich für Coordinaten aus einem Puncte, r und φ, wenn man, wie hier, den Radius zur unabhängig veränderlichen Gröfse nimmt:

$$37)\quad \text{tang}\,\lambda = r\frac{d}{r}\varphi.$$

Nun ist bei der gegenwärtigen Curve $r\frac{d}{r}\varphi = c\ (22) = \frac{\varrho}{{}^e b - {}^e a}\ (24)$, also ist hier

$$38)\quad \text{tang}\,\lambda = \frac{\varrho}{{}^e b - {}^e a}.$$

Die Tangenten der Curve machen also in allen Puncten der Curve mit dem *Radius vector* den nemlichen Winkel.

Setzt man den Ausdruck (38) in die Ausdrücke der Fläche und der Länge der Curve (31 und 35), so findet man:

$$39)\quad F = \tfrac{1}{4}(r^2 - a^2)\,\text{tang}\,\lambda,\ \text{und}$$
$$40)\quad s = (r - a)\sec\lambda.$$

12.

Man siehet, dafs die gefundene Curve eine logarithmische Spirale ist. Die länglichen Räder, durch welche sich auf die obige Weise die Ungleichheit der Wirkung einer Kurbel vermindern läfst, müssen also aus 4 Quadranten einer solchen Spirale zusammengesetzt werden.

Zweiter Fall.

Wenn die Form eines der länglich runden Räder gegeben ist.

12.

Die Curve ANF (Fig. 12.) sey gegeben: es wird die Curve ARH gesucht, welche die Curve ANF beständig berührt, wenn ARH sich um die Axe P, und ANF um die Axe Q dreht, und zwar so, dafs die Bogen beider Curven, von dem Anfangspunct A an bis zu jedem beliebigen Berührungspunct, gleich lang sind.

Nach den Bedingungen der Aufgabe mufs

41)

$$41)\quad \text{Bogen } AR = \text{Bogen } AN, \text{ und}$$
$$42)\quad PR + NQ = PA + AQ = PQ$$

seyn. Man bezeichne PA durch a, QA durch b, den Winkel RPA durch φ, den Winkel NQA durch ψ, den Bogen NA durch s, den Bogen RA durch z, den Radius NQ durch r, den Radius PR durch r_1, und betrachte ψ als abhängig von r, φ als abhängig von $PR = r_1 = a + b - r$: so ist die Abhängigkeit zwischen r und ψ gegeben, und die Abhängigkeit zwischen PR und φ wird gesucht.

Die erste Ableitung des Bogens s, nach r genommen, ist bekanntlich

$$43)\quad \frac{d}{r}s = \sqrt{\left(1 + r^2 \frac{d}{r}\varphi^2\right)}.$$

Ebenso ist die erste Ableitung des Bogens z, nach r_1 genommen,

$$44)\quad \frac{d}{r_1}z = \sqrt{\left(1 + r_1^2 \cdot \frac{d}{r_1}\psi^2\right)}.$$

Nun soll nach den Bedingungen der Aufgabe für jeden Punct der Curve

$$45)\quad s = z$$

seyn. Daraus folgt $\frac{d}{r}s = \frac{d}{r}z$. Aber $\frac{d}{r}z$ ist bekanntlich gleich $\frac{d}{r_1}z\ \frac{d}{r}r_1$; folglich ist, weil $r_1 = a + b - r$ seyn soll, und mithin $\frac{d}{r}r_1 = -1$ ist, $\frac{d}{r}z = -\frac{d}{r_1}z$. Also muſs

$$46)\quad \frac{d}{r}s = -\frac{d}{r_1}z$$

seyn. Setzt man hierin die Ausdrücke von $\frac{d}{r}s$ und $\frac{d}{r_1}z$ aus (43 und 44), so findet man

$$47)\quad \sqrt{\left(1 + r^2 \frac{d}{r}\varphi^2\right)} = -\sqrt{\left(1 + r_1^2 \frac{d}{r_1}\psi^2\right)}.$$

In dieser Gleichung ist $r_1 = a + b - r$ und $\frac{d}{r}\psi = \frac{d}{r_1}\psi\ \frac{d}{r}r_1 = \frac{d}{r_1}\psi \times -1 = -\frac{d}{r_1}\psi$, also $\frac{d}{r_1}\psi = -\frac{d}{r}\psi$, folglich

$$48)\quad \sqrt{\left(1 + r^2 \frac{d}{r}\varphi^2\right)} = -\sqrt{\left(1 + (a + b - r)^2 \frac{d}{r}\psi^2\right)}.$$

Daraus folgt, $1 + r^2 \frac{d}{r}\varphi^2 = 1 + (a + b - r)^2 \frac{d}{r}\psi^2$, also

$$49)\quad \frac{d}{r}\varphi = \frac{a + b - r}{r} \cdot \frac{d}{r}\psi.$$

Da nun die Linie ANF, also die Gleichung zwischen ψ und r gegeben vorausgesetzt wird, so ist $\frac{d}{r}\psi$ gegeben, und zwar durch einen Ausdruck, der von r abhängt. Folglich ist, vermöge des Ausdrucks (49), $\frac{d}{r}\varphi$ ganz in r gegeben, und man darf von $\frac{d}{r}\varphi$ nur die Stammgröfse nehmen, so findet man eine Gleichung zwischen r und φ, oder, was das Nemliche ist, zwischen φ und $a + b - r = PR$, welche die gesuchte Gleichung der Curve ARH ist.

Wir wollen, um den gegenwärtigen Aufsatz nicht zu sehr zu verlängern, die Anwendung auf bestimmte Fälle, z. B., wenn die gegebene Curve eine Ellipse oder eine Cycloide ist, die weiter keine Schwierigkeit macht, dem Leser überlassen.

14.

Die Gestalt des einen Rades kann auch nicht sowohl unmittelbar, als durch gewisse Bedingungen seiner Wirkung gegeben seyn. Wenn sich z. B. an der Axe M (Fig. 10.) nicht sowohl eine einfache, sondern vielmehr eine dreifache oder mehrfache Kurbel befindet, so kann man verlangen, die Räder sollen so gestaltet seyn, dafs eine unveränderliche Kraft P, an einem kreisförmigen Rade um die Axe A, oder an dem Hebelsarm AC wirkend, die folglich ein unveränderliches Moment haben wird, auch ein unveränderliches Moment um die Axe M, nach der Richtung des Widerstandes Q genommen, hervorbringt, wodurch dann also die Ungleichheit der Wirkung einer mehrfachen Kurbel, wenn nicht dynamisch, so doch statisch, ganz ausgeglichen werden würde.

Unter diesen Bedingungen sey

$$AC = p, \quad AM = a + b,$$

und ein beliebiger Radius des nicht kreisförmigen Rades $DBEK$ um M gleich r, so ist der Radius des anderen, nicht kreisförmigen Rades $GDFH$ um A, für den zugehörigen Punct seines Umfanges, $a + b - r$, weil die Radien durch den Berührungspunct der beiden Räder immer zusammengenommen gleich $AB = a + b$ seyn müssen.

Nun wird das veränderliche Moment des Widerstandes, den die Kurbeln nach bestimmter Richtung finden, auf irgend eine Weise von dem Winkel ψ

(Fig. 12.) abhängen, um welchen sich das Rad an der Kurbelaxe gedrehet hat. Man kann also dieses Moment gleich

$$50) \quad F\psi$$

setzen, wo $F\psi$ eine durch ψ gegebene Gröſse ist.

Dieses Moment erfordert eine Kraft $\frac{F\psi}{r}$ am Berührungspunct der beiden Räder. Auf der anderen Seite ist die Kraft, welche die unveränderliche bewegende Kraft P am Berührungspunct der beiden Räder hervorbringt, gleich $\frac{Pp}{a+b-r}$. Also muſs

$$51) \quad \frac{Pp}{a+b-r} = \frac{F\psi}{r}$$

seyn.

Da $F\psi$ eine durch ψ und vielleicht r gegebene Gröſse ist, so ist (51) eine Gleichung zwischen ψ und r, und folglich durch dieselbe die Gestalt des einen Rades, nemlich desjenigen um die Kurbel-Axe, gegeben. Die Aufgabe kann daher weiter nach (§. 13) aufgelöset werden. Man nimmt aus der gegebenen Gleichung (51) $\frac{d}{r}\psi$, und setzt es in (49), so findet man $\frac{d}{r}\varphi$, und wenn man die Stammgleichung davon nimmt, eine Gleichung zwischen φ und r, oder, was das Nemliche ist, zwischen φ und $a+b-r$, welche die Gestalt des anderen Rades giebt.

15.

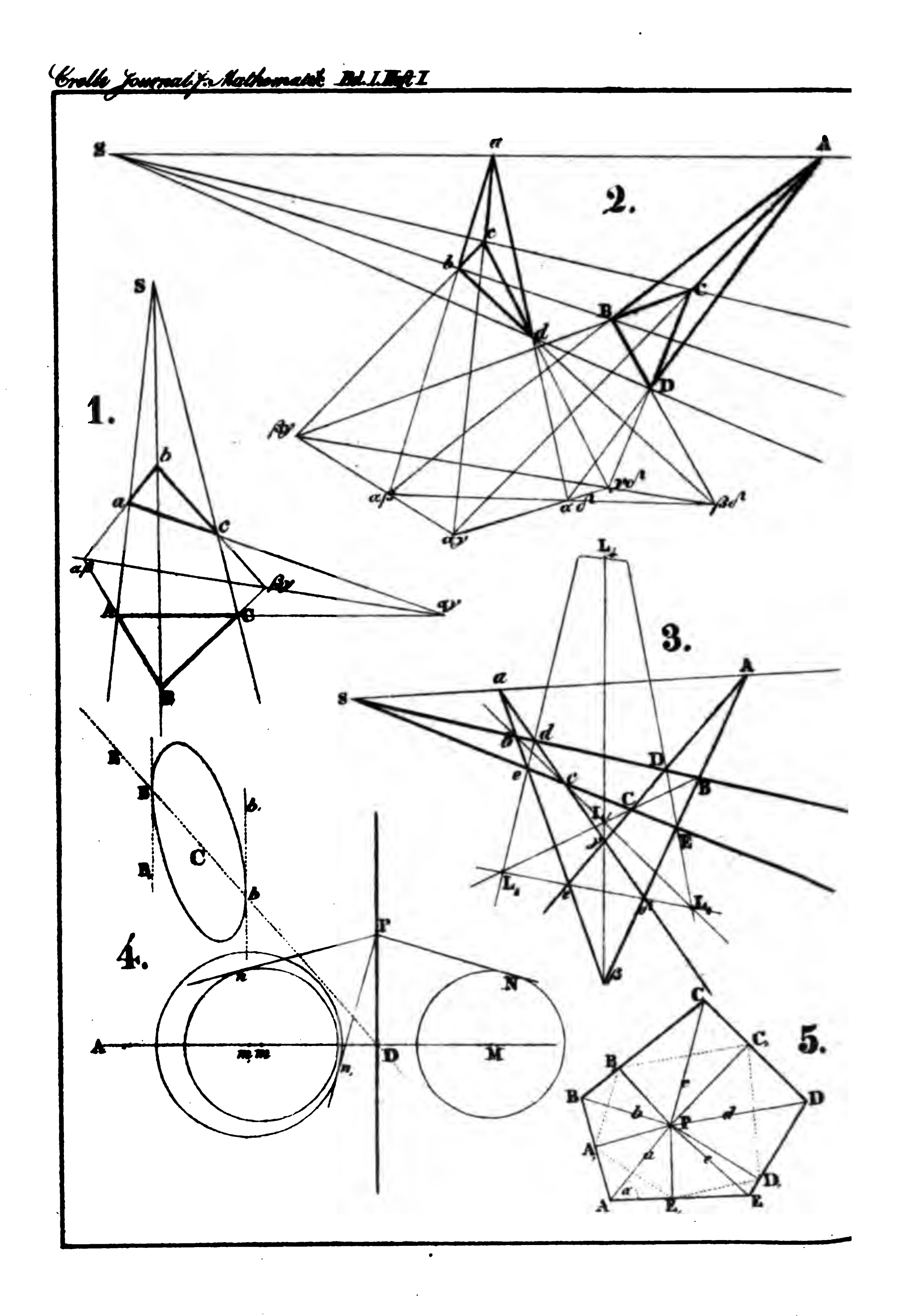
Die länglichen Räder, zur Verminderung oder Aufhebung der Ungleichheit der Wirkungen von Kurbeln, sind nicht bloſs ein Gegenstand oder ein Anlaſs einer analytischen Untersuchung, in welcher Qualität sie hier vorkommen, sondern sie sind bei Maschinen wirklich mit Nutzen anwendbar, besonders bei mehrfachen Kurbeln, da man die statische Ungleichheit der Wirkung derselben durch solche Räder von gehöriger Form aufheben kann. Das dynamische Verhalten der länglichen Räder giebt Anlaſs zu noch mehreren interessanten Untersuchungen, die aber für diesmal dahingestellt bleiben mögen.

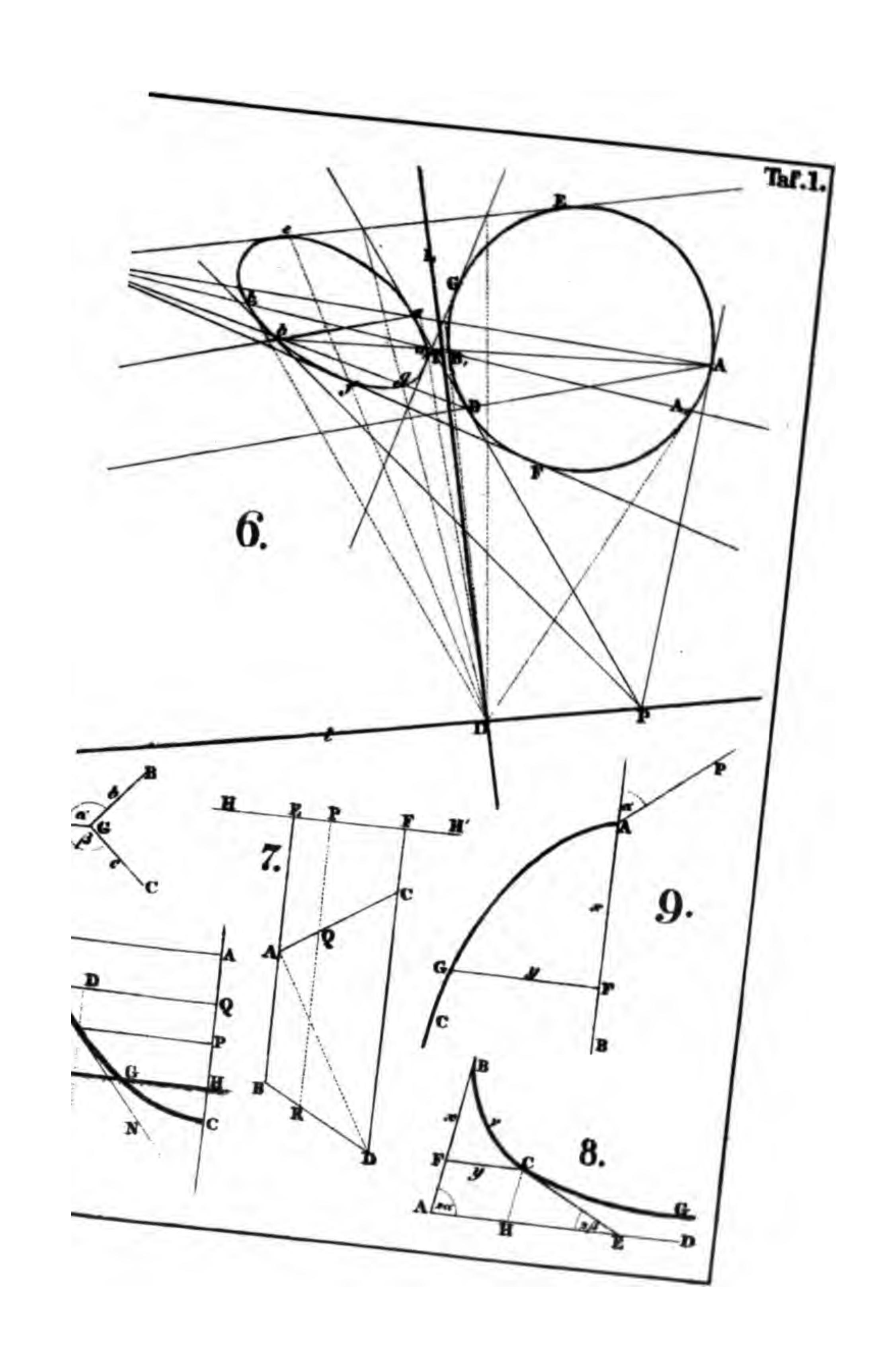
Zum Schlusse werde nur noch bemerkt, daſs, wenn man sich bei den nicht kreisförmigen Rädern eines Schwungrades bedienen will, dasselbe in der Regel nicht an der Axe der Kurbel, sondern an der Axe der bewegenden Kraft befestigt seyn muſs, weil gewöhnlich nicht die Kurbel-Axe, sondern nur die Axe der bewegenden Kraft mit gleichförmiger Winkel-Geschwindigkeit umläuft.

Einige Verbesserungen im ersten Bande.

Seite 7 Z. 14 v. u. l. m. Figur 7 statt Figur 10.
— 45 — 8—7 v. u. fällt die Klammer [ ] weg.
— 50 — 4 v. o. l. m. Cylinder statt Kegel.
— 51 — 8 v. u. l. m. Vielecks statt Vierecks.
— 67 — 7 v. o l. m. $\sqrt[n']{p'}$ statt $\sqrt[n_1]{p'}$.
— 67 — 11 v. o. l. m. p_1'' statt p_2''.
— 68 — 13 v. o. l. m. $n$ten Grade st. μten Grade.
— 69 — 19 v. o. l. m. $\frac{s_0}{M}, \frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M}$ statt $\frac{s_0}{m}, \frac{s_1}{m}, \frac{s_2}{m}$.
— 70 — 8 v. o. In dieser Formel muſs überall p_1 statt p stehen.
— 72 — 6 v. o. l. m. und t_0 nicht Null ist, st. einzeln.
— 72 — 7 v. o. l. m. $\alpha^\mu - 1 = 0$ statt $\alpha^\mu - 1 = 0$, $\alpha - \alpha^\mu = 0 \ldots\ldots \alpha^{\mu-1} - \alpha^\mu = 0$.
— 74 — 6 v. o. l. m. s_δ statt s^δ.
— 75 — 3 v. u. l. m. $v\left(\frac{A_1}{A_m}\right)^{r+p-r}$ statt $v\left(\frac{A_1}{A_m}\right)^r$.
— 77 — 13. 14. 15 v. o. l. m. statt des dort angeführten Lehrsatzes folgenden:
Die Zahl der verschiedenen Werthe einer Function von n Gröſsen kann entweder gar nicht bis unter die gröſste Primzahl, die kleiner als n ist, vermindert werden, oder nur bis auf 2 oder 1.
— 96 — 14 u. 13 v. u. l. m. die Durchschnittspuncte der Diagonalen solcher an einander liegenden Parallelogramme st. solche an einander liegende Rechtecke.
— 140 — 10 v. u. l. m. $f_1(x, y, y^1 \ldots . y^{(n-1)}) = c_1 + \int dx \, . \, \varphi(x, y \ldots\ldots y^{(n)})$ statt $f_1(x, y, y^1 \ldots y^{(n-1)}) = c_1 + \int dx(\varphi(x, y \ldots y^{(n)}))$.
— 165 — 16 v. u. nach „Puncts P" ist einzuschalten: „von den Mittelpuncten der Kreise".
— 174 — 14 u. 15 v. o. l. m. A statt A_3.
— 187 — 14 v. u.
— 187 — 3 v. u.
— 188 — 2 v. u.
— 188 — 5 v. u. } fällt das Wort „log" weg.
— 189 — 6 v. o. l. m. kleiner st. nicht gröſser.
— 192 — 21 v. o. l. m. $\delta\left(\frac{v^1}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}\right)$ st. $\delta\left(\frac{r^1}{s^2} - \frac{v}{s\,3^2}\right)$.
— 193 — 2 v. o. fehlt die Klammer nach dem Gliede $-4\,s\mu^2$.
— 193 — 9 v. o. l. m. $r + t_1 N$ st. $1 + t_1 N$.
— 193 — 23 v. o. l. m. $\delta(r+r_1)(r-r_1)$ st. $\delta(r+r^1)(r-r_1)$.
— 193 — 26 v. o. l. m. δs st. ds.
— 200 — 10 v. o. l. m. $-\delta q$ st. $-dq$.
— 201 — 13 v. o. l. m. $r_1 = r - 2s$ st. $r_1 = r - s$.
— 201 — 15 v. o. l. m. $r_2 = r_1 - 2s_1$ st. $r_2 = r_1 - s_1$.
— 201 — 17 v. o. l. m. $r_{n+1} = r_n - 2s_n$ st. $r_{n+1} = r_n - s_n$.
— 201 — 19 v. o. l. m. $r_m = r_{m-1} - 2\,s_{m-1}$ st. $r_m = r_{m-1} - s_{m-1}$.
— 203 — 1 v. o. l. m. $s_m = s_{m-2} + 4(-1)^m \mu_{m-1}(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2} N - \beta_{m-1}\beta_{m-2} R_1) - 4s_{m-1} \, . \, \mu_{m-1}^2$ st. $s_m = s_{m-2} + 4(-1)^m \, . \, (\alpha_{m-1}\alpha_{m-2} N - \beta_{m-1}\beta_{m-2} R_1) - 4s_{m-1} m_{\mu-1}^2$.
— 203 — 3 v. o. l. m. $-4s_{m-1}\mu_{m-1}^2$ st. $-4s_{m-1} \, . \, m_{\mu-1}$.

S. 203 Z. 2 v. u. l. m. $\frac{sm}{s_{n}^{1}}$ st. $\frac{sm}{s^1}$.
— 204 — 1 v. o. l. m. $\frac{s^0}{s_0^1}$ st. $\frac{s_0}{s_1}$.
— 205 — 5 v. u. l. m. $\delta\varrho_m$ st. $d\varrho_m$.
— 209 — 3, 6, 16, 19 fehlt unter dem Integrationszeichen der Factor $\frac{1}{\sqrt{R}}$.
— 215 — 14 v. o. l. m. r_{k-2} st. s_{k-2}.
— 215 — 20 v. o. l. m. μ_{k-2} st. μ_{k+2}.
— 220 — 3 v. u. l. m. der obigen st. einerlei.
— 221 — 6 v. u. l. m. $x - a_0$ st. $x - \alpha_0$.
— 225 — 10 v. u. l. m. x_n^2 st. x_1^2.
— 262 — 9 u. 18 v. o. l. m. B st. II.
— 264 — 15 v. u. l. m. B st. II.
— 274 — 12 v. u. l. m. $-\frac{P_1}{R}, -\frac{P_2}{R}, -\frac{P_3}{R}$ st. $\frac{P_1}{R}, \frac{P_2}{R}, \frac{P_3}{R}$.
— 274 — 8, 9, 10 v. u. l. m. ebenfalls $-\frac{P_1}{R}, -\frac{P_2}{R}, -\frac{P_3}{R}$ st. $\frac{P_1}{R}, \frac{P_2}{R}, \frac{P_3}{R}$ u. auſserdem $+\frac{2R}{k_1}, +\frac{2R}{k_2}, +\frac{2R}{k_3}$ st. $-\frac{2R}{k_1}, -\frac{2R}{k_2}, -\frac{2R}{k_3}$.
— 274 — 6 v. u. l. m. $-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}$ st. $+\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.
— 313 — 13 v. o. l. m. beliebigen convergenten Reihe st. beliebigen Reihe.
— 315 — 20 v. o. l. m. $\alpha < \delta$ st. $\alpha < \beta$.
— 316 — 15 etc. muſs der Lehrs. VI heiſsen, wie folgt:
Bezeichnet man durch $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \ldots$; $\varrho_0^1, \varrho_1^1, \varrho_2^1 \ldots$ die Zahlenwerthe der resp. Glieder zweier convergenten Reihen
$v_0 + v_1 + v_2 \ldots = p$ und
$v_0^1 + v_1^1 + v_2^1 \ldots = p^1$,
und sind die Reihen
$\varrho_0 + \varrho_1 + \ldots$
$\varrho_0^1 + \varrho_1^1 + \ldots$
ebenfalls convergent, so wird auch die Reihe
$r_0 + r_1 + r_2 + \ldots + r_m$,
deren allgemeines Glied
$r_m = v_0 v_m^1 + v^1 v_{m-1}^1 + \ldots + v_m v_0^1$ ist,
convergent, und ihre Summe gleich
$(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots)(v_0^1 + v_1^1 + v_2^1 + \ldots)$
seyn.
— 323 — 23 u. 24 v. o. l. m. „weil $\varphi(k)$ eine stetige Function ist" st. „nach dem Lehrsatze (V)".
— 324 — 13 v. u. l. m. $f(k+l, k^1+l^1)$ st. $f(k, l, k^1+l^1)$.
— 324 — 9 v. u. l. m. stetige st. beständige.
— 325 — 7 v. o. l. m. $\varphi(k+k^1\sqrt{-1})$ st. $\varphi(k-k^1\sqrt{-1})$.
— 327 — 6 u. 7 v. u. l. m. $\theta_\mu^1, \theta\mu, \delta_\mu^1, \delta_\mu$ st. $\theta^1\mu, \theta\mu, \delta^1\mu, \delta\mu$.
— 330 — 3 v. u. l. m. $<$ st. $=$.
— 338 — 5 u. 6 v. u. l. m. Bis jetzt sind aber diese Bemühungen, wenn ich nicht irre, noch nicht ganz gelungen.
— 366 — 5 v. o. l. m. Gergonne st. Gergonne.
— 384 — 7 v. u. l. m. 13 st. 12.
Taf. II. Fig. 16 fehlen bei den Puncten, in welchen die Gerade $M_1 M_2$ den Kreis P_1 schneidet, die Buchstaben A und B.

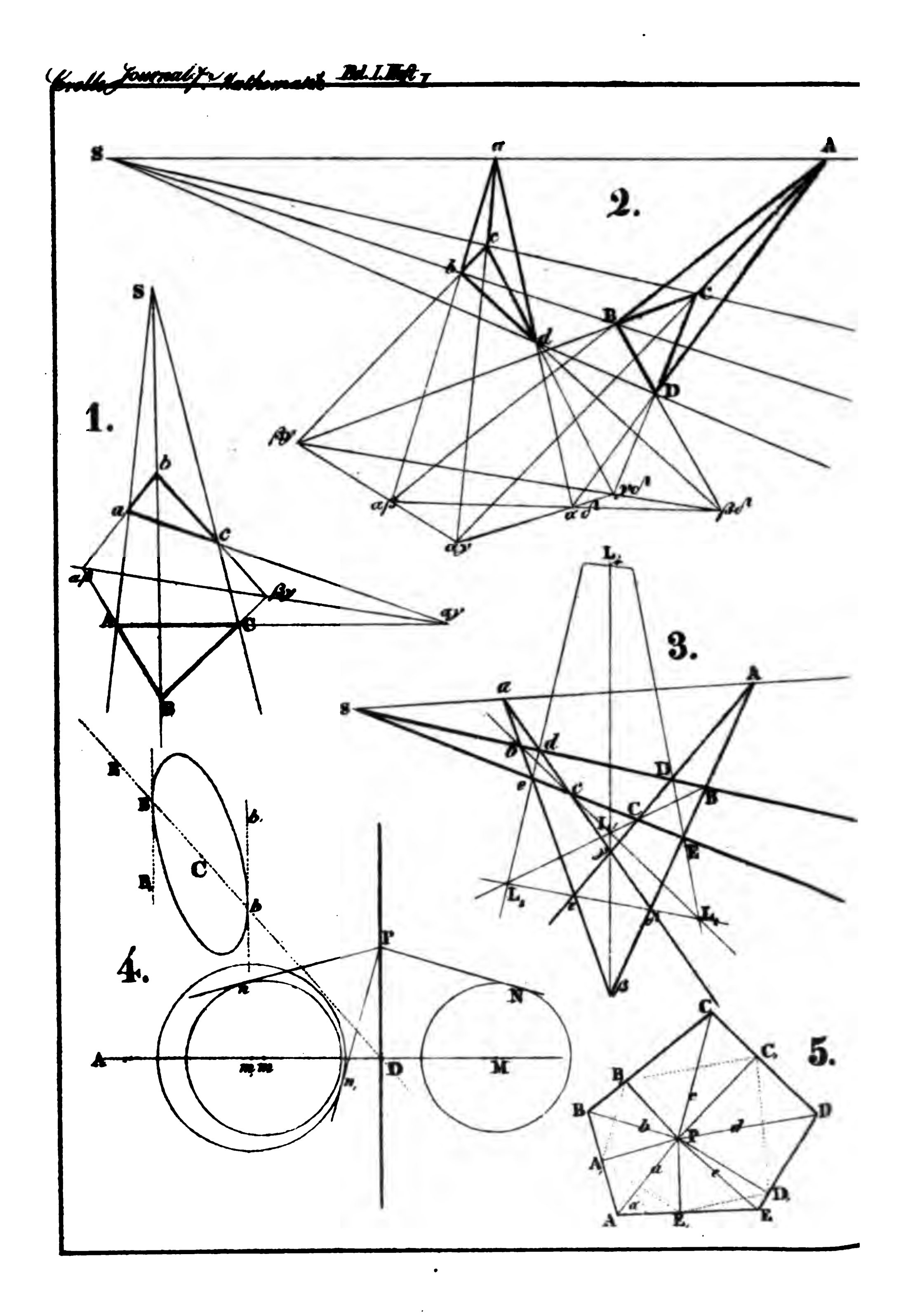

1.
2.
3.
4.
5.


Taf. 1.
6.
7.
8.
9.

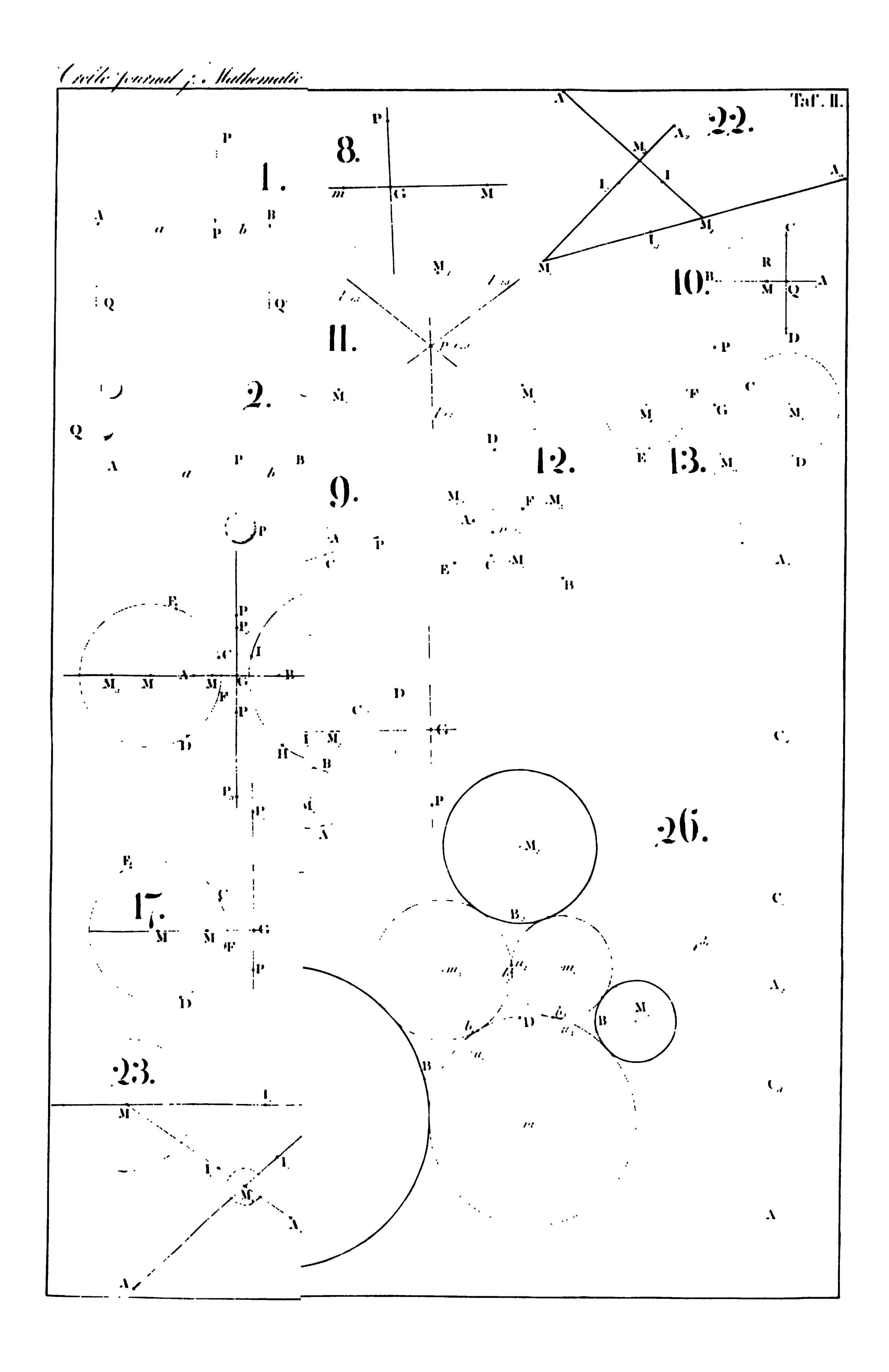
Einige Verbesserungen im ersten Bande.

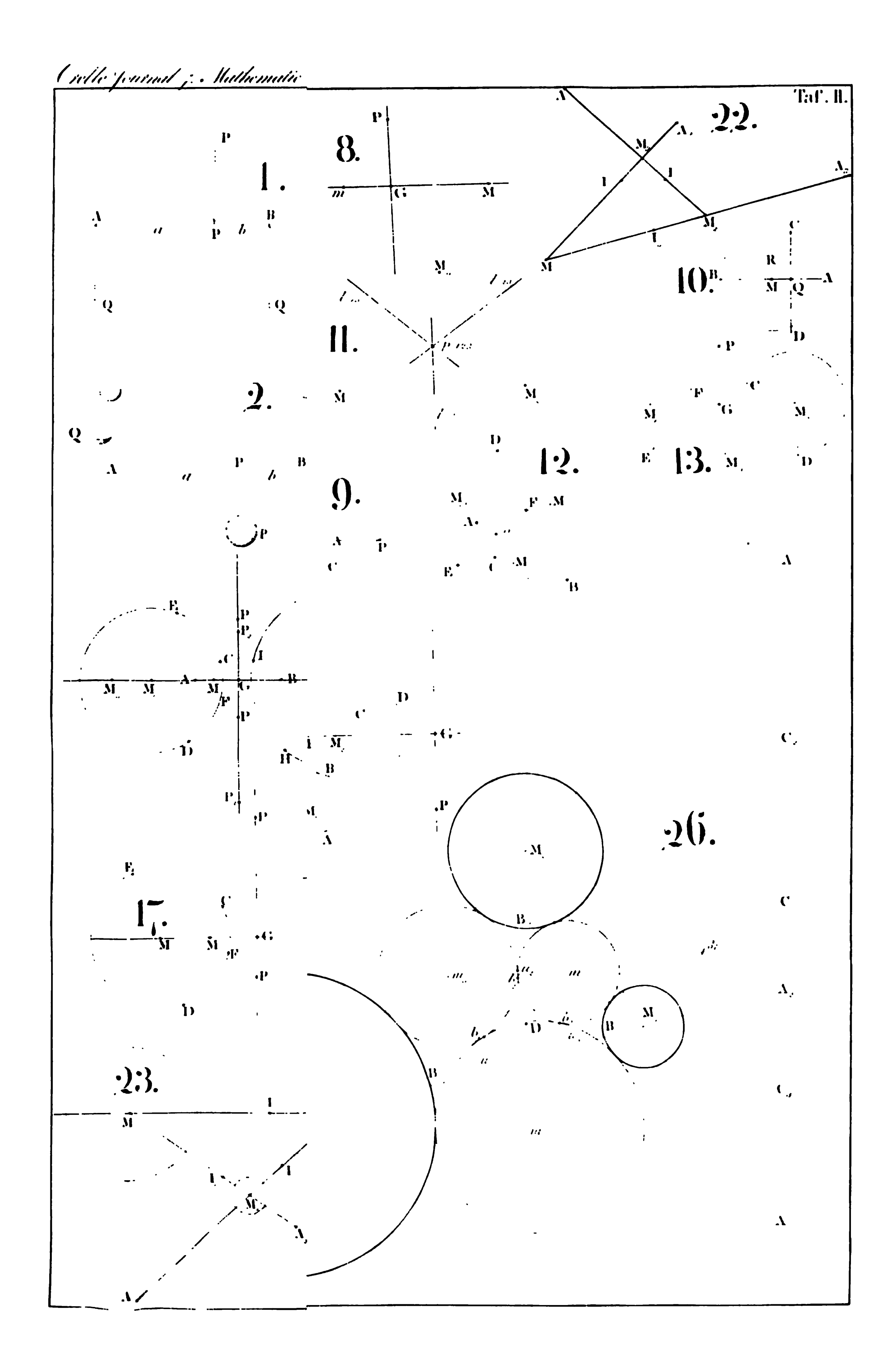
Seite 7 Z. 14 v. u. l. m. Figur 7 statt Figur 10.
— 45 — 8—7 v. u. fällt die Klammer [ ] weg.
— 50 — 4 v. o. l. m. Cylinder statt Kegel.
— 51 — 8 v. u. l. m. Vielecks statt Vierecks.
— 67 — 7 v. o l. m. $\sqrt[n']{p'}$ statt $\sqrt[n_1]{p'}$.
— 67 — 11 v. o. l. m. p_1'' statt p_2''.
— 68 — 13 v. o. l. m. $m$ten Grade st. μten Grade.
— 69 — 19 v. o. l. m. $\frac{s_0}{M}, \frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M}$ statt $\frac{s_0}{m}, \frac{s_1}{m}, \frac{s_2}{m}$.
— 70 — 8 v. o. In dieser Formel muſs überall p_1 statt p stehen.
— 72 — 6 v. o. l. m. und t_0 nicht Null ist, st. einzeln.
— 72 — 7 v. o. l. m. $\alpha^\mu - 1 = 0$ statt $\alpha^\mu - 1 = 0$, $\alpha - \alpha^\mu = 0 \ldots\ldots \alpha^{\mu-1} - \alpha^\mu = 0$.
— 74 — 6 v. o. l. m. $x\delta$ statt x^δ.
— 75 — 3 v. u. l. m. $v\left(\frac{A_1}{A_m}\right)^{r+p-r}$ statt $v\left(\frac{A_1}{A_m}\right)^r$.
— 77 — 13. 14. 15 v. o. l. m. statt des dort angeführten Lehrsatzes folgenden:
Die Zahl der verschiedenen Werthe einer Function von n Gröſsen kann entweder gar nicht bis unter die gröſste Primzahl, die kleiner als n ist, vermindert werden, oder nur bis auf 2 oder 1.
— 96 — 14 u. 13 v. u. l. m. die Durchschnittspuncte der Diagonalen solcher an einander liegenden Parallelogramme st. solche an einander liegende Rechtecke.
— 140 — 10 v. u. l. m. $f_1(x, y, y^1 \ldots y^{(n-1)}) = c_1 + \int dx \,.\, \varphi(x, y \ldots\ldots y^{(n)})$ statt $f_1(x, y, y^1 \ldots y^{(n-1)}) = c_1 + \int dx(\varphi(x, y \ldots y^{(n)}))$.
— 165 — 16 v. u. nach „Puncts P" ist einzuschalten: „von den Mittelpuncten der Kreise".
— 174 — 14 u. 15 v. o. l. m. A statt A_3.
— 187 — 14 v. u.
— 187 — 3 v. u.
— 188 — 2 v. u.
— 188 — 5 v. u.
(187–188:) fällt das Wort „log" weg.
— 189 — 6 v. o. l. m. kleiner st. nicht gröſser.
— 192 — 21 v. o. l. m. $\delta\left(\frac{v^1}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}\right)$ st. $\delta\left(\frac{r^1}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}\right)$.
— 193 — 2 v. o. fehlt die Klammer nach dem Gliede $-4s\mu^2$.
— 193 — 9 v. o. l. m. $r + t_1 N$ st. $1 + t_1 N$.
— 193 — 23 v. o. l. m. $\delta(r+r_1)(r-r_1)$ st. $\delta(r+r^1)(r-r_1)$.
— 193 — 26 v. o. l. m. δs st. ds.
— 200 — 10 v. o. l. m. $-\delta q$ st. $-dq$.
— 201 — 13 v. o. l. m. $r_1 = r - 2s$ st. $r_1 = r - s$.
— 201 — 15 v. o. l. m. $r_2 = r_1 - 2s_1$ st. $r_2 = r_1 - s_1$.
— 201 — 17 v. o. l. m. $r_{n+1} = r_n - 2s_n$ st. $r_{n+1} = r_n - s_n$.
— 201 — 19 v. o. l. m. $r_m = r_{m-1} - 2s_{m-1}$ st. $r_m = r_{m-1} - s_{m-1}$.
— 203 — 1 v. o. l. m.
$s_m = s_{m-2} + 4(-1)^m \mu_{m-1}(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N - \beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1) - 4s_{m-1} \,.\, \mu_{m-1}^2$ st. $s_m = s_{m-2} + 4(-1)^m \,.\, (\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N - \beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1) - 4s_{m-1} m_{\mu-1}^2$.
— 203 — 3 v. o. l. m. $-4s_{m-1}\mu_{m-1}^2$ st. $-4s_{m-1} \,.\, m_{\mu-1}$.

S. 203 Z. 2 v. u. l. m. $\frac{sm}{s_{1,1}}$ st. $\frac{sm}{s^1}$.
— 204 — 1 v. o. l. m. $\frac{s^0}{s_0^1}$ st. $\frac{s_0}{s_1}$.
— 205 — 5 v. u. l. m. $\delta\varrho_m$ st. $d\varrho_m$.
— 209 — 3, 6, 16, 19 fehlt unter dem Integrationszeichen der Factor $\frac{1}{\sqrt{R}}$.
— 215 — 14 v. o. l. m. r_{k-2} st. s_{k-2}.
— 215 — 20 v. o. l. m. μ_{k-2} st. μ_{k+2}.
— 220 — 3 v. u. l. m. der obigen st. einerlei.
— 221 — 6 v. u. l. m. $x - a_0$ st. $x - \alpha_0$.
— 225 — 10 v. u. l. m. x_n^2 st. x_4^2.
— 262 — 9 u. 18 v. o. l. m. B st. II.
— 264 — 15 v. u. l. m. B st. II.
— 274 — 12 v. u. l. m. $-\frac{P_1}{R}, -\frac{P_2}{R}, -\frac{P_3}{R}$ st. $\frac{P_1}{R}, \frac{P_2}{R}, \frac{P_3}{R}$.
— 274 — 8, 9, 10 v. u. l. m. ebenfalls $-\frac{P_1}{R}, -\frac{P_2}{R}, -\frac{P_3}{R}$ st. $\frac{P_1}{R}, \frac{P_2}{R}, \frac{P_3}{R}$ u. auſserdem $+\frac{2R}{k_1}, +\frac{2R}{k_2}, +\frac{2R}{k_3}$ st. $-\frac{2R}{k_1}, -\frac{2R}{k_2}, -\frac{2R}{k_3}$.
— 274 — 6 v. u. l. m. $-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}$ st. $+\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.
— 313 — 13 v. o. l. m. beliebigen convergenten Reihe st. beliebigen Reihe.
— 315 — 20 v. o. l. m. $\alpha < \delta$ st. $\alpha < \beta$.
— 316 — 15 etc. muſs der Lehrs. VI heiſsen, wie folgt:
Bezeichnet man durch $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \ldots$; $\varrho_0^1, \varrho_1^1, \varrho_2^1 \ldots$ die Zahlenwerthe der resp. Glieder zweier convergenten Reihen
$v_0 + v_1 + v_2 \ldots = p$ und
$v_0^1 + v_1^1 + v_2^1 \ldots = p^1$,
und sind die Reihen
$\varrho_0 + \varrho_1 + \ldots$
$\varrho_0^1 + \varrho_1^1 + \ldots$
ebenfalls convergent, so wird auch die Reihe
$r_0 + r_1 + r_2 + \ldots + r_m$,
deren allgemeines Glied
$r_m = v_0 v_m^1 + v^1 v_{m-1}^1 + \ldots + v_m v_0^1$ ist,
convergent, und ihre Summe gleich
$(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots)(v_0^1 + v_1^1 + v_2^1 + \ldots)$
seyn.
— 323 — 23 u. 24 v. o. l. m. „weil $f(k)$ eine stetige Function ist" st. „nach dem Lehrsatze (V)".
— 324 — 13 v. u. l. m. $f(k+l, k^1+l^1)$ st. $f(k, l, k^1+l^1)$.
— 324 — 9 v. u. l. m. stetige st. beständige.
— 325 — 7 v. o. l. m. $\varphi(k+k^1\sqrt{-1})$ st. $\varphi(k-k^1\sqrt{-1})$.
— 327 — 6 u. 7 v. u. l. m. $\theta_\mu^1, \theta_\mu, \delta_\mu^1, \delta_\mu$ st. $\theta^1\mu, \theta\mu, \delta^1\mu, \delta\mu$.
— 330 — 3 v. u. l. m. $<$ st. $=$.
— 338 — 5 u. 6 v. u. l. m. Bis jetzt sind aber diese Bemühungen, wenn ich nicht irre, noch nicht ganz gelungen.
— 366 — 5 v. o. l. m. *Gergonne* st. *Gorgonne*.
— 384 — 7 v. u. l. m. 13 st. 12.
Taf. II. Fig. 16 fehlen bei den Puncten, in welchen die Gerade $M_1 M_2$ den Kreis P_1 schneidet, die Buchstaben A und B.



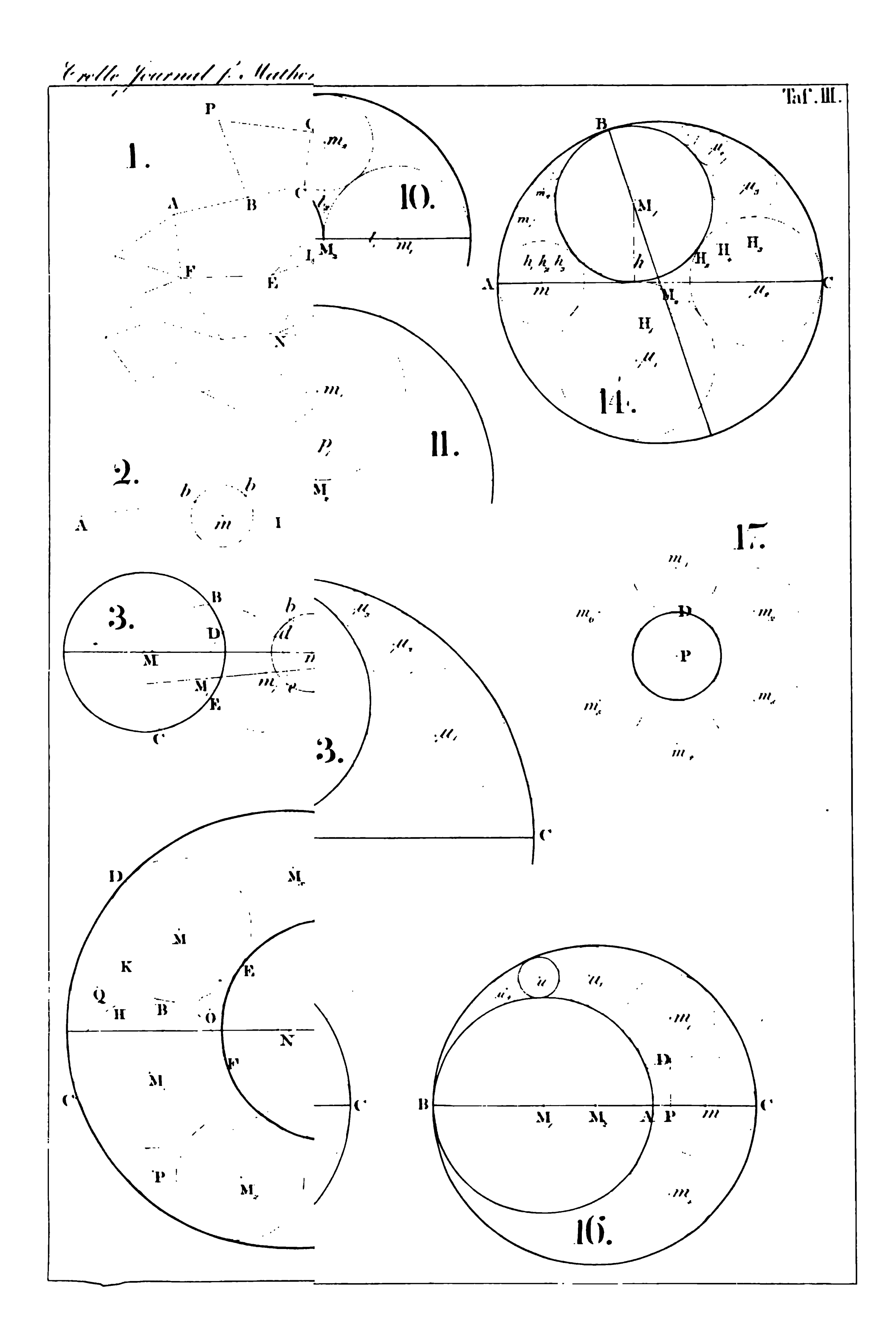
Crelle Journal f. Mathematik Bd. I. Heft 1
1.
2.
3.
4.
5.

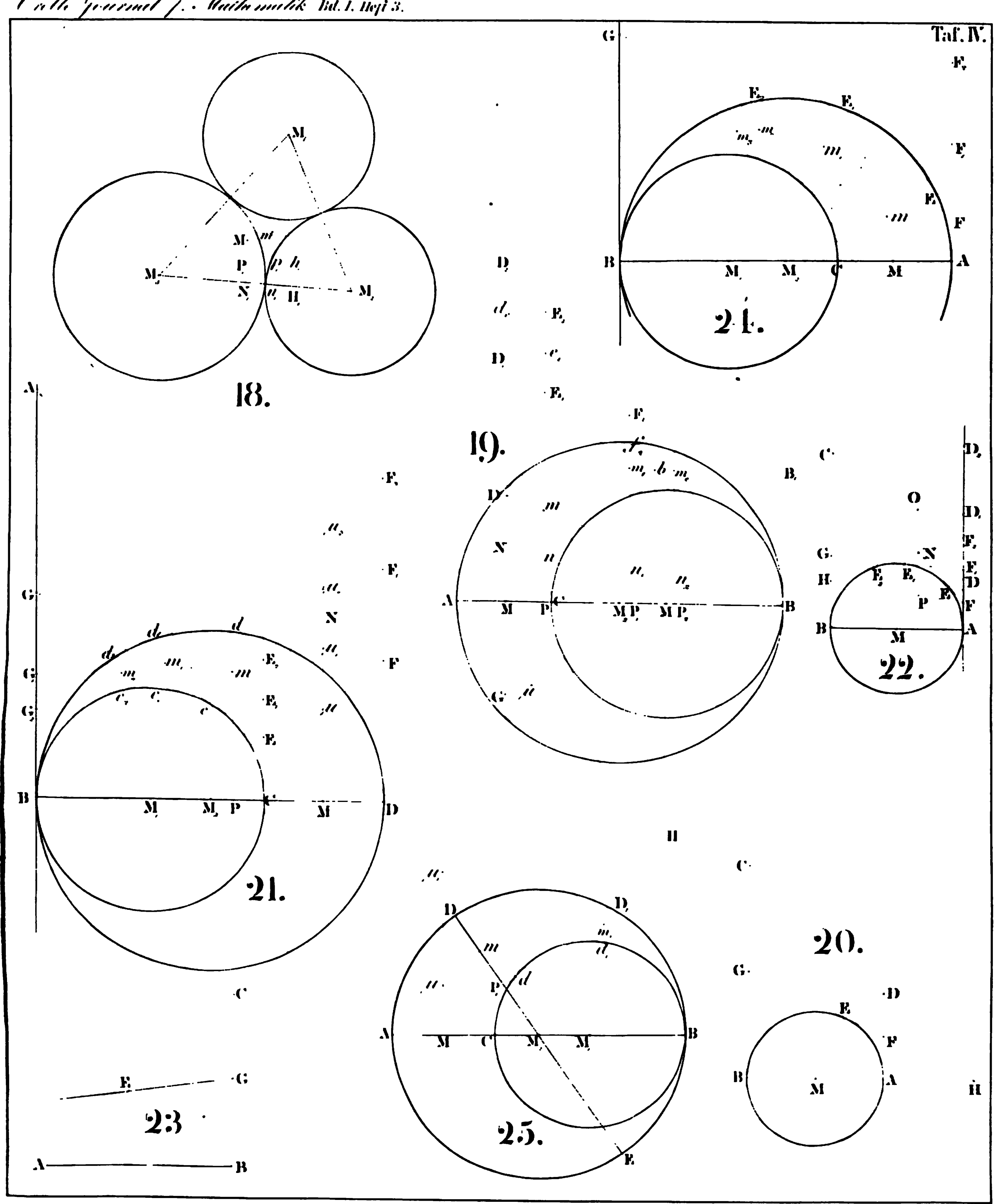

Crelle Journal f. d. Mathematik
Taf. II.
1.
2.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
17.
22.
23.
26.


1.
2.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
17.
22.
23.
26.

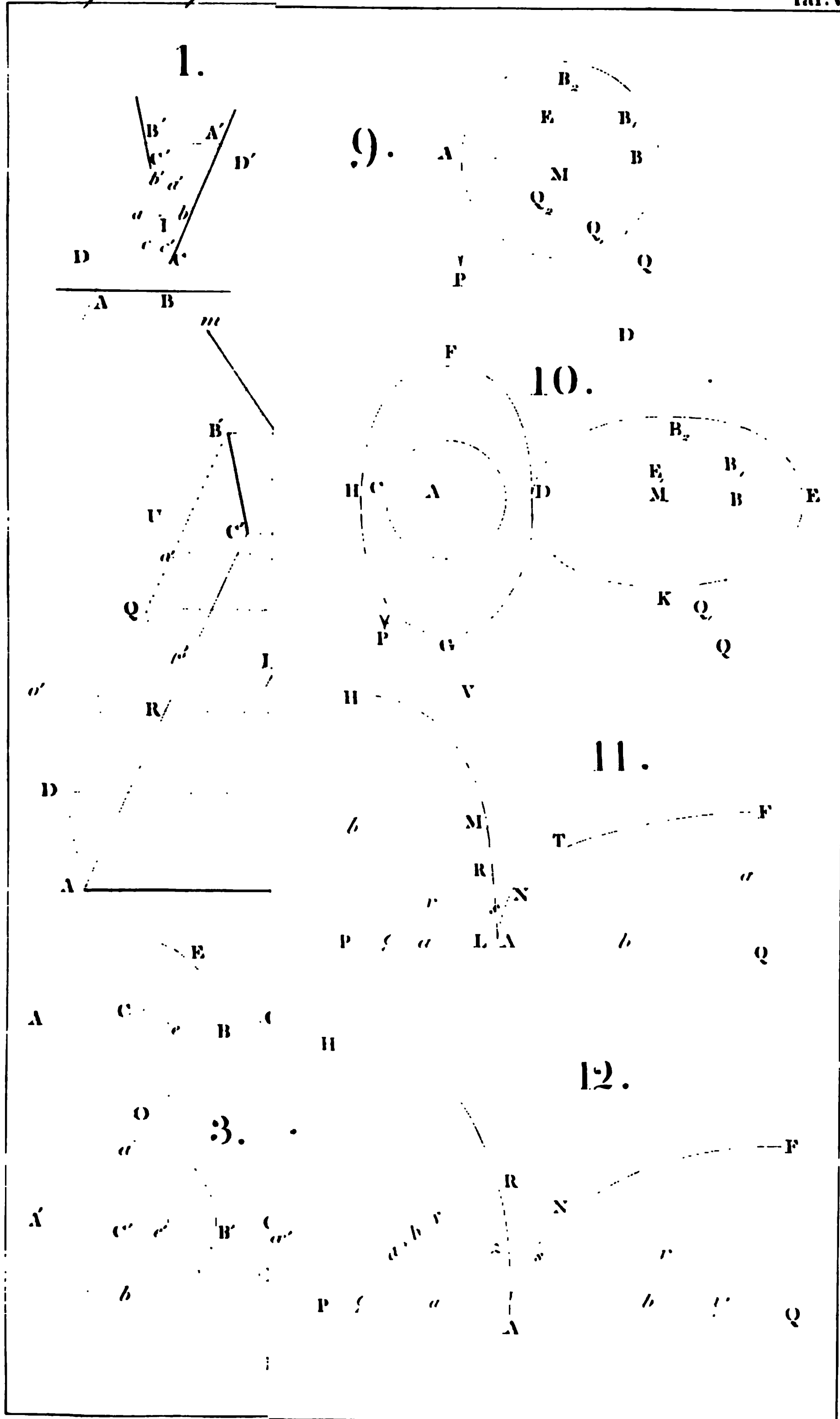
Taf. II.




Crelle Journal f. Mathe.
Taf. III.
1.
2.
3.
10.
11.
13.
14.
15.
16.
17.


Taf. IV.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.

1. 9. 10. 11. 12. 3.


1.
9.
10.
11.
12.
3.

